Theoretische Informatik 2

Prof. Dr. Hans-Jörg Kreowski

Studiengang Informatik

Sommersemester 2003

MZH 3260
Tel.: 2956, 3697 (Sekr.), Fax: 4322

E-Mail: kreo@informatik.uni-bremen.de
www.informatik.uni-bremen.de/theorie

Inhaltsverzeichnis

1 Formale Sprachen – Wieso? Weshalb? Warum? 1

1.1 Syntax von Programmiersprachen und Syntaxanalyse 1

1.2 Wortproblem und Berechenbarkeit 3

1.2.1 Wortproblem einer beliebigen Sprache 3

1.2.2 Entscheidungsprobleme als Wortprobleme 4

1.2.3 Berechenbare Funktionen und das Wortproblem 4

1.2.4 Wortproblem selten lösbar 5

2 Chomsky-Grammatiken 5

2.1 Grammatik allgemein 5

2.2 Beispiele 7

3 Immerhin aufzählbar 8

3.1 Aufzählbarkeit erzeugter Sprachen 8

3.2 Die halbe Miete 9

3.3 Erzeugbarkeit aufzählbarer Sprachen 10

3.4 Unlösbarkeit des Wortproblems 10

3.5 Ausschöpfende Suche in die Breite mit roher Gewalt 10

4 Lösbarkeit des Wortproblems für monotone Grammatiken 11

4.1 Monotone Grammatiken 11

4.2 Lösung des Wortproblems für monotone Grammatiken 12

4.3 So ein Aufwand 13

5 Die Chomsky-Hierarchie 13

6 Endliche Automaten 14

6.1 Definition endlicher Automaten 15

6.2 Der Potenzautomat 16

6.3 Pumping-Lemma für erkannte Sprachen 18

7 Rechtslineare Grammatiken und endliche Automaten 19

7.1 Übersetzung endlicher Automaten in Chomsky-Grammatiken 20

7.2 Übersetzung rechtslinearer Grammatiken ohne Abweichung in endliche Automaten 21

7.3 Verkleinern der Abweichung 22

7.4 Übersetzung rechtslinearer Grammatiken in endliche Automaten 23

8 Reguläre Sprachen und reguläre Ausdrücke **24**

8.1 Reguläre Operationen 24

8.2 Endliche Automaten erkennen reguläre Sprachen 25

8.3 Reguläre Ausdrücke 26

9 Kellerautomaten **27**

9.1 Konzept des Kellerautomaten 28

9.2 Deterministische Kellerautomaten 29

9.3 Beispiel: Reguläre Ausdrücke 29

10 Von kontextfreien Grammatiken zu Kellerautomaten **31**

10.1 Der Übersetzer 31

10.2 Beispiel: Klammergebirge 32

11 Kontextfreiheitslemma **33**

12 Linksableitungen **34**

13 Korrektheit der Übersetzung von kontextfreien Grammatiken in Kellerautomaten **36**

14 Von Kellerautomaten zu kontextfreien Grammatiken **38**

15 Das Cocke-Kasami-Younger-Verfahren **41**

16 Ableitungsbäume **42**

16.1 Konstruktion 43

16.2 Beziehung zwischen Baumhöhe und Resultatslänge 44

16.3 Ein langer Weg von der Wurzel zu einem Blatt 45

16.4 Anhängen und Abhängen von Ableitungsbäumen 45

17 Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen **46**

18 Ein unentscheidbares Problem für kontextfreie Grammatiken **49**

Literatur **50**

1 Formale Sprachen – Wieso? Weshalb? Warum?

Die Lehrveranstaltung *Theoretische Informatik 2* führt in die Theorie formaler Sprachen ein, die eines der ältesten und am weitesten entwickelten Gebiete der Theoretischen Informatik darstellt. Die Bedeutung dieser Theorie rührt daher, dass ihre Konzepte und Methoden die Grundlage für die Definition der Syntax von Programmiersprachen und für den Bau ihrer Compiler bilden, wobei insbesondere die Syntaxanalyse unterstützt wird (1.1). Ein zentraler Aspekt der Syntaxanalyse ist die Lösung des sogenannten Wortproblems, die sehr viel mit Berechenbarkeit zu tun hat, wie sie im vorigen Semester behandelt wurde (1.2).

1.1 Syntax von Programmiersprachen und Syntaxanalyse

Wer ein Programm in einer Programmiersprache X schreiben möchte, wählt sich häufig einen Texteditor Y aus und erstellt mit dessen Hilfe eine bestimmte Zeichenkette, die dann als Eingabe für den Compiler von X dient. Dies ist in Abbildung 1 skizziert.

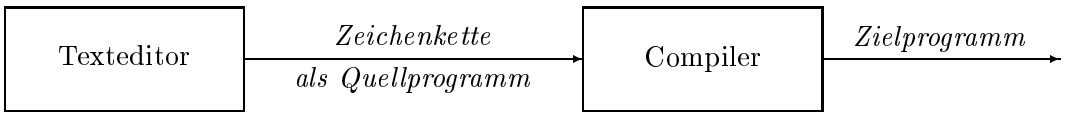


Abbildung 1: Erstellung eines Programms

Man kann nicht erwarten, dass jeder Text, der mit dem Editor Y entstehen kann, bereits ein Programm in X ist. Denn mit einem Texteditor lassen sich in der Regel beliebige Zeichenketten aufbauen, während ein Programm eine bestimmte Form haben muss. Zeichenketten jedoch, die keine Programme sind, wird der Compiler als unübersetzbar zurückweisen. Woher weiß aber eine Programmiererin oder ein Programmierer, wie die Zeichenkette aussehen muss, um ein Programm zu sein? Wie findet der Compiler heraus, ob irgendeine Zeichenkette ein übersetzbares Programm darstellt?

Die Form von Programmen einer Programmiersprache wird durch ihre Syntax festgelegt. Die Syntaxdefinition macht meist äußerst restriktive Vorschriften über die Anordnung und Plazierung von Zeichen, damit eine Zeichenkette ein syntaktisch richtiges Programm ist. Eine Person, die ein Programm mit Hilfe eines Texteditors erstellen will, sollte die Syntax recht gut kennen, weil andernfalls sicherlich häufig Syntaxfehler auftreten. Der Compiler dagegen übersetzt die eingegebene Zeichenkette in ein Zielprogamm, falls die Eingabe ein syntaktisch korrekt gebildetes Programm ist. Um das festzustellen, besitzen Compiler eine Syntaxanalyse-Komponente, die diese Aufgabe übernimmt.

Bei der Syntaxanalyse wird für eingegebene Zeichenketten untersucht, ob sie Programme sind oder nicht. Im positiven Fall wird außerdem der syntaktische Aufbau ermittelt, weil diese Information bei der weiteren Übersetzung maßgeblich genutzt wird. Im negativen Fall werden meist noch Hinweise auf Syntaxfehler gegeben. Die Trennung in "richtige" und

“falsche” Zeichenketten ist in der Regel das entscheidende algorithmische Problem, weil bei der Lösung die zusätzlichen Informationen ohne allzu große Mühe nebenbei gewonnen werden können.

Die syntaktisch richtigen Programme einer Programmiersprache bilden als Menge von Zeichenketten eine “formale Sprache”. Solche Zeichenkettenmengen sind Gegenstand der Untersuchung in der Theorie formaler Sprachen, die Konzepte für die syntaktische Definition formaler Sprachen bereitstellt und Methoden liefert, um die Eigenschaften formaler Sprachen analysieren zu können. Zu den wichtigsten Anwendungsfeldern der Theorie formaler Sprachen gehören die Syntaxdefinition von Programmiersprachen und die Syntaxanalyse. Die Schlüsselfrage der Syntaxanalyse, ob eine Zeichenkette ein Programm ist oder nicht, wird auch *Wortproblem* genannt. Betrachtet man die Menge aller richtigen Programme als formale Sprache, dann besteht das Problem darin, ob eine Zeichenkette in der Sprache liegt oder nicht. Da die Lösung des Wortproblems eine zentrale Rolle bei der Implementierung von Programmiersprachen spielt, aber keineswegs immer auf der Hand liegt, zieht sich die Behandlung des Wortproblems wie ein roter Faden durch die Theorie formaler Sprachen – und durch diese Lehrveranstaltung.

Aber erst einmal zurück zur Syntaxdefinition. Eine grundlegende Weise, formale Sprachen, einschließlich Programmiersprachen, zu spezifizieren, besteht darin, die übliche Art der Begriffsbildung (unter *dem und dem* versteht man *das und das*) in formalisierter Form zu nutzen. Einem zu definierenden, also noch undefinierten, syntaktischen Konstrukt wird ein definierender Ausdruck zugeordnet. Beides zusammen bildet eine Syntaxregel, das (noch) Undefinierte wird linke, das Definierende rechte Regelseite genannt. Der definierende Ausdruck der rechten Seite ist eine Zeichenkette, die rekursiv auch wieder undefinierte Konstrukte enthalten darf. Ist das noch Undefinierte der linken Seite durch ein einziges Zeichen dargestellt, spricht man von einer kontextfreien Regel. Die Syntaxdefinition einer Programmiersprache besteht in einem ersten Anlauf meist in der Angabe von kontextfreien Regeln, die dann später um Syntaxteile ergänzt werden, die sich nicht durch kontextfreie Regeln ausdrücken lassen.

Der kontextfreie Anteil der Syntax von Programmiersprachen wird häufig in der sogenannten Backus-Naur-Form geschrieben, wobei die kontextfreien Regeln als linke Seiten nichtterminale Zeichen, die zu definierende syntaktische Konstrukte der Sprache benennen, und als rechte Seiten Zeichenketten aus terminalen und nichtterminalen Zeichen besitzen. Die rechten Seiten zur selben linken Seite werden als Alternativen nebeneinandergestellt, durch einen senkrechten Strich voneinander getrennt. Linke und rechte Seiten werden durch das Trennzeichen “::=” auseinandergehalten. Nichtterminale Zeichen sind in spitze Klammern eingeschlossen. Für Spezifikationen in CE-S sieht das im Ausschnitt so aus:

<*cesspec*> ::= <*name*> opns: <*decllist*> eqns: <*celist*>
<*decllist*> ::= <*decl*> | <*decl*>, <*decllist*>
<*celist*> ::= <*ce*> | <*ce*>, <*celist*>
<*decl*> ::= <*name*>: <*typelist*>→<*type*>
<*ce*> ::= <*eq*> falls <*eqlist*> für <*varlist*>

Die Regeln können zum Aufbau syntaktisch korrekter Programme bzw. Programmstücke verwendet werden, indem mit dem gewünschten Konstrukt begonnen wird und dann nach und nach in den aktuellen Zeichenketten auftretende nichtterminale Zeichen durch zugehörige rechte Seiten ersetzt werden; z.B.:

$$
\begin{array}{lll}
<\mathit{cesspec}> & \longrightarrow & <\mathit{name}> \text{ opns: } <\mathit{decllist}> \text{ eqns: } <\mathit{celist}> \\
 & \longrightarrow & <\mathit{name}> \text{ opns: } <\mathit{decl}> \text{ eqns: } <\mathit{celist}> \\
 & \longrightarrow & <\mathit{name}> \text{ opns: } <\mathit{decl}> \text{ eqns: } <\mathit{ce}>, <\mathit{celist}> \\
 & \longrightarrow & <\mathit{name}> \text{ opns: } <\mathit{decl}> \text{ eqns: } <\mathit{ce}>, <\mathit{ce}> \\
 & \longrightarrow & <\mathit{name}> \text{ opns: } <\mathit{name}>: \ <\mathit{typelist}> \rightarrow <\mathit{type}> \text{ eqns: } <\mathit{ce}>, <\mathit{ce}> \\
 & \vdots & \\
 & \longrightarrow & \textbf{sort} \\
 & & \quad \text{opns:} \quad \mathit{sort}\colon A^* \rightarrow A^* \\
 & & \quad \text{eqns:} \quad \mathit{sort}(\lambda) = \lambda, \\
 & & \qquad\quad \mathit{sort}(xu) = \mathit{insort}(x, \mathit{sort}(u)) \text{ für } x \in A, u \in A^*
\end{array}
$$

wobei allerdings die resultierende Spezifikation mit den obigen Regeln nicht erreichbar ist. Dazu müsste die Syntax von CE-S vervollständigt werden. Ziel solchen Ableitens ist eine Zeichenkette ohne nichtterminale Zeichen, die dann bezüglich der kontextfreien Syntax ein korrektes Konstrukt darstellt. Dieses Prinzip findet sich in syntaxgesteuerten Editoren wieder.

1.2 Wortproblem und Berechenbarkeit

Wie in Abschnitt 1.1 erläutert, ist die Syntaxanalyse eine zentrale Aufgabe bei der Übersetzung von Programmen einer Programmiersprache. Den Kern bildet dabei die Lösung des Wortproblems für die Menge aller syntaktisch korrekten Programme, das darin besteht, algorithmisch festzustellen, ob ein beliebiges eingegebenes Wort ein Programm ist oder nicht.

Aber das Wortproblem ist auch für andere Sprachen signifikant, weil ein enger Zusammenhang zur Berechenbarkeit besteht. Das soll im folgenden näher erläutert werden.

1.2.1 Wortproblem einer beliebigen Sprache

Betrachtet man als *formale Sprache* eine beliebige Menge L von Wörtern aus A^* für ein Alphabet A, so definiert L ein *Wortproblem*:

Gibt es einen Algorithmus, der für jedes $x \in A^*$ bestimmt, ob $x \in L$ oder $x \notin L$ gilt?

Die Frage ist also, ob die sogenannte *charakteristische Funktion* $\chi_L\colon A^* \rightarrow \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ von $L \subseteq A^*$, die für alle $x \in A^*$ gegeben ist durch $\chi_L(x) = \mathsf{T}$, falls $x \in L$, und $\chi_L(x) = \mathsf{F}$ sonst, berechenbar ist. Die Lösbarkeit des Wortproblems von $L \subseteq A^*$ entspricht der Berechenbarkeit der zugehörigen charakteristischen Funktion.

Als Beispiel betrachte die Menge aller Palindrome aus A^*. Das Wortproblem ist in diesem Fall gerade die Frage, ob ein gegebenes Wort ein Palindrom ist oder nicht. Dass dieser Test berechenbar ist und damit das Wortproblem lösbar, wurde in einer Aufgabe des letzten Semesters gezeigt.

1.2.2 Entscheidungsprobleme als Wortprobleme

Aber man kann sich der Situation auch umgekehrt nähern, indem man von Entscheidungsproblemen ausgeht. Ein *Entscheidungsproblem* für einen Datenbereich D (wie beispielsweise A^*, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ oder deren kartesische Produkte) ist durch eine totale Funktion $f\colon D \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ beschrieben. Es ist *lösbar*, wenn f berechenbar ist. Die Funktion f kann als charakteristische Funktion der Menge aller Eingaben, die T liefern, aufgefasst werden. Die Berechnung von $f(x)$ für $x \in D$ entspricht also gerade der Frage, ob $x \in f^{-1}(\mathsf{T})$ oder $x \notin f^{-1}(\mathsf{T})$ gilt. Falls $D = A^*$, ist das das Wortproblem von $f^{-1}(\mathsf{T})$.

