

## Theoretische Informatik 2

### 3. Übungsblatt

#### 1. Minimaler Aufwand

Bisher wurde der Aufwand von Operationen genau ermittelt oder nach oben abgeschätzt. Hier sollen nun untere Schranken für den Aufwand untersucht werden.

- (a) Betrachte die Spezifikation **mergesort** aus Abschnitt 3.7 des Skripts. Gib für alle  $m, n \geq 1$  Eingabewörter  $u, v \in A^*$  der Längen  $\text{length}(u) = m$  und  $\text{length}(v) = n$  an, so dass die Auswertung von  $\text{merge}(u, v)$  mindestens  $m + n$  Schritte braucht. (15%)
- (b) Betrachte die Spezifikation **quicksort** vom 2. Übungsblatt.
- i. Zeige, dass die Auswertung von  $qsort(w)$  für Eingabewörter  $w$  der Länge  $n$ , die falsch herum sortiert sind, mindestens  $n^2 + 3n$  Schritte braucht. Dabei ist ein Wort  $w$  falsch herum sortiert, falls für jedes Zeichen  $x$  in  $w$  alle nachfolgenden kleiner als  $x$  sind. (20%)
- ii. Gilt das auch für Eingabewörter, die richtig herum sortiert sind? (5%)

#### 2. Matrizenmultiplikation

Der klassische Algorithmus zur Multiplikation von  $(n, n)$ -Matrizen benötigt  $n^3$  Multiplikationen und  $n^3 - n^2$  Additionen. Dagegen verwendet der Algorithmus von Winograd  $\frac{1}{2}n^3 + n^2$  Multiplikationen und  $\frac{3}{2}n^3 + 2n^2 - 2n$  Additionen.

- (a) Für welche  $n \in \mathbb{N}$  arbeitet der Algorithmus von Winograd effizienter, wenn eine Multiplikation gegenüber einer Addition fünfmal soviel Zeit benötigt? (15%)
- (b) Zeige, dass der Algorithmus von Winograd zur Matrizenmultiplikation nicht effizienter ist als der klassische, wenn Addition und Multiplikation gleich viel Zeit benötigen. (15%)

#### 3. Aufwandsklassen

Für Funktionen  $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$  gilt  $g \in O(f)$  genau dann, wenn natürliche Zahlen  $c, n_0$  existieren, so dass  $g(n) \leq c \cdot f(n)$  für alle  $n \geq n_0$ .

- (a) Zeige  $O(n^2) \subseteq O(2^n)$ . (Beachte:  $O(n^2) \subseteq O(2^n)$ , falls  $n^2 \in O(2^n)$ .) (10%)
- (b) Wie verhalten sich die Klassen  $O(n!)$  und  $O(2^n)$  zueinander (d.h., ist eine von beiden echt in der anderen enthalten, sind beide gleich, weder noch)? Weise die Korrektheit der Antwort nach. (20%)

Die bearbeiteten Übungsaufgaben sind spätestens in der Woche vom 11.06.07 in den Tutorien abzugeben.