

Theoretische Informatik 2

3. Übungsblatt

1. Minimaler Aufwand

Bisher wurde der Aufwand von Operationen genau ermittelt oder nach oben abgeschätzt. Hier sollen nun untere Schranken für den Aufwand untersucht werden.

- (a) Betrachte die Spezifikation **mergesort** aus Abschnitt 3.7 des Skripts. Gib für alle $m, n \geq 1$ Eingabewörter $u, v \in A^*$ der Längen $\text{length}(u) = m$ und $\text{length}(v) = n$ an, so dass die Auswertung von $\text{merge}(u, v)$ mindestens $m + n$ Schritte braucht. (15%)
- (b) Betrachte die Spezifikation **quicksort** vom 2. Übungsblatt.
- i. Zeige, dass die Auswertung von $qsort(w)$ für Eingabewörter w der Länge n , die falsch herum sortiert sind, mindestens $n^2 + 3n$ Schritte braucht. Dabei ist ein Wort w falsch herum sortiert, falls für jedes Zeichen x in w alle nachfolgenden kleiner als x sind. (20%)
- ii. Gilt das auch für Eingabewörter, die richtig herum sortiert sind? (5%)

2. Matrizenmultiplikation

Der klassische Algorithmus zur Multiplikation von (n, n) -Matrizen benötigt n^3 Multiplikationen und $n^3 - n^2$ Additionen. Dagegen verwendet der Algorithmus von Winograd $\frac{1}{2}n^3 + n^2$ Multiplikationen und $\frac{3}{2}n^3 + 2n^2 - 2n$ Additionen.

- (a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ arbeitet der Algorithmus von Winograd effizienter, wenn eine Multiplikation gegenüber einer Addition fünfmal soviel Zeit benötigt? (15%)
- (b) Zeige, dass der Algorithmus von Winograd zur Matrizenmultiplikation nicht effizienter ist als der klassische, wenn Addition und Multiplikation gleich viel Zeit benötigen. (15%)

3. Aufwandsklassen

Für Funktionen $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ gilt $g \in O(f)$ genau dann, wenn natürliche Zahlen c, n_0 existieren, so dass $g(n) \leq c \cdot f(n)$ für alle $n \geq n_0$.

- (a) Zeige $O(n^2) \subseteq O(2^n)$. (Beachte: $O(n^2) \subseteq O(2^n)$, falls $n^2 \in O(2^n)$.) (10%)
- (b) Wie verhalten sich die Klassen $O(n!)$ und $O(2^n)$ zueinander (d.h., ist eine von beiden echt in der anderen enthalten, sind beide gleich, weder noch)? Weise die Korrektheit der Antwort nach. (20%)

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind spätestens in der Woche vom 11.06.07 in den Tutorien abzugeben.