Aber auch wenn die Daten in D durch Wörter repräsentiert sind, d.h. $D \subseteq A^*$ für ein geeignetes Alphabet A, kann f dadurch berechnet werden, dass man das Wortproblem für $f^{-1}(\mathsf{T})$ löst. Denn es gilt für alle $x \in A^*$:

(i) $f(x) = \mathsf{T}$, falls $x \in f^{-1}(\mathsf{T})$, und
(ii) $f(x) = \mathsf{F}$, falls $x \in D$, aber $x \notin f^{-1}(\mathsf{T})$.

Offensichtlich muss im Falle des negativen Ergebnisses auch das Wortproblem von D lösbar sein.

Ein Beispiel dieser Art ist ein Primzahltest $prim\colon \mathbb{N} \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ mit $prim(n) = \mathsf{T}$, falls n eine Primzahl ist, und $prim(n) = \mathsf{F}$ sonst. Für die natürlichen Zahlen in Dezimaldarstellung gilt $\mathbb{N} \subseteq \{0, \ldots, 9\}^*$. Ob eine Ziffernfolge eine Zahldarstellung ist, lässt sich leicht ermitteln, denn jede Zahl größer 0 hat keine führenden Nullen. Deshalb liefert die Lösung des Wortproblems für die Menge aller Primzahlen einen Primzahltest und umgekehrt.

1.2.3 Berechenbare Funktionen und das Wortproblem

Ähnliches gilt auch für beliebige berechenbare Funktionen $g\colon X \to Y$. Wenn $X \subseteq A^*$ gilt, dann ist für jedes $y \in Y$ die Menge der Urbilder $g^{-1}(y) \subseteq X \subseteq A^*$ eine formale Sprache. Und die Frage, ob g für eine Eingabe $x \in X$ den Wert y liefert, wird gerade durch die Lösung des Wortproblems von $g^{-1}(y)$ beantwortet.

Ein Beispiel ist die modulo-Funktion $\bmod k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für $k > 0$, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ $n \bmod k$ als Wert liefert. Statt für n den Rest beim Teilen durch k zu berechnen, kann man auch nachsehen, in welcher Restklasse $[i] = \{m \in \mathbb{N} \mid m \bmod k = i\}$ für $i = 0, \ldots, k-1$ die Zahl n liegt.

1.2.4 Wortproblem selten lösbar

Wenn das unterliegende Alphabet A nicht leer ist, gibt es unendlich viele Wörter, so dass nach einer bekannten Überlegung aus der Mathematik die Menge aller Teilmengen von A^* überabzählbar unendlich ist. Da es aber nur abzählbar viele Algorithmen gibt, müssen die Wortprobleme der meisten Sprachen unlösbar sein (vgl. Abschnitt 7.3 des Skripts *Theoretische Informatik 1* [Kre00] mit der analogen Argumentation zu berechenbaren Funktionen). Aber obwohl die Lösbarkeit des Wortproblems grundsätzlich in den seltensten Fällen gegeben ist, sind doch die meisten Sprachen, denen man üblicherweise begegnet, ziemlich gutartig. So haben alle Sprachen, die in diesem Abschnitt vorkommen (die Menge der Primzahlen, die Menge der Palindrome, die Menge der durch k mit Rest i teilbaren Zahlen), ein lösbares Wortproblem. Es ist sogar relativ schwierig, Sprachen zu konstruieren, deren Wortproblem nicht lösbar ist (siehe ein derartiges Beispiel in [HU69, Abschnitt 8.3] oder auch Abschnitt 3.4 in diesem Skript). Dem Wortproblem wird dennoch in den nächsten Abschnitten viel Aufmerksamkeit gewidmet, weil man nicht nur an Lösbarkeit interessiert ist, sondern auch an praktisch benutzbaren Lösungen. So muss ein Algorithmus, der in einen Compiler eingebaut werden soll, insbesondere auch schnell sein.

2 Chomsky-Grammatiken

Lässt man bei den kontextfreien Regeln, wie sie meist bei der syntaktischen Beschreibung von Programmiersprachen verwendet werden, auf der linken Seite auch beliebige Zeichenketten zu, erhält man Produktionen (Regeln) von Chomsky-Grammatiken (nach dem amerikanischen Sprachwissenschaftler Noam Chomsky, geb. 1928, einem Pionier der Theorie der formalen Sprachen).

2.1 Grammatik allgemein

Eine Chomsky-Grammatik besteht aus endlich vielen Produktionen der Form $u ::= v$ für $u, v \in A^*$, wobei A ein Alphabet ist, aus einem Startsymbol $S \in A$ und einem terminalen Alphabet $T \subseteq A$. Meist wird noch verlangt, dass $S \in A \setminus T$ ist und in den linken Seiten von Produktionen Zeichen vorkommen, die nicht terminal sind. Die Differenzmenge $A \setminus T$ wird nichtterminales Alphabet genannt und mit N bezeichnet. Es ist manchmal auch bequemer, mit einem Startwort statt mit einem Startsymbol zu beginnen.

1. Für ein gegebenes Alphabet A ist eine *Produktion* (*Regel*) ein Paar $p = (u, v) \in A^* \times A^*$, das meist als $u ::= v$ geschrieben wird. Die Zeichenkette u wird *linke Seite*, v *rechte Seite* von p genannt.

   Zur Abkürzung können mehrere Produktionen $u ::= v_1, \ldots, u ::= v_k$ $(k \geq 2)$ mit derselben linken Seite zu $u ::= v_1 \mid \cdots \mid v_k$ zusammengefasst werden.
2. Eine *Chomsky-Grammatik* ist ein System $G = (N, T, P, S)$, wobei N eine Menge *nichtterminaler Zeichen*, T eine Menge *terminaler Zeichen*, P eine endliche Menge von Produktionen und $S \in N$ ein *Startsymbol* ist.

Soweit nichts anderes gesagt wird, nimmt man an, dass kein nichtterminales Zeichen gleichzeitig terminal ist, d.h. $N \cap T = \emptyset$, dass alle in Produktionen vorkommenden Zeichen terminal oder nichtterminal sind, d.h. $p \in (N \cup T)^* \times (N \cup T)^*$ für alle $p \in P$, und dass in jeder linken Seite mindestens ein nichtterminales Zeichen vorkommt, d.h. $u \in (N \cup T)^* N (N \cup T)^*$ für jede Produktion $u ::= v \in P$. In einzelnen Fällen wird die Forderung eines Startsymbols durch ein Startwort $S \in (N \cup T)^*$ ersetzt.

Produktionen werden auf Zeichenketten analog zum kontextfreien Fall angewendet. Man sucht in einer Zeichenkette eine Teilkette, die die linke Seite einer Produktion ist, und ersetzt sie durch die rechte Seite.

3. Seien $w, w', x, y, u, v \in A^*$. Dann wird w' aus w *direkt* durch Anwendung der Produktion $p = (u ::= v)$ *abgeleitet*, falls $w = xuy$ und $w' = xvy$. In diesem Falle wird $w \underset{p}{\longrightarrow} w'$ geschrieben.

   Die Anwendung einer Produktion wird *direkte Ableitung* genannt. Ist P eine Menge von Produktionen und $p \in P$, so kann man statt $w \underset{p}{\longrightarrow} w'$ auch $w \underset{P}{\longrightarrow} w'$ schreiben.

4. Die Iteration direkter Ableitungen ergibt das Konzept der *Ableitung*:

$$w_0 \underset{p_1}{\longrightarrow} w_1 \underset{p_2}{\longrightarrow} \cdots \underset{p_n}{\longrightarrow} w_n$$

   für $w_0, \ldots, w_n \in A^*$ und Produktionen $p_1, \ldots, p_n$ $(n \geq 1)$. Stammen alle angewendeten Produktionen aus P, so kann man die obige Ableitung auch schreiben als $w_0 \underset{P}{\longrightarrow} \cdots \underset{P}{\longrightarrow} w_n$ oder $w_0 \overset{n}{\underset{P}{\longrightarrow}} w_n$. Für manche Zwecke ist es sinnvoll, auch *Nullableitungen* zuzulassen: $w \overset{0}{\underset{P}{\longrightarrow}} w$ für alle $w \in A^*$. Statt $w \overset{n}{\underset{P}{\longrightarrow}} w'$ für $n \in \mathbb{N}$ darf auch $w \overset{*}{\underset{P}{\longrightarrow}} w'$ geschrieben werden. Außerdem kann man bei Ableitungen und direkten Ableitungen das Subskript P weglassen, wenn die Produktionsmenge aus dem Kontext klar ist.

Der Ableitungsprozess bildet die operationelle Semantik, die durch eine Produktionsmenge syntaktisch beschrieben ist. Betrachtet man diejenigen Zeichenketten, die aus dem Startsymbol einer Chomsky-Grammatik $G = (N, T, P, S)$ ableitbar sind und nur aus terminalen Zeichen bestehen, so erhält man auf der Basis des Ableitungsprozesses eine erzeugte Sprache.

5. Sei $G = (N, T, P, S)$ eine Chomsky-Grammatik. Dann enthält die von G *erzeugte Sprache* alle mit Produktionen in P aus dem Startsymbol S ableitbaren terminalen Zeichenketten:

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \overset{*}{\underset{P}{\longrightarrow}} w\}.$$

Auf diese Weise stellen Chomsky-Grammatiken ein syntaktisches Instrument dar, um formale Sprachen zu spezifizieren. Ausführliche Darstellungen von Chomsky-Grammatiken findet man in praktisch jedem Buch über formale Sprachen (siehe z.B. Hopcroft und Ullman [HU69] mit der deutschen Übersetzung [HU90], Moll, Arbib und Kfoury [MAK88]

und Salomaa [Sal73]). Die Verbindung von formalen Sprachen und der syntaktischen Behandlung von Programmiersprachen wird umfassend in Aho und Ullman [AU72] abgehandelt.

2.2 Beispiele

1. Mit der Produktion $S ::= aS$ lässt sich das Zeichen a hochzählen:

$$S \to aS \to a^2S \to \cdots \to a^nS.$$

Entsprechend kann man mit $S ::= a^kS$ ($k \in \mathbb{N}$) ein Vielfaches von k hochzählen. Terminieren lässt sich dieser Vorgang mit $S ::= \lambda$, so dass

$$L((\{S\}, \{a\}, \{S ::= a^kS \mid \lambda\}, S)) = \{a^{n \cdot k} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

2. Fast genauso einfach ist es, zwei Größen gleichzeitig hochzuzählen:

$$L((\{S\}, \{a, b\}, \{S ::= aSb \mid \lambda\}, S)) = \{a^nb^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

3. Auch das getrennte Zählen zweier (bzw. mehrerer) Größen ist kein Problem. Sei $T_l = \{a_1, \ldots, a_l\}$ ($l \geq 1$), $N_l = \{S\} \cup \{A_1, \ldots, A_l\}$ und $P_l = \{S ::= A_1 \cdots A_l\} \cup \{A_i ::= a_iA_i \mid i = 1, \ldots, l\} \cup \{A_i ::= \lambda \mid i = 1, \ldots, l\}$.
Dann gilt:

$$L((N_l, T_l, P_l, S)) = \{a_1^{n_1} \cdots a_l^{n_l} \mid n_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, l\}.$$

4. Etwas schwieriger wird es, die zahlenmäßige Ausgewogenheit zweier Größen zu garantieren, wenn die Reihenfolge nicht mehr wie in Punkt 2 fixiert ist.
Die Grammatik $G_{equilibrium} = (\{A, B, S\}, \{a, b\}, P_{equilibrium}, S)$, wobei die Regelmenge die Regeln

$$S ::= ASB,\ \ S ::= \lambda,\ \ AB ::= BA,\ \ A ::= a,\ \ B ::= b$$

enthält, erzeugt als Sprache die Menge aller Wörter, in denen nur die Zeichen a und b vorkommen und das gleich oft. Ableitungen (d.h. wiederholte Regelanwendungen) sehen z.B. so aus:

$$S \underset{(1)}{\longrightarrow} ASB \underset{(1)}{\longrightarrow} A^2SB^2 \underset{(2)}{\longrightarrow} A^2B^2 \underset{(3)}{\longrightarrow} ABAB \underset{(3)}{\longrightarrow} ABBA \underset{(4),(5)}{\longrightarrow} \cdots \underset{(4),(5)}{\longrightarrow} abba.$$

Dabei verweisen die Nummern auf die Produktionen, die von links nach rechts gezählt sind.

5. Noch schwieriger wird es, wenn man drei Größen gleichzeitig nach Art des Punktes 2 kontrollieren möchte. Es ist zwar leicht zu sehen, dass mit den Produktionen der Form $ab^nc ::= a^2b^{n+1}c^2$ für $n \geq 1$ aus der Zeichenkette abc alle Zeichenketten der Form $a^nb^nc^n$ abgeleitet werden können; aber das sind unendlich viele Regeln. Um dasselbe mit endlich vielen Regeln zu erreichen, bedarf es der bisher kompliziertesten Grammatik im nächsten Punkt. Oder geht es einfacher?

6. Folgende Produktionen erlauben, die Sprache $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ zu erzeugen, wenn man mit S startet und $\{a, b, c\}$ als terminales Alphabet wählt:

$$\begin{array}{rr} (1) & S ::= aAYZ \\ (2)\&(3) & A ::= aAY \mid X \\ (4) & Y ::= BC \\ (5) & CB ::= BC \\ (6)\&(7) & XB ::= bX \mid b \\ (8)\&(9) & CZ ::= Zc \mid c \end{array}$$

Mit (1) bis (4) erhält man $S \xrightarrow{*} a^n X (BC)^n Z$.

Mit (5) wird daraus: $a^n X B^n C^n Z$.

Mit (6) bis (8) erhält man: $a^n b^n c^n$.

Der Nachweis, dass man nichts anderes Terminales ableiten kann, erfordert diverse Fallunterscheidungen, die hier nicht im einzelnen durchgeführt werden sollen.

3 Immerhin aufzählbar

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen Chomsky-Grammatiken und dem Konzept der Aufzählbarkeit (vgl. [Kre00, Abschnitt 7.3]) beschrieben. Der Ableitungsprozess zusammen mit einem Terminalitätstest für Zeichenketten zählt die erzeugte Sprache einer Chomsky-Grammatik auf (3.1), deren Wortproblem sich damit auch als "halb" lösbar erweist (3.2). Es wird außerdem plausibel gemacht, dass effektiv aufzählbare Mengen von Zeichenketten von Chomsky-Grammatiken erzeugt werden (3.3), allerdings ist das Wortproblem nicht immer "ganz" lösbar (3.4). In Abschnitt 3.5 schließlich wird auf Zusammenhänge zwischen dem hier angegebenen Aufzählungsverfahren und anderen bekannten Algorithmen hingewiesen.

3.1 Aufzählbarkeit erzeugter Sprachen

Für eine beliebige Chomsky-Grammatik $G = (N, T, P, S)$ bildet der Ableitungsmechanismus einen algorithmischen Prozess, den man mit beliebigen Zeichenketten beginnen und beliebig lange laufen lassen kann. Startet man zum Beispiel mit S und erlaubt bis zu k Ableitungsschritte, führt aber alle möglichen Alternativen bei Regelanwendungen aus, so erhält man die Menge $S(G)_k$ aller aus S in bis zu k Schritten ableitbaren Wörter; d.h.

$$S(G)_k = \{w \mid S \xrightarrow[P]{l} w,\ l \leq k\}.$$

Es gilt offenbar $S(G)_k \subseteq S(G)_m$ für $k \leq m$. Es gilt genauer: $S(G)_0 = \{S\}$ und $S(G)_{k+1} = S(G)_k \cup \{w \mid v \xrightarrow[P]{} w,\ v \in S(G)_k\}$. Denn nach Definition von Ableitungen kann man aus S in 0 Schritten nur S ableiten, und eine Ableitung mit höchstens $k+1$ Schritten hat sogar

höchstens k Schritte oder setzt sich aus k Schritten gefolgt von einer weiteren direkten Ableitung zusammen.

Insbesondere erweisen sich die Mengen $S(G)_k$ für $k \in \mathbb{N}$ als endlich. Denn $S(G)_0$ ist einelementig, und wenn nach Induktionsvoraussetzung $S(G)_k$ endlich ist, so muss es auch $S(G)_{k+1}$ sein. Letzteres ergibt sich daraus, dass die endlich vielen Wörter in $S(G)_k$ nur endlich viele Teilwörter besitzen, also auch höchstens endlich viele linke Regelseiten, die durch höchstens endlich viele rechte Regelseiten ersetzt werden können, da die Regelmenge endlich ist.

Darüber hinaus ist $S(G)_{k+1}$ aus $S(G)_k$ effektiv, d.h. algorithmisch herstellbar, da Suchen und Ersetzen von Teilwörtern algorithmisch machbar sind.

Bezeichnet man die Menge aller aus S ableitbaren Zeichenketten mit $S(G)$, so gilt offenbar:

$$S(G) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S(G)_k,$$

denn jedes ableitbare Wort ist in einer bestimmten Schrittzahl ableitbar. Die Elemente von $S(G)$ nennt man *Satzformen* von G. Besteht eine Satzform nur aus terminalen Zeichen, so gehört sie zur erzeugten Sprache, d.h.

$$L(G) = S(G) \cap T^*.$$

Bildet man also die Mengen $S(G)_k$ für wachsende k, beginnend mit $S(G)_0$, und filtert die terminalen Wörter heraus, so erhält man einen algorithmischen Vorgang, bei dem nach und nach jedes Wort aus $L(G)$ entsteht. Dieses Verfahren ist in Abbildung 2 dargestellt.

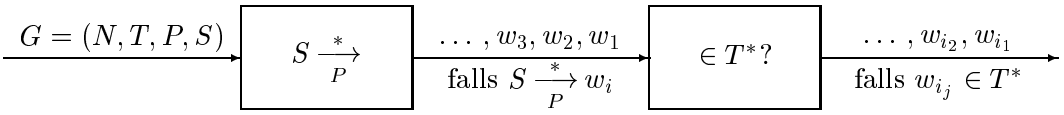


Abbildung 2: Aufzählung der von einer Grammatik erzeugten Sprache

Mit anderen Worten erweist sich die von der Chomsky-Grammatik G erzeugte Sprache als effektiv oder – wie man auch sagt – *rekursiv aufzählbar*.

3.2 Die halbe Miete

Will man von einer Zeichenkette wissen, ob sie zu einer erzeugten Sprache gehört oder nicht, so kann man den Aufzählungsprozess starten. Erscheint dabei irgendwann die fragliche Zeichenkette, liegt sie in der gegebenen Sprache. Der positive Fall des Wortproblems ist damit gelöst. Über den negativen Fall erfährt man auf diese Weise jedoch nichts, wenn der Aufzählungsprozess nicht anhält, was gerade bei unendlichen Sprachen passiert. Denn ist eine Zeichenkette zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht aufgezählt, kann das noch später oder gar nicht geschehen. Das Wortproblem ist so nur "halb" gelöst, was man auch *semi-entscheidbar* nennt.

3.3 Erzeugbarkeit aufzählbarer Sprachen

Dass auch die Umkehrung gilt, dass also jede rekursiv aufzählbare Menge von Zeichenketten von einer Chomsky-Grammatik erzeugt werden kann, soll nicht bewiesen werden, da das zu viel Zeit und Mühe erforderte. Man kann sich aber die Richtigkeit dieser Behauptung mit den bisherigen Erkenntnissen der theoretischen Informatik recht gut plausibel machen.

Eine Menge von Zeichenketten ist rekursiv aufzählbar, falls es einen Algorithmus gibt, der die Elemente der Menge nach und nach "aufzählt". Nach der Churchschen These ist alles Algorithmische auch mit einer Turingmaschine machbar. Die Arbeitsweise einer Turingmaschine jedoch kann von einer Chomsky-Grammatik simuliert werden. Denn Konfigurationen sind bereits Zeichenketten, die den aktuellen Bandinhalt, den aktuellen Zustand und die Position des Lese/Schreibkopfes repräsentieren. Die Zustandsüberführung lässt sich auch durch Produktionen ausdrücken. Es ist dann nicht mehr allzu schwierig, die Grammatik erzeugen zu lassen, was die Turingmaschine aufzählt. Details zu der Verbindung zwischen Turingmaschinen und Chomsky-Grammatiken finden sich in vielen Büchern über formale Sprachen.

3.4 Unlösbarkeit des Wortproblems

In ihrer allgemeinen Form sind Chomsky-Grammatiken allerdings nur bedingt für die Definition der Syntax von Programmiersprachen geeignet, weil nicht zu jeder definierbaren Syntax auch eine Syntaxanalyse möglich ist. Auch das soll nicht formal bewiesen, sondern nur plausibel gemacht werden.

Betrachte etwa folgenden Algorithmus: Generiere nach und nach alle PASCALchen-Programme und alle ihre initialen Berechnungszustände; interpretiere jedes dieser Programme für jeden dieser Berechnungszustände; terminiert die Berechnung, gilt das Paar aus Programm und initialem Berechnungszustand als aufgezählt. Die so entstehende Menge ist also rekursiv aufzählbar und lässt sich nach der vorangegangenen Überlegung von einer Chomsky-Grammatik erzeugen. Das zugehörige Wortproblem kann aber nicht lösbar sein, weil es sonst das Halteproblem löste, was bekanntlich unmöglich ist.

3.5 Ausschöpfende Suche in die Breite mit roher Gewalt

Das der Aufzählung der erzeugten Sprache in Punkt 1 zugrundeliegende Verfahren, das in Abbildung 3 skizziert ist, lässt sich bei vielen Arten regelbasierter Systeme anwenden: Man beginnt mit einem Anfangszustand oder einem Eingabezustand, wendet wiederholt auf alle entstehenden Zwischenzustände alle möglichen Regeln an, wie und wo immer es geht, und filtert dann nach einem bestimmten Kriterium Ausgabe- oder Endzustände aus den erreichten und produzierten Zwischenzuständen heraus. Die Vorwärtsinterpretation von CE-S-Spezifikationen, die Berechnung von PASCALchen-Programmen und die Turingmaschinen funktionieren nach diesem Prinzip. Man mache sich in diesen drei Fällen klar, was die Systemzustände, was die Regeln sind und nach welchem Kriterium ausgefiltert wird.

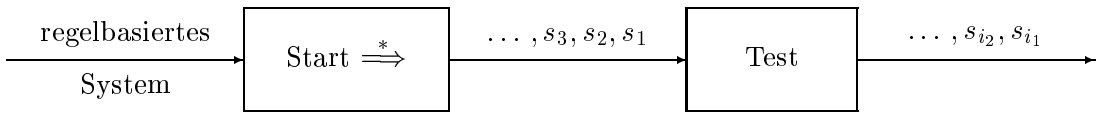


Abbildung 3: Allgemeine Funktionsweise regelbasierter Systeme

Im Zusammenhang mit regelbasierten Systemen der Künstlichen Intelligenz und mit Expertensystemen sowie in der Logistik wird das Verfahren oft *ausschöpfende Suche* genannt. In der Algorithmen- und Komplexitätstheorie ist das Verfahren ebenfalls bekannt und wird dort häufig als "rohe Gewalt" (brute force) eingesetzt, weil einfach alles durchprobiert wird. Zählt man alle Möglichkeiten nach der Systematik in Abschnitt 3.1 auf, d.h. nach wachsender Ableitungslänge bzw. wachsender Zahl von Regelanwendungen, so spricht man häufig auch von *Breitensuche* (*breadth first search*).

4 Lösbarkeit des Wortproblems für monotone Grammatiken

Nach den Überlegungen des vorigen Kapitels kann die Lösbarkeit des Wortproblems nicht für alle Chomsky-Grammatiken garantiert werden, sondern höchstens für geeignete Spezialfälle. Außerdem hat sich gezeigt, dass die halbe Lösung, die durch den Aufzählungsprozess gegeben ist, deshalb nicht zu einer ganzen gemacht werden kann, weil man nicht weiß, wann der Prozess als erfolglos abgebrochen werden darf.

Die Situation ändert sich, wenn man monotone Grammatiken betrachtet, in deren Produktionen keine rechte Seite kürzer als die linke Seite ist. Dann können Wörter während des Ableitens auch nicht kürzer werden. Will man in einem solchen Fall von einer Zeichenkette wissen, ob sie zur erzeugten Sprache gehört oder nicht, kann man beim Aufzählungsprozess auf längere Zeichenketten verzichten. Die Zahl der Zeichenketten bis zu einer bestimmten Länge ist aber endlich, so dass jede Aufzählung solcher Zeichenketten nach endlich vielen Schritten abbrechen muss. Das ist der Schlüssel zur Lösung des Wortproblems für monotone Grammatiken. Allerdings ist der angegebene Algorithmus exponentiell, und ein polynomieller ist nicht bekannt, so dass auch monotone Grammatiken für praktische Anwendungen nicht geeignet sind, wenn die Lösbarkeit des Wortproblems wichtig ist.

4.1 Monotone Grammatiken

Eine Chomsky-Grammatik $G = (N, T, P, S)$ wird *monoton* genannt, wenn für jede Produktion $u ::= v \in P$ $|u| \leq |v|$ gilt.[1]

Für einen Ableitungsschritt $w = xuy \underset{u ::= v}{\longrightarrow} xvy = w'$ gilt dann offenbar:

$$|w| = |x| + |u| + |y| \leq |x| + |v| + |y| = |w'|,$$

[1] Für ein Wort v bezeichnet $|v|$ die Länge.

so dass durch einfache Induktion über die Länge von Ableitungen auch folgt:

$$|w| \leq |w'| \text{ für } w \xrightarrow[P]{*} w'.$$

Wenn man ein bestimmtes Wort der Länge n aus dem Startsymbol S ableiten will, treten zwischendurch also niemals längere Wörter auf. Wörter bis zur Länge n gibt es aber nur endlich viele, deren Zahl mit K_n bezeichnet wird. Denn es gilt für ein Alphabet A mit k Elementen:[2]

$$\#\{w \in A^* \mid |w| \leq n\} = 1 + k + k^2 + \ldots + k^n = \sum_{i=0}^{n} k^i = K_n < \infty.$$

4.2 Lösung des Wortproblems für monotone Grammatiken

Theorem 1
Für jede monotone Grammatik $G = (N, T, P, S)$ ist das Wortproblem lösbar.

Beweis.
Sei $w_0 \in T^*$ mit $|w_0| = n$. Ohne Einschränkung kann man $n \geq 1$ annehmen, weil das leere Wort niemals von einer monotonen Grammatik erzeugt wird. Für jedes $m \geq 0$ sei S_m die Menge aller in höchstens m Schritten aus S ableitbaren Wörter, deren Länge n nicht überschreitet; d.h.

$$S_m = \{w \in (N \cup T)^* \mid S \xrightarrow[P]{k} w,\ k \leq m,\ |w| \leq n\}.$$

Offenbar gilt $S_0 = \{S\}$, und S_{m+1} lässt sich folgendermaßen aus S_m konstruieren:

$$S_{m+1} = S_m \cup \{w \in (N \cup T)^* \mid v \xrightarrow[P]{} w,\ v \in S_m,\ |w| \leq n\}. \qquad (*)$$

Damit ist nach Definition $S_m \subseteq S_{m+1}$, und wenn $S_m = S_{m+1}$ gilt, so folgt

$$S_m = S_{m+1} = S_{m+2} = \ldots.$$

Da G nur endlich viele Produktionen hat, lässt sich leicht ein Algorithmus angeben, der ausgehend von $S_0 = \{S\}$ unter Verwendung von $(*)$ die Mengen S_m rekursiv konstruiert.

Es soll nun gezeigt werden, dass nach endlich vielen Schritten $S_m = S_{m+1}$ gilt.

Damit wäre unser Wortproblem entschieden, denn es gilt: $S \xrightarrow[P]{*} w_0$ gdw. $w_0 \in S_m$. Denn $S \xrightarrow[P]{*} w_0$ impliziert $w_0 \in S_k$, wobei k die Länge der Ableitungskette ist. Für $k \leq m$ gilt aber $S_k \subseteq S_m$ und für $k > m$ gilt $S_m = S_k$ nach Voraussetzung, also $w_0 \in S_m$. Die Umkehrung ist offenbar.

Es bleibt also die Existenz eines m mit $S_m = S_{m+1}$ zu zeigen. Nun gilt aber für alle $k \geq 0$ und alle $w \in S_k$, dass $|w| \leq n$ und damit

$$\#S_k \leq \{w \in (N \cup T)^* \mid |w| \leq n\} = K_n < \infty.$$

Wegen $S_k \subseteq S_{k+1}$ muss also nach spätestens $m = K_n$ Schritten $S_{m+1} = S_m$ gelten. □

[2] Für eine endliche Menge X bezeichnet $\#X$ die Zahl der Elemente.

4.3 So ein Aufwand

Der Algorithmus, der das Wortproblem für monotone Grammatiken löst, sammelt – beginnend mit dem Startsymbol – alle Wörter bis zu einer vorgegebenen Länge auf, die sich mit wachsender Schrittzahl ableiten lassen, bis keine neuen Wörter mehr hinzukommen. Die resultierende Menge S_m kann im schlechtesten Fall K_n Elemente enthalten, also exponentiell viele, falls das Alphabet mindestens zwei Elemente enthält. Deshalb ist der Algorithmus im schlechtesten Fall, der aber oft eintrifft, exponentiell und damit für praktische Zwecke unbrauchbar.

Es ist jedoch noch ungeklärt, ob es nicht eine polynomielle Lösung des Wortproblems monotoner Grammatiken gibt. Dies wird allerdings von Fachleuten für unwahrscheinlich gehalten.

Wenn man die jeweils nächste erfolgversprechende Regelanwendung richtig raten könnte, müsste man sich zwischendurch nur das bisher abgeleitete Wort merken, dessen Länge durch die Länge der Eingabe beschränkt ist. Probleme, die sich so lösen lassen, gehören zur Klasse NP-SPACE, wobei das "N" für *nichtdeterministisch* steht (und auf das Raten verweist) und "P-SPACE" auf den polynomiellen Platzbedarf verweist. Man weiß, dass die Klassen NP-SPACE und P-SPACE übereinstimmen, weil man den Nichtdeterminismus immer z.B. durch Backtracking beseitigen kann. Das Interessante an diesen Problemklassen ist, dass sie zu den größten bekannten gehören, die noch polynomiell lösbar sein könnten.

5 Die Chomsky-Hierarchie

Wie in Abschnitt 3.4 diskutiert wurde, haben Chomsky-Grammatiken die ungünstige Eigenschaft, dass das Wortproblem für die erzeugten Sprachen im allgemeinen unentscheidbar ist. Grammatiken, die solche Sprachen erzeugen, sind z.B. für die Definition der Syntax von Programmiersprachen offenbar ungeeignet. Es stellt sich daher die Frage, ob man durch geeignete zusätzliche Bedingungen – insbesondere an die Form der Regeln – zu eingeschränkten Klassen von Chomsky-Grammatiken gelangen kann, die bessere Eigenschaften haben, aber trotzdem noch genügend Allgemeinheit besitzen. Dies führt zur sogenannten *Chomsky-Hierarchie*. Wie der Name andeutet, handelt es sich dabei um eine Hierarchie mehr oder weniger eingeschränkter Typen von Chomsky-Grammatiken. Praktisch der gesamte weitere Inhalt der Lehrveranstaltung *Theoretische Informatik 2* beschäftigt sich mit der Untersuchung dieser Grammatik-Typen bzw. mit den von ihnen definierten Sprachklassen.

Eine Chomsky-Grammatik $G = (N, T, P, S)$ ist

(1) *kontext-sensitiv*, falls alle Regeln in P die Form $u_1 A u_2 ::= u_1 v u_2$ haben, wobei $u_1, u_2, v \in (N \cup T)^*$, $v \neq \lambda$ und $A \in N$;

(2) *kontextfrei*, falls $u \in N$ für alle Regeln $u ::= v \in P$;

(3) *rechtslinear* (auch *regulär* genannt), falls für alle Regeln $u ::= v \in P$ gilt, dass $u \in N$ und entweder $v \in T^*$ oder $v = v'B$ mit $v' \in T^+$ und $B \in N$. (Hierbei bezeichnet T^+ die Menge $T^* \setminus \{\lambda\}$.)

Monotone und kontext-sensitive Grammatiken werden auch *Grammatiken vom Typ 1* genannt, kontextfreie werden als *Typ-2-* und rechtslineare als *Typ-3-Grammatiken* bezeichnet. Allgemeine Chomsky-Grammatiken werden Grammatiken vom *Typ 0* genannt. Eine Sprache L ist vom Typ i, wenn es eine Grammatik dieses Typs gibt, die L erzeugt.

Der folgende Satz rechtfertigt, warum diese Typeneinteilung nicht zwischen monotonen und kontext-sensitiven Grammatiken unterscheidet.

Theorem 2
Monotone und kontext-sensitive Grammatiken erzeugen dieselbe Klasse von Sprachen.

Aus der Definition von kontext-sensitiven Grammatiken folgt sofort, dass sie monoton sind. Umgekehrt lässt sich zeigen, dass zu jeder monotonen Grammatik eine kontext-sensitive konstruiert werden kann, die dieselbe Sprache erzeugt (in einem solchen Fall spricht man auch von einer *Normalform*-Grammatik). Wer genaueres wissen will, kann den Beweis z.B. in [EP00, Satz 8.1.1] nachlesen.

Die Berechtigung, von einer *Hierarchie* zu sprechen, liefert der nächste Satz.

Theorem 3
Sei $\mathcal{L}_i$ die Menge aller Sprachen des Typs i ($i \in \{0, \ldots, 3\}$). Dann gilt:

1. $\mathcal{L}_1 \subsetneqq \mathcal{L}_0$,
   d.h. Monotonie bzw. Kontext-Sensitivität ist eine echte Einschränkung.
2. $\{L \setminus \{\lambda\} \mid L \in \mathcal{L}_2\} \subsetneqq \mathcal{L}_1$,
   d.h. bis auf die bei monotonen Grammatiken offenbar nicht bestehende Möglichkeit, das leere Wort zu erzeugen, ist Kontextfreiheit eine echte Einschränkung gegenüber Kontext-Sensitivität.
3. $\mathcal{L}_3 \subsetneqq \mathcal{L}_2$,
   d.h. Rechtslinearität ist eine echte Einschränkung gegenüber Kontextfreiheit.

Aus der in Kapitel 4 behandelten Entscheidbarkeit des Wortproblems für Typ-1-Sprachen lässt sich die erste Aussage des obigen Satzes – $L_1 \subsetneqq L_0$ – als Folgerung ableiten. Zusammen mit der Unentscheidbarkeit des Wortproblems im allgemeinen Fall ergibt sich nämlich aus der Entscheidbarkeit für L_1 die Ungleichheit $L_1 \neq L_0$ (und $L_1 \subseteq L_0$ gilt ohnehin per Definition).

Der Nachweis, dass die beiden anderen Inklusionen echt sind, benötigt Werkzeuge, die erst später im Skript bereitgestellt werden.

6 Endliche Automaten

Unter einem endlichen Automaten hat man sich ein taktweise arbeitendes System vorzustellen, das sich in einem bestimmten Zustand (von endlich vielen verfügbaren Zuständen)

befindet und das dann innerhalb eines Taktes einen Buchstaben des Eingabewortes einliest, daraufhin seinen Zustand ändert und den Lesekopf auf den nächsten Eingabebuchstaben einstellt usw. Ein Eingabewort gilt dann als erkannt, wenn vom Anfangszustand aus nach Verarbeitung des Wortes ein Endzustand erreicht wird.

6.1 Definition endlicher Automaten

Die Veranschaulichung führt zu folgender Definition:

1. Ein *endlicher relationeller erkennender Automat* – kurz *endlicher Automat* – ist ein System $A = (Z, I, d, s_0, F)$, wobei
   - Z eine endliche Menge von *Zuständen* ist,
   - I ein endliches *Eingabealphabet*,
   - $F \subseteq Z$ eine Menge von *Endzuständen*,
   - $s_0 \in Z$ der *Anfangszustand* und
   - $d \subseteq Z \times I \times Z$ eine Relation ist, geschrieben $d\colon Z \times I \rightsquigarrow Z$, die *Zustandsüberführung* genannt wird und jedem Zustand und jeder Eingabe eine Menge von Folgezuständen zuordnet.
2. Die *Zustandsüberführung* d lässt sich rekursiv zu einer Relation $d^*\colon Z \times I^* \rightsquigarrow Z$ fortsetzen:

   (i) $d^*(s, \lambda) = \{s\}$ für alle $s \in Z$ und

   (ii) $d^*(s, wx) = \bigcup_{t \in d^*(s,w)} d(t, x)$ für alle $s \in Z$, $x \in I$, $w \in I^*$.
3. Die von einem endlichen Automaten A *erkannte Sprache* $L(A)$ ist dann definiert durch:
$$L(A) := \{w \in I^* \mid d^*(s_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$
4. Ein Automat $A = (Z, I, d, s_0, F)$ heißt *deterministisch*, wenn d eine Abbildung ist; d.h. für alle $s \in Z$ und $x \in I$ existiert genau ein $s' \in Z$ derart, dass (s, x) und s' bzgl. d in Relation stehen.

Bemerkungen

1. Für deterministische Automaten ist mit d auch d^* eine Abbildung. Deshalb können (i) und (ii) aus Punkt 2 in diesem Fall auch ausgedrückt werden durch:

   (i') $d^*(s, \lambda) = s$ und

   (ii') $d^*(s, wx) = d(d^*(s, w), x)$.

   Ferner ist die von deterministischen Automaten erkannte Sprache bestimmt durch:
$$L(A) = \{w \in I^* \mid d^*(s_0, w) \in F\}.$$

2. Jeder endliche Automat A besitzt eine graphische Darstellung in Form eines *Zustandsgraphen*. Dabei werden die Zustände zu Knoten, und von einem Zustand s zu einem Zustand s' wird eine mit $x \in I$ markierte Kante gezogen, falls $s' \in d(s, x)$. Falls es mehrere Zeichen $x_1, \ldots, x_k \in I$ gibt mit $s' \in d(s, x_i)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, so wird der Übersichtlichkeit halber nur eine Kante gezogen, an der dann $x_1, \ldots, x_k$ steht. Der Anfangszustand wird durch einen hineingehenden Pfeil, die Endzustände werden entsprechend durch herausgehende Pfeile gekennzeichnet.
3. Ist $R\colon A \rightsquigarrow B$ eine Relation (d.h. $R \subseteq A \times B$), dann wird statt $(a, b) \in R$ oft auch aRb geschrieben oder, wenn R eine Abbildung ist, $R(a) = b$. Ansonsten bezeichnet $R(a)$ die Menge aller Elemente, die bzgl. R zu a in Relation stehen: $R(a) = \{b \in B \mid aRb\}$.
4. Mit jeder Überführung des Zustandes eines deterministischen Automaten in den (eindeutigen) Nachfolgezustand wird ein Buchstabe des Eingabewortes abgearbeitet. Ist das Eingabewort vollständig durchlaufen, so bleibt der Automat stehen. Es sind also höchstens n Schritte erforderlich, um zu entscheiden, ob ein Eingabewort der Länge n zur erkannten Sprache gehört. Damit ist das Wortproblem für jede von einem deterministischen Automaten erkannte Sprache linear.

   Gilt das auch, wenn der erkennende Automat nichtdeterministisch ist?

Beispiel

In Abbildung 4 ist ein kleiner endlicher Automat dargestellt. Er erkennt gerade die Sprache der positiven ganzen Zahlen in Binärdarstellung ohne führende Nullen, d.h. die Menge $\{1w \mid w \in \{0,1\}^*\}$. Dieser Automat ist nichtdeterministisch; denn für die Zustandsüberführung d gilt: $d(s_0, 1) = \{s_0, s_1\}$ und $d(s_0, 0) = \emptyset$.

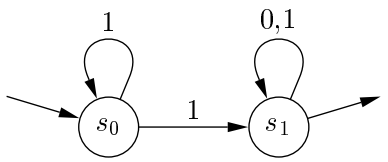


Abbildung 4: Graphische Darstellung eines endlichen Automaten

6.2 Der Potenzautomat

Offensichtlich ist Determinismus eine echte Einschränkung für endliche Automaten. Ist damit aber auch die Klasse der Sprachen, die von deterministischen Automaten erkannt werden, eine echte Teilmenge der von allgemeinen endlichen Automaten erkannten Sprachen? Das folgende Theorem verneint dies.

Theorem 4
Zu jedem endlichen Automaten A lässt sich effektiv ein deterministischer Automat $\mathcal{P}(A)$ konstruieren, der dieselbe Sprache erkennt; d.h.

$$L(A) = L(\mathcal{P}(A)).$$

Beweis.
Sei $A = (Z, I, d, s_0, F)$ ein endlicher Automat.

Daraus lässt sich der *Potenzautomat* konstruieren:

$$\mathcal{P}(A) = (\mathcal{P}(Z), I, D, \{s_0\}, F_{\mathcal{P}} := \{S \subseteq Z \mid S \cap F \neq \emptyset\}),$$

wobei $\mathcal{P}(Z)$ die Potenzmenge von Z ist und die Abbildung $D\colon \mathcal{P}(Z) \times I \to \mathcal{P}(Z)$ definiert ist durch $D(S, x) := \bigcup_{s \in S} d(s, x)$ für alle $S \in \mathcal{P}(Z)$ und $x \in I$.

Dann stehen die fortgesetzten Zustandsüberführungen d^* und D^* in der Beziehung

$$d^*(s, w) = D^*(\{s\}, w).$$

Denn für $w = \lambda$ gilt:

$$d^*(s, \lambda) = \{s\} = D^*(\{s\}, \lambda),$$

und für Wörter wx erhält man, vorausgesetzt, die Behauptung gilt bereits für w:

$$\begin{aligned} d^*(s, wx) &= \bigcup_{t \in d^*(s,w)} d(t, x) \\ &= \bigcup_{t \in D^*(\{s\},w)} d(t, x) \\ &= D(D^*(\{s\}, w), x) = D^*(\{s\}, wx). \end{aligned}$$

Für die Sprachen $L(A)$ und $L(\mathcal{P}(A))$ folgt somit:

$$\begin{aligned} w \in L(A) \quad &\text{gdw.} \quad d^*(s_0, w) \cap F \neq \emptyset \\ &\text{gdw.} \quad D^*(\{s_0\}, w)(= d^*(s_0, w)) \in F_{\mathcal{P}} \\ &\text{gdw.} \quad w \in L(\mathcal{P}(A)); \end{aligned}$$

$L(A)$ und $L(\mathcal{P}(A))$ sind also gleich. □

Mit Theorem 4 folgt sofort, dass das Wortproblem für jede von einem beliebigen endlichen Automaten erkannte Sprache linear lösbar ist.

Beispiel

Der Potenzautomat zu dem endlichen Automaten aus Abbildung 4 ist in Abbildung 5 dargestellt. Zum Beispiel ist $D(\{s_0, s_1\}, 0) = d(s_0, 0) \cup d(s_1, 0) = \emptyset \cup \{s_1\} = \{s_1\}$ sowie $D(\{s_0, s_1\}, 1) = d(s_0, 1) \cup d(s_1, 1) = \{s_0, s_1\} \cup \{s_1\} = \{s_0, s_1\}$ und immer $D(\emptyset, x) = \emptyset$.

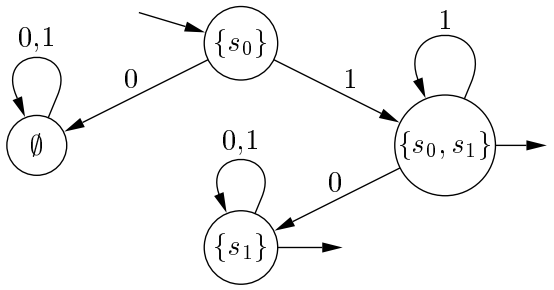


Abbildung 5: Der Potenzautomat zu dem endlichen Automaten aus Abbildung 4

6.3 Pumping-Lemma für erkannte Sprachen

Man kann einen endlichen Automaten als eine sehr eingeschränkte Turingmaschine (vgl. Kapitel 9 im Skript [Kre00]) auffassen, die in jedem Schritt ein Zeichen liest und den Kopf nach rechts bewegt; sobald das Eingabewort ganz abgearbeitet ist, hält die Maschine. Wieder stellt sich die Frage, ob eine solche Einschränkung eine Auswirkung auf die Klasse der erkannten Sprachen hat. Um eine Antwort zu finden, soll zunächst eine Eigenschaft aller von endlichen Automaten erkannten Sprachen bewiesen werden. Wenn es eine Sprache gibt, die diese Eigenschaft *nicht* hat, so gibt es demnach keinen endlichen Automaten, der sie erkennt.

Theorem 5 (Erstes Pumping-Lemma)
Sei L eine von einem endlichen Automaten erkannte Sprache.

Dann existiert eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ derart, dass jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq p$ zerlegt werden kann in drei Teilwörter $w = xyz$ mit $p \geq |y| > 0$ und dass $xy^iz \in L$ ist für alle $i \geq 0$.

Beweis.
Nach Voraussetzung existiert ein Automat $A = (Z, I, d, s_0, F)$, der L erkennt. Wähle dann p als Anzahl der Zustände von A ($p = \#Z$). Gibt man nun ein Wort $w = x_1 \cdots x_n \in L$ ($x_i \in I$) mit $n \geq p$ in A ein, so erhält man durch buchstabenweises Abarbeiten eine Folge $s_0 \cdots s_n$ von Zuständen mit der Eigenschaft

$$s_i \in d(s_{i-1}, x_i) \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Wegen $n \geq p$ gibt es unter den $n + 1$ Zuständen $s_0, \ldots, s_n$ zwei gleiche, etwa $s_j = s_k$ mit $0 \leq j < k \leq n$. Das liefert die gewünschte Zerlegung von w, denn mit $x = x_1 \cdots x_j$ kommt man von s_0 nach s_j, mit $y = x_{j+1} \cdots x_k$ von s_j nach $s_k = s_j$, was man dann aber auch immer wiederholen oder auslassen kann, und von s_k gelangt man mit $z = x_{k+1} \cdots x_n$ nach $s_n \in F$. Insgesamt erreicht man also mit den Wörtern xy^iz für $i \geq 0$ von s_0 den Endzustand s_n. Das aber bedeutet gerade $xy^iz \in L$, wie behauptet.

Wie müssen j und k gewählt werden, damit $|y| \leq p$ ist? □

Beispiel: Anwendung des Pumping-Lemmas

1. Das Pumping-Lemma kann benutzt werden, um zu zeigen, dass eine Sprache von keinem endlichen Automaten erkannt wird.

   Betrachte die Sprache $L_{balance} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Angenommen, sie wird von einem endlichen Automaten erkannt. Sei dann $p \in \mathbb{N}$ die Konstante aus dem Pumping-Lemma, und wähle $w = a^p b^p \in L_{balance}$. Nach dem Pumping-Lemma kann w in drei Teilwörter $w = xyz$ mit $y \neq \lambda$ zerlegt werden, so dass $xy^iz \in L_{balance}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Es gibt drei Fälle, wie y in w liegen kann:

   (i) y liegt in der ersten Hälfte von w, d.h. $y = a^k$ für ein $k > 0$.
   Dies kann nicht sein, denn $xy^0z = xz = a^{p-k}b^p \notin L_{balance}$ für $k \neq 0$.

   (ii) y liegt in der Mitte von w, d.h. $y = a^k b^l$ für $k, l > 0$.
   Auch das ist nicht möglich, denn $xy^2z = a^p b^l a^k b^p \notin L_{balance}$ für $k \neq 0 \neq l$.

   (iii) y liegt in der zweiten Hälfte von w, d.h. $y = b^k$ für ein $k > 0$.
   Dies ist analog zu Fall (i) ausgeschlossen.

   Also gibt es keine Zerlegung von w mit den geforderten Eigenschaften, was bedeutet, dass die Annahme falsch gewesen sein muss.

2. Man kann das Pumping-Lemma *nicht* verwenden, um zu zeigen, dass es für eine gegebene Sprache einen erkennenden Automaten gibt.

   Betrachte die Sprache $L' = \{w \in \{a,b\}^* \mid count_a(w) = count_b(w)\}$. In jedem nichtleeren Wort $w \in L'$ gibt es eine Stelle, in der ein a auf ein b trifft. Demnach gibt es eine Zerlegung $w = xyz$ mit $y = ab$ oder $y = ba$, und weiter gilt für alle $i \in \mathbb{N}$, dass $xy^iz \in L'$. Es wäre aber falsch, daraus zu schließen, dass es einen endlichen Automaten gibt, der L' erkennt.

   Tatsächlich gibt es keinen solchen Automaten. Intuitiv liegt das daran, dass beim Abarbeiten eines Eingabewortes eine beliebig große Differenz zwischen der Anzahl der gelesenen a's und der der b's entstehen kann, aber in den endlich vielen Zuständen eines endlichen Automaten kann maximal nur eine beschränkt große Differenz gespeichert werden. Der formale Beweis muss an dieser Stelle geschuldet bleiben.

7 Rechtslineare Grammatiken und endliche Automaten

In diesem Kapitel wird ein Zusammenhang zwischen den von endlichen Automaten erkannten Sprachen und den von rechtslinearen Chomsky-Grammatiken erzeugten Sprachen hergestellt.

Es ist recht einfach, einen endlichen Automaten so in eine Chomsky-Grammatik umzuwandeln, dass die Grammatik die Sprache erzeugt, die der Automat erkennt. Dazu wird das Lesen und Verarbeiten eines Zeichens gemäß der Zustandsüberführung als Erzeugen des Zeichens gedeutet und das Erreichen eines Endzustands als Erzeugen des leeren Wortes. Umgekehrt lässt sich eine Klasse von Chomsky-Grammatiken – die rechtslinearen

Grammatiken – identifizieren, deren Mitglieder in endliche Automaten übersetzt werden können, so dass sich auch ihr Wortproblem als linear lösbar erweist.

7.1 Übersetzung endlicher Automaten in Chomsky-Grammatiken

In diesem Abschnitt wird ein Übersetzer von endlichen Automaten in Chomsky-Grammatiken angegeben, bei dem im Prinzip nur die Zustandsüberführung in Regelform umgewandelt wird. Es wird gezeigt, dass der Übersetzer korrekt ist, d.h. dass der eingegebene Automat die Sprache erkennt, die die ausgegebene Grammatik erzeugt.

Theorem 6
Sei $A = (Z, I, d, s_0, F)$ ein endlicher Automat. Dann wird durch $GRA(A) = (Z, I, P_A, s_0)$ mit

$$P_A = \{s ::= xs' \mid s' \in d(s, x)\} \cup \{s'' ::= \lambda \mid s'' \in F\}$$

eine rechtslineare Chomsky-Grammatik konstruiert, so dass gilt: $L(A) = L(GRA(A))$.

Diese Übersetzung (einschließlich der semantischen Verträglichkeit) lässt sich mit dem Diagramm in Abbildung 6 illustrieren.

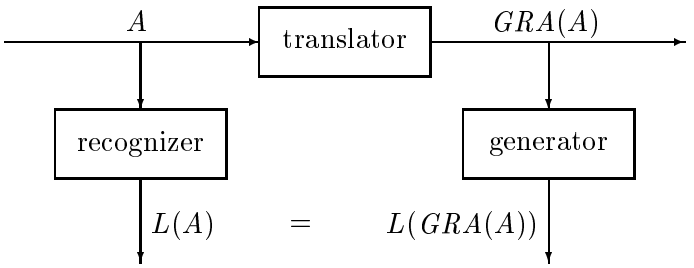


Abbildung 6: Korrekte Übersetzung endlicher Automaten in rechtslineare Grammatiken

Beweis.
Da $GRA(A)$ offensichtlich eine rechtslineare Chomsky-Grammatik ist, muss nur die Sprachgleichheit gezeigt werden. Dazu wird ein Zusammenhang zwischen der fortgesetzten Zustandsüberführung von A und den Ableitungen von $GRA(A)$ im anschließenden Lemma 7 hergestellt. Die behauptete Sprachgleichheit folgt dann vergleichsweise einfach: $w \in L(A)$ bedeutet $d^*(s_0, w) \cap F \neq \emptyset$, d.h. es gibt einen Zustand $s' \in F$ mit $s' \in d^*(s_0, w)$. Nach Definition der Regeln und Lemma 7 ist das gleichbedeutend zu $s' ::= \lambda \in P_A$ und $s_0 \xrightarrow[P_A]{*} ws'$. Daraus lässt sich die Ableitung $s_0 \xrightarrow[P_A]{*} ws' \underset{s' ::= \lambda}{\longrightarrow} w\lambda = w$ zusammensetzen. Die Ableitung $s_0 \xrightarrow[P_A]{*} w$ liefert aber gerade $w \in L(GRA(A))$.

Umgekehrt zerfällt eine Ableitung der Form $s_0 \xrightarrow[P_A]{*} w$ immer in Ableitungen $s_0 \xrightarrow[P_A]{*} ws'$ und $ws' \underset{s' ::= \lambda}{\longrightarrow} w$, weil das die einzige Möglichkeit zum Terminieren ist. Damit lässt sich die gesamte Überlegung auch umdrehen. □

Lemma 7
Seien A und $GRA(A)$ wie in Theorem 6.
Dann gilt für alle $s, s' \in Z$ und $w \in I^*$: $s \xrightarrow[P_A]{*} ws'$ gdw. $s' \in d^*(s, w)$.

Beweis (mit Induktion über die Länge von w).

IA (für $w = \lambda$):

$s \xrightarrow[P_A]{*} \lambda s' = s'$ gdw. $s = s'$ gdw. $s' \in \{s\} = d^*(s, \lambda)$,

wobei in der zweiten Äquivalenz die Definition von d^* ausgenutzt wird und bei der ersten die Tatsache, dass jede Regelanwendung in $GRA(A)$ ein terminales Zeichen erzeugt oder das nichtterminale löscht.

IV: Die Behauptung gelte für $w \in I^*$.

IS (für wx mit $w \in I^*$ und $x \in I$):

Eine Ableitung der Form $s \xrightarrow[P_A]{*} wxs'$ zerfällt immer in zwei Ableitungen der Form $s \xrightarrow[P_A]{*} w\bar{s}$ und $w\bar{s} \underset{\bar{s} ::= xs'}{\longrightarrow} wxs'$, weil nur Regeln der Form $\bar{s} ::= xs'$ Wörter verlängern und weil das nur am rechten Ende geschehen kann. Nach der Induktionsvoraussetzung korrespondiert die Ableitung $s \xrightarrow[P_A]{*} w\bar{s}$ zu $\bar{s} \in d^*(s, w)$. Die im Ableitungsschritt angewendete Regel korrespondiert zu $s' \in d(\bar{s}, x)$. Beides zusammen bedeutet nach Definition von d^* gerade $s' \in \bigcup_{t \in d^*(s,w)} d(t, x) = d^*(s, wx)$. □

7.2 Übersetzung rechtslinearer Grammatiken ohne Abweichung in endliche Automaten

Eine rechtslineare Grammatik muss nicht von einem endlichen Automaten stammen, denn ihre terminalen rechten Seiten müssen nicht unbedingt leer sein, und ihre weiteren rechten Seiten müssen neben dem nichtterminalen Zeichen nicht nur ein terminales Zeichen enthalten. Der Unterschied lässt sich aber offenbar quantitativ durch Längendifferenzen ausdrücken:

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine rechtslineare Grammatik. Für $p = (A ::= u)$ mit $A \in N$ und $u \in T^*$ wird die Länge $|u|$ *Abweichung* genannt und als *diff*(p) bezeichnet. Für $p = (A ::= uB)$ mit $A, B \in N$ und $u \in T^+$ wird $|u| - 1$ *Abweichung* genannt und als *diff*(p) bezeichnet. Für die Grammatik G wird die Summe aller Abweichungen von Produktionen *Abweichung von* G genannt und mit *diff*(G) bezeichnet, d.h.

$$\mathit{diff}(G) = \sum_{p \in P} \mathit{diff}(p).$$

Es ist ziemlich einfach, rechtslineare Grammatiken ohne Abweichung in endliche Automaten zu übersetzen, indem die Regeln als Zustandsüberführung aufgefasst werden. Diese Übersetzung erweist sich als Umkehrung der Konstruktion in Abschnitt 7.1, woraus unmittelbar ihre Korrektheit folgt.

Theorem 8
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine rechtslineare Grammatik mit $\mathit{diff}(G) = 0$. Dann kann durch $AUT(G) = (N, T, d_G, S, F_G = \{B \in N \mid B ::= \lambda \in P\})$ mit

$$d_G(A, x) = \{B \in N \mid A ::= xB \in P\} \text{ für alle } A \in N,\ x \in T$$

ein endlicher Automat konstruiert werden, dessen Grammatik gerade G ist, d.h. es gilt $GRA(AUT(G)) = G$.

Insbesondere gilt: $L(AUT(G)) = L(G)$.

Beweis.
$AUT(G)$ ist offensichtlich ein endlicher Automat, dessen zugehörige Grammatik $GRA(AUT(G)) = (N, T, P_{AUT(G)}, S)$ ist mit

$$\begin{aligned} P_{AUT(G)} &= \{A ::= xB \mid B \in d_G(A, x)\} \cup \{B ::= \lambda \mid B \in F_G\} \\ &= \{A ::= xB \mid A ::= xB \in P\} \cup \{B ::= \lambda \mid B ::= \lambda \in P\}, \end{aligned}$$

wobei bei der zweiten Gleichung die Definition von d_G und F_G ausgenutzt wurde. Mit anderen Worten liegen in $P_{AUT(G)}$ gerade die Produktionen aus P, deren Abweichung 0 ist. Da G insgesamt die Abweichung 0 hat, gibt es keine anderen Produktionen, so dass P und $P_{AUT(G)}$ und damit G und $GRA(AUT(G))$ übereinstimmen.

Mit Hilfe von Theorem 6 folgt dann: $L(AUT(G)) = L(GRA(AUT(G)) = L(G)$. □

7.3 Verkleinern der Abweichung

Das folgende Ergebnis zeigt, dass für jede rechtslineare Grammatik mit einer positiven Abweichung eine konstruiert werden kann mit kleinerer Abweichung, die dieselbe Sprache erzeugt. Dabei wird eine Produktion mit positiver Abweichung durch zwei Produktionen ersetzt. Die Konstruktionen unterscheiden sich für terminierende und nichtterminierende Produktionen allerdings leicht voneinander.

Theorem 9
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine rechtslineare Grammatik. Sei ferner X ein Extrazeichen mit $X \notin N \cup T$.

1. *Für $p = (A ::= uxB) \in P$ mit $A, B \in N$, $x \in T$, $u \in T^+$ wird dann durch*

   $$G_p = (N \cup \{X\},\ T,\ (P \setminus \{p\}) \cup \{A ::= uX,\ X ::= xB\},\ S)$$

   eine rechtslineare Grammatik mit $L(G) = L(G_p)$ und $\mathit{diff}(G) = \mathit{diff}(G_p) + 1$ konstruiert.

2. *Für $p = (A ::= u) \in P$ mit $A \in N$, $u \in T^+$ wird dann durch*

   $$G_p = (N \cup \{X\},\ T,\ (P \setminus \{p\}) \cup \{A ::= uX,\ X ::= \lambda)\},\ S)$$

   eine rechtslineare Grammatik mit $L(G) = L(G_p)$ und $\mathit{diff}(G) = \mathit{diff}(G_p) + 1$ konstruiert.

Beweis.
Dass G_p in beiden Fällen eine rechtslineare Grammatik ergibt, ist offensichtlich. In beiden Fällen sinkt auch die Abweichung um 1, weil jeweils die erste neue Produktion eine um 1 kleinere Abweichung hat als die herausgenommene und die jeweils zweite neue Produktion die Abweichung 0 besitzt.

Bleibt die Sprachgleichheit zu zeigen. Zuerst wird die erste Konstruktion betrachtet.

Sei $w \in L(G)$, d.h. $S \xrightarrow[P]{*} w$. Kommt p darin nicht vor, so ist das bereits eine Ableitung in G_p und damit $w \in L(G_p)$. Kommt p vor, so lässt sich die Ableitung zerlegen in $S \xrightarrow[P]{*} vA \xrightarrow[p]{} vuxB \xrightarrow[P]{*} w$. Die Anwendung von p kann ersetzt werden durch die Anwendung der beiden neuen Produktionen, was $S \xrightarrow[P]{*} vA \underset{A ::= uX}{\longrightarrow} vuX \underset{X ::= xB}{\longrightarrow} vuxB \xrightarrow[P]{*} w$ ergibt. So lassen sich mit einfacher Induktion alle Vorkommen von p beseitigen, und es entsteht eine Ableitung von w aus S in G_p, so dass $w \in L(G_p)$.

Sei umgekehrt $w \in L(G_p)$, d.h. $S \xrightarrow[P']{*} w$, wenn P' die Produktionsmenge von G_p bezeichnet. Kommt dabei zwischendurch nirgends X vor, so ist diese Ableitung bereits in G, so dass $w \in L(G)$. Kommt X vor, so muss es durch die erste neue Produktion entstanden sein und unmittelbar danach von der zweiten wieder ersetzt werden, weil die Produktionen aus P weder links noch rechts X enthalten. Also zerfällt die Ableitung in $S \xrightarrow[P']{*} vA \underset{A ::= uX}{\longrightarrow} vuX \underset{X ::= xB}{\longrightarrow} vuxB \xrightarrow[P']{*} w$. Die zwei Schritte in der Mitte lassen sich durch $vA \xrightarrow[p]{} vuxB$ ersetzen. Induktiv lassen sich so alle Vorkommen der neuen Produktionen beseitigen, so dass eine Ableitung $S \xrightarrow[P]{*} w$ entsteht und damit $w \in L(G)$.

Für die zweite Konstruktion geht der Beweis analog, wobei allerdings keine Induktion nötig ist, weil die terminierenden Regeln höchstens einmal angewendet werden. □

7.4 Übersetzung rechtslinearer Grammatiken in endliche Automaten

Eine rechtslineare Grammatik mit positiver Abweichung hat mindestens eine Produktion mit positiver Abweichung. Deshalb kann die Konstruktion für eine Grammatik G mit Abweichung k k-mal wiederholt werden. Dabei entsteht eine rechtslineare Grammatik $\overline{G}$ ohne Abweichung, für die die Konstruktion aus Abschnitt 7.2 durchgeführt werden kann.

Insgesamt wird also G in $AUT(\overline{G})$ übersetzt mit $L(G) = L(\overline{G}) = L(AUT(\overline{G}))$. Die lineare Lösung des Wortproblems für endliche Automaten ist somit auch für rechtslineare Grammatiken anwendbar.

Mit den Theoremen 5, 8 und 9 lässt sich außerdem die dritte Aussage in Theorem 3, d.h. $\mathcal{L}_3 \subsetneqq \mathcal{L}_2$, beweisen. Die Sprache $L_{balance} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ wird nämlich von der kontextfreien Grammatik $G_{balance} = (\{S\}, \{a, b\}, \{S ::= aSb \mid \lambda\}, S)$ erzeugt, so dass $L_{balance} \in \mathcal{L}_2$ gilt. Zugleich ist aber $L_{balance} \notin \mathcal{L}_3$: Würde $L_{balance}$ von einer rechtslinearen Grammatik erzeugt, so auch von einer rechtslinearen Grammatik mit Abweichung 0 (Theorem 9), und damit gäbe es einen endlichen Automaten, der $L_{balance}$ erkennt (Theorem 8). In Beispiel 1

zur Anwendung des Pumping-Lemmas für erkannte Sprachen (Theorem 5) wurde aber gerade gezeigt, dass es einen solchen Automaten nicht geben kann. Also gibt es auch keine rechtslineare Grammatik, die $L_{balance}$ erzeugt. Damit ist $L_{balance} \in \mathcal{L}_2 \setminus \mathcal{L}_3$.

8 Reguläre Sprachen und reguläre Ausdrücke

Neben dem Erzeugen und Erkennen von Sprachen ist es interessant, ihre Kompositionalität oder Modularität zu untersuchen. Dabei geht es darum, wie sich umfangreiche und komplizierte Sprachen aus einfachen Bausteinen aufbauen lassen. Diese Frage ist auch für die Entwicklung großer Spezifikationen und informationstechnischer Systeme von zentraler Bedeutung. Es zeigt sich, dass sich die von endlichen Automaten erkannten Sprachen und damit die von rechtslinearen Grammatiken erzeugten in besonders einfacher Weise modular aufbauen lassen.

8.1 Reguläre Operationen

Die in Abbildung 7 gezeigten drei endlichen Automaten erkennen (a) die leere Menge $\emptyset$, (b) die einelementige Sprache $\{\lambda\}$, die das leere Wort enthält, bzw. (c) die einelementige Sprache $\{x\}$, die das Wort x der Länge 1 enthält. Diese Sprachen dienen als kleinste, unzerlegbare Sprachmoduln.

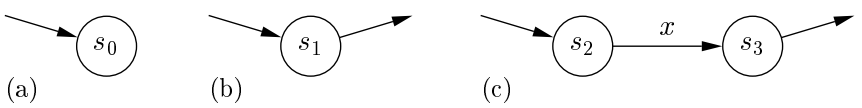


Abbildung 7: Endliche Automaten für atomare Sprachen: (a) $\emptyset$ (b) $\{\lambda\}$ (c) $\{x\}$ mit $x \in I$

Sind L, L_1 und L_2 Sprachen zum Alphabet I, die von endlichen Automaten erkannt werden, so werden auch die zusammengesetzten Sprachen $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$ und L^* von endlichen Automaten erkannt. Die dabei verwendeten Sprachoperationen sind die Vereinigung, die Konkatenation ($L_1 L_2 = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L_1,\, w_2 \in L_2\}$) und die Kleene-Hülle ($L^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L^i$ mit $L^0 = \{\lambda\}$ und $L^{i+1} = L^i L$).

Bezeichnet $\mathcal{L}_{AUT(I)}$ die Klasse aller Sprachen über dem Alphabet I, die von endlichen Automaten erkannt werden, so hat $\mathcal{L}_{AUT(I)}$ nach den obigen Überlegungen folgende Eigenschaften:

(i) $\emptyset, \{\lambda\}, \{x\} \in \mathcal{L}_{AUT(I)}$ für $x \in I$,

(ii) $L, L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{AUT(I)}$ impliziert $L_1 \cup L_2,\, L_1 L_2,\, L^* \in \mathcal{L}_{AUT(I)}$.

Die kleinste Klasse $\mathcal{L}_{REG(I)}$ von Sprachen mit diesen Eigenschaften sind die sogenannten *regulären Sprachen*, die durch endlich-maliges Anwenden der Sprachoperationen in (ii), beginnend mit den Sprachen in (i), entstehen. Die regulären Sprachen sind also vollständig modular aufgebaut. Insbesondere gilt: $\mathcal{L}_{REG(I)} \subseteq \mathcal{L}_{AUT(I)}$.

8.2 Endliche Automaten erkennen reguläre Sprachen

Bemerkenswerterweise kann auch die Umkehrung nachgewiesen werden, so dass sich die von endlichen Automaten erkannten und von rechtslinearen Grammatiken erzeugten Sprachen als regulär erweisen und somit aus den atomaren Sprachmoduln allein durch endlich viele Vereinigungen, Konkatenationen und Kleene-Hüllen-Bildungen aufgebaut werden können.

Theorem 10
Sei $A = (Z, I, d, s_0, F)$ ein endlicher Automat. Dann ist $L(A)$ regulär.

Beweis.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $Z = \{1, \ldots, n\}$ und $s_0 = 1$ angenommen werden. Dann ist für $i, j \in Z$ und $k \in \mathbb{N}$ die Sprache $L^k_{i,j}$ aller Wörter, die im Zustandsgraphen von i nach j führen, ohne zwischendurch Zustände jenseits von k zu besuchen, definiert als:

$$L^k_{i,j} = \{w \in I^* \mid j \in d^*(i, w),\ d^*(i, u) \subseteq \{1, \ldots, k\} \text{ für alle } u \text{ mit } w = uv,\ w \neq u \neq \lambda\}.$$

Mit Induktion über k kann gezeigt werden, dass $L^k_{i,j}$ für alle $i, j \in Z$ und $k \in \mathbb{N}$ regulär ist.

IA: Für $k = 0$ und $i \neq j$ enthält $L^k_{i,j}$ die Eingaben, die direkt von i nach j führen, weil alle Zustände jenseits von 0 liegen und deshalb nicht besucht werden dürfen. D.h. $L^0_{i,j} = \{x \in I \mid j \in d(i, x)\}$. Diese Sprache ist entweder leer oder die endliche Vereinigung von atomaren regulären Sprachen und deshalb selbst regulär.

Für $k = 0$ und $i = j$ gehört in jedem Fall noch λ zur Sprache, d.h. $L^0_{i,i} = \{\lambda\} \cup \{x \in I \mid i \in d(i, x)\}$, was sich analog als regulär erweist, weil $\{\lambda\}$ regulär ist.

IV: Als Induktionsvoraussetzung wird von der Regularität von $L^k_{i,j}$ für alle i und j ausgegangen.

IS: Betrachte nun im Induktionsschluss $L^{k+1}_{i,j}$ bzw. ein Element w daraus. Dieses Wort induziert einen Weg von i nach j im Zustandsgraph. Sei $l_0 \cdots l_p$ die durchlaufene Sequenz von Zuständen mit $i = l_0$ und $j = l_p$. Kommt der Zustand $k + 1$ gar nicht in $l_1 \cdots l_{p-1}$ vor, so liegt w in $L^k_{i,j}$. Ansonsten kommt der Zustand $k+1$ m-mal darin vor mit $0 < m < p$, so dass die Sequenz folgende Form hat:

$$l_0 \cdots l_{p_1-1}(k+1)l_{p_1+1} \cdots l_{p_2-1}(k+1) \cdots (k+1)l_{p_m+1} \cdots l_p,$$

wobei $p_1 < p_2 < \cdots < p_m$ die Stellen sind, wo $k + 1$ auftritt. Insbesondere kommt in den Abschnitten $l_1 \cdots l_{p_1-1}, l_{p_1+1} \cdots l_{p_2-1}, \ldots, l_{p_m+1} \cdots l_{p-1}$ der Zustand $k + 1$ nicht vor, sondern nur die Zustände $1, \ldots, k$. Es stellt sich also heraus, dass $w = w_0 w_1 \ldots w_m$ für Wörter $w_0 \in L^k_{i,k+1}$, $w_1, \ldots, w_{m-1} \in L^k_{k+1,k+1}$ und $w_m \in L^k_{k+1,j}$, d.h. $w \in L^k_{i,k+1}(L^k_{k+1,k+1})^* L^k_{k+1,j}$. Damit ist gezeigt, dass

$$L^{k+1}_{i,j} \subseteq L^k_{i,j} \cup L^k_{i,k+1}(L^k_{k+1,k+1})^* L^k_{k+1,j}.$$

Nach Definition von $L_{i,j}^k$ gilt auch die umgekehrte Inklusion, so dass insgesamt

$$L_{i,j}^{k+1} = L_{i,j}^k \cup L_{i,k+1}^k (L_{k+1,k+1}^k)^* L_{k+1,j}^k$$

folgt. Nach Induktionsvoraussetzung sind $L_{i,j}^k$, $L_{i,k+1}^k$, $L_{k+1,k+1}^k$ und $L_{k+1,j}^k$ regulär, so dass auch die Kleene-Hülle der dritten Sprache und die Konkatenation mit den anderen beiden Sprachen sowie die Vereinigung mit der ersten Sprache regulär sind. Also ist $L_{i,j}^{k+1}$ regulär, was zu zeigen war.

Die Sprachen $L_{i,j}^k$ sind also für alle $i, j \in Z$ und $k \in \mathbb{N}$ regulär. Die von A erkannte Sprache ist eine Vereinigung endlich vieler dieser Sprachen, denn es gilt $L(A) = \bigcup_{j \in F} L_{1,j}^n$. Somit ist auch $L(A)$ regulär, wie behauptet. □

8.3 Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke sind, analog zu arithmetischen Ausdrücken, aus Konstanten, Operationen und Klammern aufgebaute Zeichenketten, die einen Wert beschreiben. Der Wert soll in diesem Fall allerdings keine Zahl sein, sondern eine Sprache. Demzufolge müssen die Konstanten möglichst einfache Sprachen repräsentieren und die Operationen müssen es erlauben, aus diesen Sprachen komplexere zu bilden.

In der einen oder anderen Form dürften reguläre Ausdrücke den meisten schon einmal über den Weg gelaufen sein, da sie in Editoren mit komfortablen Suchfunktionen und in UNIX-Kommandos wie z.B. grep, find und sed Verwendung finden.

Sei I ein Alphabet mit $\mathit{lambda}, \mathit{empty}, +, \circ, *, (,) \notin I$. Die Menge $REX(I)$ der *regulären Ausdrücke über* I ist rekursiv definiert durch:

(i) $\mathit{empty}, \mathit{lambda} \in REX(I)$,

(ii) $I \subseteq REX(I)$ und

(iii) für alle $r, r_1, r_2 \in REX(I)$ sind auch die Wörter $(r_1 + r_2)$, $(r_1 \circ r_2)$ und (r^*) in $REX(I)$.

Jedem regulären Ausdruck r über I wird wie folgt eine Sprache $L(r)$ zugeordnet:

(i) $L(\mathit{empty}) = \emptyset$, $L(\mathit{lambda}) = \{\lambda\}$ und $L(x) = \{x\}$ für alle $x \in I$,

(ii) für alle $r, r_1, r_2 \in REX(I)$ sei

  (1) $L((r_1 + r_2)) = L(r_1) \cup L(r_2)$,

  (2) $L((r_1 \circ r_2)) = L(r_1)L(r_2) = \{w_1 w_2 \mid w_1 \in L(r_1),\ w_2 \in L(r_2)\}$ und

  (3) $L((r^*)) = L(r)^* = \{w_1 \cdots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in L(r),\ n \in \mathbb{N}\}$.

Bemerkungen

1. Nach der Interpretation regulärer Ausdrücke steht $+$ für die Vereinigung zweier Sprachen, $\circ$ für deren Konkatenation und $*$ für die Iteration einer Sprache. Die

Verwendung der Symbole + und $\circ$ für Vereinigung und Konkatenation hat einen guten Grund: Abstrakt gesehen, verhalten sich diese Operationen wie Addition und Multiplikation (genauer gesagt, die Menge der Wörter bildet mit diesen Operationen einen Semiring). Dabei ist $\emptyset$ das neutrale Element der Addition (die "Null") und $\{\lambda\}$ ist das der Multiplikation (die "Eins"). Wie gewohnt ergibt die Multiplikation mit Null immer Null: $\emptyset L = \emptyset = L\emptyset$. Beide Operationen sind offenbar assoziativ, aber nur die Vereinigung ist auch kommutativ, denn L_1L_2 ist natürlich im allgemeinen nicht dasselbe wie L_2L_1. Wie man sich leicht überzeugen kann, gelten auch die Distributivgesetze: $L(L_1 \cup L_2) = LL_1 \cup LL_2$ und $(L_1 \cup L_2)L = L_1L \cup L_2L$. Damit sind alle Zutaten beisammen, die man für einen Semiring benötigt (zu einem "echten" Ring fehlen die inversen Elemente bezüglich der Addition). Übrigens hat auch der Kleene-Stern einige interessante Eigenschaften. Insbesondere ist er idempotent, $L^{**} = L^*$, was praktisch direkt aus der Definition folgt.

2. Um reguläre Ausdrücke übersichtlicher zu machen, wird üblicherweise von der Konvention Gebrauch gemacht, dass $*$ stärker bindet als $\circ$ und dies wiederum stärker als +. Klammern, die nach dieser Konvention (oder der Assoziativität von + und $\circ$) zur Vermeidung von Mehrdeutigkeiten unnötig sind, können weggelassen werden. Außerdem lässt man das Symbol $\circ$ oft weg, analog zur Schreibweise bei arithmetischen Ausdrücken, wo man ja auch oft xy für $x \cdot y$ schreibt. Demnach kann man beispielsweise statt $(((a \circ b)^*) \circ (c \circ (c^*)))$ auch kurz $(ab)^*cc^*$ schreiben.
3. Gelegentlich wird in der Literatur ein regulärer Ausdruck r angegeben, wenn eigentlich $L(r)$ gemeint ist, sofern dies aus dem Kontext genügend klar hervorgeht. Dies sollte aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass r und $L(r)$ zwei grundverschiedene Dinge sind: r ist eine Zeichenkette, während $L(r)$ eine Sprache ist.

Aus der Definition der regulären Ausdrücke und ihrer Interpretation sowie der Definition der regulären Sprachen folgt unmittelbar, dass eine Sprache $L \subseteq I^*$ genau dann regulär ist, wenn es einen regulären Ausdruck $r \in REX(I)$ mit $L = L(r)$ gibt. Reguläre Ausdrücke stellen somit den dritten Formalismus neben rechtslinearen Grammatiken und endlichen Automaten dar, um reguläre Sprachen zu spezifizieren. Formal:

$$\mathcal{L}_{REG(I)} = \mathcal{L}_{3(I)} = \mathcal{L}_{AUT(I)} = \mathcal{L}_{REX(I)},$$

wobei $\mathcal{L}_{REX(I)} = \{L(r) \mid r \in REX(I)\}$ alle durch Interpretation der regulären Ausdrücke über I erhaltenen Sprachen und $\mathcal{L}_{3(I)}$ alle Typ-3-Sprachen über I enthält.

9 Kellerautomaten

Die Erkennung von Sprachen durch endliche Automaten ist angemessen schnell, aber in ihrem Anwendungsspektrum ziemlich eingeschränkt, weil ein endlicher Automat während des Abarbeitens eines Eingabewortes nur eine beschränkte Zahl von Informationen speichern kann, die durch die Zustände vorgegeben ist. Insbesondere kann nur bis zu einer

Schranke gezählt werden, und nur beschränkte Abschnitte des Eingabewortes können für spätere Vergleiche aufgehoben werden. Um dagegen eine Sprache wie

$$L_{balance} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

zu erkennen, muss man unbeschränkt zählen können. Oder um das Wortproblem von

$$L_{palindrom} = \{w \in T^* \mid w = trans(w)\}$$

zu lösen, ist es nötig, die erste Hälfte des Wortes zwischenzuspeichern, damit sie mit der zweiten Hälfte des Wortes verglichen werden kann.[3]

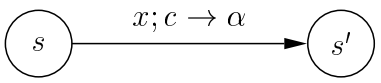
Um die Technik des Erkennens endlicher Automaten beibehalten zu können, aber gleichzeitig auch in der Lage zu sein, mitzuzählen und sich beliebige Teile des gelesenen Wortes zu merken, werden die endlichen Automaten um einen Keller (Stapel, stack) als zweites Speichermedium erweitert. Ein Zustandsübergang wird dann auch vom obersten Kellersymbol abhängig gemacht, das dabei durch eine Sequenz von Kellersymbolen ersetzbar ist. Auf dem Keller werden in jedem Schritt also eine POP-Operation sowie eine Folge von PUSH-Operationen ausgeführt, die auch leer sein kann. Außerdem werden noch – anders als bei endlichen Automaten – Zustandsübergänge erlaubt, bei denen kein Eingabesymbol gelesen wird.

9.1 Konzept des Kellerautomaten

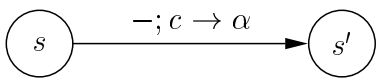
Das Modell des Kellerautomaten formalisiert diese Beschreibung. Die Arbeitsweise des Kellerautomaten wird ähnlich wie bei Turingmaschinen durch fortgesetzte Übergänge zwischen Konfigurationen beschrieben, wobei eine Konfiguration den aktuellen Zustand, das noch zu lesende Eingabewort und ein aktuelles Kellerwort umfasst. Einzelne Übergänge sind durch die Zustandsüberführung festgelegt. Ziel ist es, eine Anfangskonfiguration mit Anfangszustand, dem vollständigen Eingabewort und dem initialen Kellersymbol als Startkeller in eine Endkonfiguration zu überführen, bei der der aktuelle Zustand ein Endzustand und die Eingabe vollständig gelesen ist. Wenn das gelingt, ist das Eingabewort vom Kellerautomaten erkannt.

1. Ein *Kellerautomat* ist ein System $K = (Z, I, C, d, s_0, F, c_0)$ mit einer endlichen Menge Z von *Zuständen*, einem endlichen Alphabet I von *Eingaben*, einem endlichen Alphabet C von *Kellersymbolen*, einer *Zustandsüberführung* d, die jedem Zustand s, jeder Eingabe x und jedem Kellersymbol c eine Menge von Paaren aus Zuständen und Kellerwörtern $d(s, x, c) \subseteq Z \times C^*$ sowie jedem Zustand s und jedem Kellersymbol c eine entsprechende Menge $d(s, -, c) \subseteq Z \times C^*$ zuordnet, einem *Anfangszustand* $s_0 \in Z$, einer Menge von *Endzuständen* $F \subseteq Z$ und einem *initialen Kellersymbol* c_0.
2. Ein Kellerautomat lässt sich ähnlich einem endlichen Automaten graphisch darstellen. Unterschiedlich ist lediglich die Beschriftung der Kanten, wie Abbildung 8 illustriert.

[3] Dabei wird vorausgesetzt, dass das Eingabewort nur einmal von links nach rechts gelesen werden kann.



für $(s', \alpha) \in d(s, x, c)$



für $(s', \alpha) \in d(s, -, c)$

Abbildung 8: Kantenbeschriftungen bei Kellerautomaten

3. Eine *Konfiguration* (s, v, γ) besteht aus einem Zustand $s \in Z$, einem Eingabewort $v \in I^*$ und einem Kellerwort $\gamma \in C^*$. Für $w \in I^*$ ist (s_0, w, c_0) die *Anfangskonfiguration* von w. Und (s'', λ, γ) wird *Endkonfiguration* genannt, falls $s'' \in F$ (bei beliebigem Kellerwort γ).

   Falls $(s', \alpha) \in d(s, x, c)$, so hat die Konfiguration $(s, xv, c\gamma)$ die *Folgekonfiguration* $(s', v, \alpha\gamma)$; falls $(s', \alpha) \in d(s, -, c)$, so hat die Konfiguration $(s, v, c\gamma)$ die *Folgekonfiguration* $(s', v, \alpha\gamma)$.

   Ist con' eine Folgekonfiguration von con, so schreibt man dafür auch $con \vdash\!\!\!- \; con'$. Eine Folge von n solchen direkten Übergängen

   $$con = con_0 \vdash\!\!\!- \; con_1 \vdash\!\!\!- \cdots \vdash\!\!\!- \; con_n = con'$$

   (für $n \in \mathbb{N}$) kann durch $con \vdash\!\!\!-^{n} con'$ oder $con \vdash\!\!\!-^{*} con'$ abgekürzt werden.
4. Ein Wort $w \in I^*$ wird von K *erkannt*, falls die Anfangskonfiguration von w in eine Endkonfiguration überführbar ist, d.h. es existieren $s'' \in F$ und $\gamma \in C^*$ mit $(s_0, w, c_0) \vdash\!\!\!-^{*} (s'', \lambda, \gamma)$.

   Die Menge aller von K erkannten Wörter bildet die *erkannte Sprache* $L(K)$.

9.2 Deterministische Kellerautomaten

Bei einem Kellerautomaten kann eine Konfiguration mehrere Folgekonfigurationen haben, so dass das Erkennungsverfahren nichtdeterministisch ist. Es wird deterministisch, wenn es jeweils höchstens eine Folgekonfiguration gibt, was offenbar für folgende Kellerautomaten gilt:

Ein Kellerautomat $K = (Z, I, C, d, s_0, F, c_0)$ ist *deterministisch*, wenn für jedes $s \in Z$ und $c \in C$ die Mengen $d(s, x, c)$ für alle $x \in I$ und $d(s, -, c)$ leer oder einelementig sind und $d(s, -, c)$ höchstens dann nicht leer ist, wenn alle $d(s, x, c)$ leer sind.

Ohne Beweis sei angemerkt, dass es nicht möglich ist, zu jedem Kellerautomaten einen deterministischen Kellerautomaten zu konstruieren, der dieselbe Sprache erkennt. So gibt es z.B. einen Kellerautomaten, der die Sprache $L_{mirror} = \{w\, trans(w) \mid w \in \{a, b\}^*\}$ erkennt, aber keinen deterministischen Kellerautomaten.

9.3 Beispiel: Reguläre Ausdrücke

Reguläre Ausdrücke über I (vgl. Abschnitt 8.3) werden von dem in Abbildung 9 dargestellten deterministischen Automaten erkannt (wobei $y \in I \cup \{empty, lambda\}$, $c \in \{op, br, c_0\}$ und $\oplus \in \{+, \circ\}$).

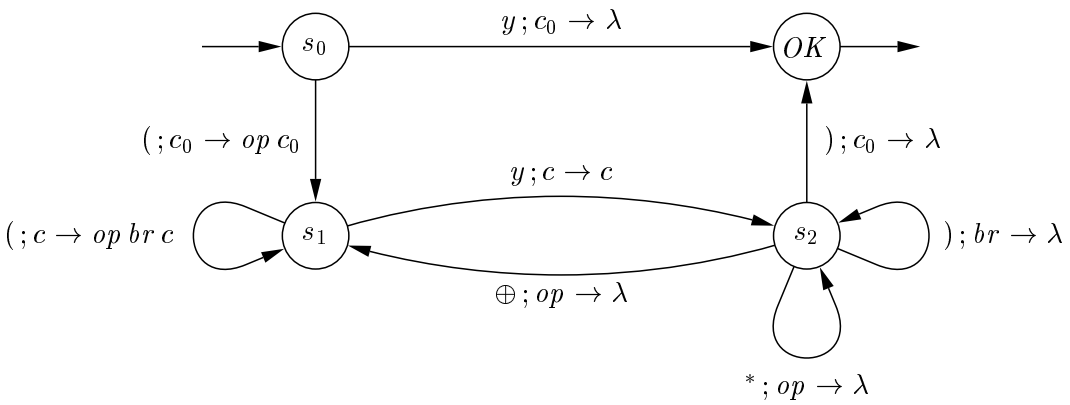


Abbildung 9: Ein deterministischer Kellerautomat, der $REX(I)$ erkennt

Durch folgende Konfigurationsfolge wird der Ausdruck $(((x+empty)^*)\circ lambda)$ als regulär erkannt:

$$
\begin{array}{lllll}
 & (s_0, & (((x+empty)^*)\circ lambda), & & c_0) \\
\vdash & (s_1, & ((x+empty)^*)\circ lambda), & & op\,c_0) \\
\vdash & (s_1, & (x+empty)^*)\circ lambda), & & op\,br\,op\,c_0) \\
\vdash & (s_1, & x+empty)^*)\circ lambda), & & op\,br\,op\,br\,op\,c_0) \\
\vdash & (s_2, & +\,empty)^*)\circ lambda), & & op\,br\,op\,br\,op\,c_0) \\
\vdash & (s_1, & empty)^*)\circ lambda), & & br\,op\,br\,op\,c_0) \\
\vdash & (s_2, &)^*)\circ lambda), & & br\,op\,br\,op\,c_0) \\
\vdash & (s_2, & ^*)\circ lambda), & & op\,br\,op\,c_0) \\
\vdash & (s_2, &)\circ lambda), & & br\,op\,c_0) \\
\vdash & (s_2, & \circ\,lambda), & & op\,c_0) \\
\vdash & (s_1, & lambda), & & c_0) \\
\vdash & (s_2, &), & & c_0) \\
\vdash & (OK, & \lambda, & &)
\end{array}
$$

Die folgende Konfigurationsfolge zeigt, dass der Ausdruck $((x+empty)^*)\circ lambda)$ nicht regulär ist:

$$
\begin{array}{lllll}
 & (s_0, & ((x+empty)^*)\circ lambda), & & c_0) \\
\vdash & (s_1, & (x+empty)^*)\circ lambda), & & op\,c_0) \\
\vdash & (s_1, & x+empty)^*)\circ lambda), & & op\,br\,op\,c_0) \\
\vdash & (s_2, & +\,empty)^*)\circ lambda), & & op\,br\,op\,c_0) \\
\vdash & (s_1, & empty)^*)\circ lambda), & & br\,op\,c_0) \\
\vdash & (s_2, &)^*)\circ lambda), & & br\,op\,c_0) \\
\vdash & (s_2, & ^*)\circ lambda), & & op\,c_0) \\
\vdash & (s_2, &)\circ lambda), & & c_0) \\
\vdash & (OK, & \circ\,lambda), & &)
\end{array}
$$

Denn die letzte Konfiguration besitzt keine Folgekonfiguration, ist aber auch keine Endkonfiguration.

10 Von kontextfreien Grammatiken zu Kellerautomaten

Kontextfreie Grammatiken haben nur Regeln, deren linke Seiten einzelne nichtterminale Zeichen sind. Da die Syntax von Programmiersprachen üblicherweise mit Hilfe solcher Regeln definiert wird, sind kontextfreie Grammatiken und die Lösung ihres Wortproblems besonders interessant. Es trifft sich deshalb gut, dass kontextfreie Grammatiken korrekt in Kellerautomaten übersetzt werden können. Dabei bedeutet Korrektheit, dass jede eingegebene Grammatik dieselbe Sprache erzeugt wie der aus der Eingabe konstruierte Automat erkennt. Der konstruierte Automat löst also das Wortproblem der Eingabegrammatik. Da Kellerautomaten im allgemeinen nichtdeterministisch arbeiten, ist diese Lösung jedoch nicht polynomiell (wenn man den Nichtdeterminismus z.B. durch Breitensuche vermeidet). Leider lässt sich im Gegensatz zu endlichen Automaten nicht jeder Kellerautomat in einen deterministischen umbauen, ohne dass sich die erkannte Sprache ändert.

10.1 Der Übersetzer

Zu jeder kontextfreien Grammatik wird ein Kellerautomat konstruiert, in dessen Keller praktisch der Ableitungsprozess der Eingabegrammatik abläuft. Sonstige Zustandsübergänge dienen lediglich dem richtigen Starten und Halten.

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik und $c_0, c_{OK} \notin N \cup T$. Dann ist der zugehörige Kellerautomat $PDA(G)$ [4] gegeben durch:

$$PDA(G) = (\{s_0, OK\}, T, N \cup T \cup \{c_0, c_{OK}\}, d_G, s_0, \{OK\}, c_0)$$

mit

(i) $d_G(s_0, -, c_0) = \{(s_0, S\, c_{OK})\}$,
(ii) $d_G(s_0, -, A) = \{(s_0, u) \mid A ::= u \in P\}$,
(iii) $d_G(s_0, x, x) = \{(s_0, \lambda)\}$ für alle $x \in T$ und
(iv) $d_G(s_0, -, c_{OK}) = \{(OK, \lambda)\}$.

Theorem 11 (Korrektheit der Übersetzung)
Sei G eine kontextfreie Grammatik und $PDA(G)$ der zugehörige Kellerautomat. Dann gilt: $L(G) = L(PDA(G))$.

Die Situation der Übersetzung von kontextfreien Grammatiken in Kellerautomaten und ihre Korrektheit lassen sich durch das Diagramm in Abbildung 10 veranschaulichen.

Der Beweis von Theorem 11 wird auf Kapitel 13 verschoben, da dafür einige Eigenschaften von kontextfreien Grammatiken benötigt werden, die erst in den folgenden zwei Kapiteln erarbeitet werden.

Zunächst soll die Übersetzung mit einem Beispiel veranschaulicht werden.

[4] *PDA* steht für die englische Bezeichnung *pushdown automaton* für Kellerautomat.

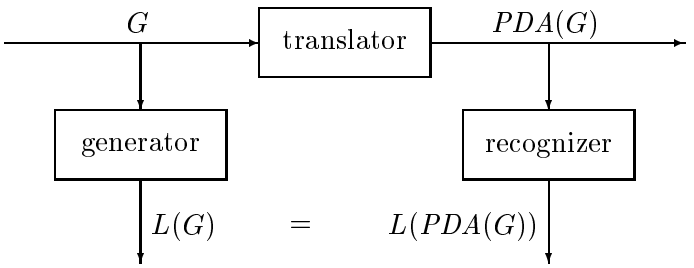


Abbildung 10: Korrekte Übersetzung kontextfreier Grammatiken in Kellerautomaten

10.2 Beispiel: Klammergebirge

Die kontextfreie Grammatik $G = (\{A\}, \{[,]\}, \{A ::= AA \mid [A] \mid \lambda\}, A)$ erzeugt alle korrekten Klammerungen über dem Klammerpaar [und] . Der zugehörige Kellerautomat $PDA(G)$ ist in Abbildung 11 dargestellt.

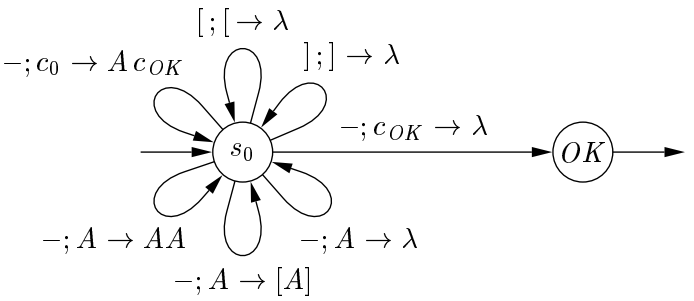


Abbildung 11: Ein zu einer kontextfreien Grammatik gehörender Kellerautomat

Wie die in der linken Hälfte von Abbildung 12 angegebene Berechnung zeigt, wird die Klammerung [ ][ ][[ ]] von $PDA(G)$ erkannt. Dieser Berechnung entspricht die rechts daneben angegebene Ableitung in G, wobei das jeweils im nächsten Schritt ersetzte nichtterminale Zeichen fett gedruckt ist.

Offenbar arbeitet die Zustandsüberführung von $PDA(G)$ wie folgt: Zur Anfangskonfiguration passt nur der Zustandsübergang nach (i), so dass in der Folgekonfiguration das Startsymbol zuoberst auf dem Keller steht. Ein Zustandsübergang nach (ii) kann ausgeführt werden, falls oben auf dem Keller ein Nichtterminal der Grammatik steht. Wenn es mehrere Übergänge für dieses Zeichen gibt, "rät" der Kellerautomat nichtdeterministisch, welche Produktion in der Ableitung angewendet wird, um das nächste Teilstück des Eingabewortes zu erzeugen. Ein Zustandsübergang nach (iii) wird ausgeführt, wenn das oberste Kellersymbol ein Terminalzeichen ist und dieses auch gerade dem nächsten gelesenen Zeichen gleicht. Damit das Eingabewort erkannt wird, muss zuletzt der Zustandsübergang nach (iv) ausgeführt werden.

Insgesamt wird beim Vergleich der Konfigurationsfolge und der Ableitung deutlich, dass der Kellerautomat alle in dem entsprechenden abgeleiteten Wort links von der Lücke

$$
\begin{array}{llrcl}
 & (s_0, & []\,[]\,[[]], & c_0) & \\
\vdash & (s_0, & []\,[]\,[[]], & A\,c_{OK}) & \\
\vdash & (s_0, & []\,[]\,[[]], & AA\,c_{OK}) & \longrightarrow \quad \boldsymbol{A} \\
\vdash & (s_0, & []\,[]\,[[]], & AAA\,c_{OK}) & \longrightarrow \quad \boldsymbol{A}AA \\
\vdash & (s_0, & []\,[]\,[[]], & [A]AA\,c_{OK}) & \longrightarrow \quad [A]AA \\
\vdash & (s_0, &]\,[]\,[[]], & A]AA\,c_{OK}) & = \quad [\ \boldsymbol{A}]AA \\
\vdash & (s_0, &]\,[]\,[[]], &]AA\,c_{OK}) & \longrightarrow \quad [\ ]AA \\
\vdash & (s_0, & []\,[[]], & AA\,c_{OK}) & = \quad [\,]\ \boldsymbol{A}A \\
\vdash & (s_0, & []\,[[]], & [A]A\,c_{OK}) & \longrightarrow \quad [\,]\ [A]A \\
\vdash & (s_0, &]\,[[]], & A]A\,c_{OK}) & = \quad [\,][\ \boldsymbol{A}]A \\
\vdash & (s_0, &]\,[[]], &]A\,c_{OK}) & \longrightarrow \quad [\,][\ ]A \\
\vdash & (s_0, & [[]], & A\,c_{OK}) & = \quad [\,][\,]\ \boldsymbol{A} \\
\vdash & (s_0, & [[]], & [A]\,c_{OK}) & \longrightarrow \quad [\,][\,]\ [A] \\
\vdash & (s_0, & []], & A]\,c_{OK}) & = \quad [\,][\,][\ \boldsymbol{A}] \\
\vdash & (s_0, & []], & [A]]\,c_{OK}) & \longrightarrow \quad [\,][\,][\ [A]] \\
\vdash & (s_0, &]], & A]]\,c_{OK}) & = \quad [\,][\,][[\ \boldsymbol{A}]] \\
\vdash & (s_0, &]], &]]\,c_{OK}) & \longrightarrow \quad [\,][\,][[\ ]] \\
\vdash & (s_0, &], &]\,c_{OK}) & = \quad [\,][\,][[\,]\ ] \\
\vdash & (s_0, & \lambda, & c_{OK}) & = \quad [\,][\,][[\,]] \\
\vdash & (OK, & \lambda, & \lambda) &
\end{array}
$$

Abbildung 12: Eine Berechnung des Kellerautomaten und die zugehörige Ableitung in der Grammatik

stehenden Zeichen bereits gelesen und alle rechts stehenden Zeichen gerade auf dem Keller hat. Weiter fällt auf, dass in jedem Schritt der Ableitung das am weitesten links stehende Nichtterminal ersetzt wird, d.h. die Ableitung ist eine sogenannte *Linksableitung*. Dies ist kein Zufall, sondern liegt daran, dass der Kellerautomat immer nur das oberste Zeichen aus seinem Keller entfernen kann.

Damit liegt die Vermutung nahe, dass der zu einer kontextfreien Grammatik gehörige Kellerautomat genau dann ein Wort erkennt, wenn dieses Wort mit einer Linksableitung der Grammatik erzeugt werden kann. In Theorem 11 wird aber behauptet, dass der Kellerautomat jedes von der Grammatik erzeugte Wort erkennt, unabhängig davon, wie dieses Wort abgeleitet wurde. Um dieses Problem zu lösen, wird in Kapitel 12 gezeigt, dass jede terminierende Ableitung einer kontextfreien Grammatik in eine Linksableitung umgebaut werden kann, ohne das erzeugte Wort zu verändern. Für den Beweis, dass diese Umbautechnik das Gewünschte leistet, wird eine wesentliche Eigenschaft von kontextfreien Grammatiken benötigt, die im nächsten Kapitel als *Kontextfreiheitslemma* formuliert ist.

11 Kontextfreiheitslemma

Da die linke Seite einer kontextfreien Regel nur aus einem Zeichen besteht, ist die Stelle eines Wortes, auf die diese Regel angewendet wird, in einem sehr strengen Sinn lokalisierbar: Wenn das Wort zerteilt wird, ist das ersetzte Zeichen in genau einem der Teile.

Auf Ableitungen übertragen, bedeutet das, dass die einzelnen Ableitungsschritte auf Teile des Ausgangswortes verteilbar sind, wobei eine horizontale Zerlegung von Ableitungen entsteht. Diese als Kontextfreiheitslemma bezeichnete Eigenschaft ist recht offensichtlich, hat aber viele interessante Konsequenzen. Beispielsweise erhält man eine kubische Lösung des Wortproblems kontextfreier Grammatiken (siehe Kapitel 15).

Theorem 12 (Kontextfreiheitslemma)
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik, $u \xrightarrow[P]{n} v$ eine Ableitung der Länge n und $u = u_1 u_2 \cdots u_k$ eine Zerlegung von u in k Teilwörter.
Dann gibt es k Ableitungen $u_i \xrightarrow[P]{n_i} v_i$, so dass $v = v_1 \cdots v_k$ und $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$.

Beweis (mit Induktion über n).

IA: $n = 0$. Dann wähle $v_i = u_i$ und $u_i \xrightarrow[P]{0} u_i$.

IV: Die Behauptung gelte für n.

IS: Betrachte $u \xrightarrow[P]{n+1} v$. Der erste Schritt hat dann die Form $u = u'Au'' \underset{A::=r}{\longrightarrow} u'ru'' = \bar{u}$. Da A ein einzelnes Zeichen ist, existiert ein i_0, so dass $u_{i_0} = u'_{i_0} A u''_{i_0}$ und $u' = u_1 \cdots u_{i_0-1} u'_{i_0}$ sowie $u'' = u''_{i_0} u_{i_0+1} \cdots u_k$. Wähle nun $\bar{u}_i = u_i$ für $i \neq i_0$ und $\bar{u}_{i_0} = u'_{i_0} r u''_{i_0}$, so dass insbesondere $u_{i_0} \underset{A::=r}{\longrightarrow} \bar{u}_{i_0}$ gilt. Außerdem gilt nach Konstruktion:

$$\bar{u} = u'ru'' = u_1 \cdots u_{i_0-1} u'_{i_0} r u''_{i_0} u_{i_0+1} \cdots u_k = \bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k.$$

Auf die restlichen n Ableitungsschritte $\bar{u} \xrightarrow[P]{n} v$ ist nun die Induktionsvoraussetzung anwendbar, was Ableitungen $\bar{u}_i \xrightarrow[P]{n_i} v_i$ mit $v = v_1 \cdots v_k$ und $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ ergibt. Für i_0 kann das zu $u_{i_0} \underset{A::=r}{\longrightarrow} \bar{u}_{i_0} \xrightarrow[P]{n_{i_0}} v_{i_0}$, einer Ableitung der Länge $n_{i_0} + 1$, zusammengesetzt werden. Für $i \neq i_0$ können die Ableitungen wegen $u_i = \bar{u}_i$ bleiben, wie sie sind. Die Zerlegung von v bleibt unverändert, die Summe der Ableitungslängen ergibt $n + 1$. Damit ist alles gezeigt. □

Es sei noch angemerkt, dass die Umkehrung des Kontextfreiheitslemmas für alle Chomsky-Grammatiken gilt. Ableitungen $u_i \xrightarrow[P]{n_i} v_i$ für $i = 1, \ldots, k$ können immer zu einer Ableitung $u = u_1 \cdots u_k \xrightarrow[P]{n} v_1 \cdots v_k = v$ mit $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ zusammengesetzt werden.

12 Linksableitungen

Wenn man in einer kontextfreien Grammatik beim Ableiten in jedem Schritt das ganz links stehende nichtterminale Zeichen ersetzt, spricht man von Linksableitungen.[5] Trennt

[5] In der Literatur ist es auch gebräuchlich, eine Ableitung Linksableitung zu nennen, wenn alle nichtterminalen Zeichen links vom gerade ersetzten im Rest der Ableitung nicht mehr ersetzt werden. Bei Ableitungen von terminalen Wörtern macht das keinen Unterschied, aber für den Nachweis der Korrektheit von Theorem 11 ist diese Definition weniger geeignet.

man dabei die links stehenden terminalen Zeichen vorher ab, so handelt es sich gerade um Schritte, die der aus einer kontextfreien Grammatik konstruierte Kellerautomat auf dem Keller vollführt. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass jede Ableitung einer kontextfreien Grammatik in eine Linksableitung umgebaut werden kann. Es stellt sich also heraus, dass das Ableiten in der Grammatik dieselbe Leistungsfähigkeit hat wie das Bilden von Folgekonfigurationen im zugehörigen Kellerautomaten.

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Eine *Linksableitung* ist eine Ableitung $u_1 \underset{P}{\longrightarrow} u_2 \underset{P}{\longrightarrow} \cdots \underset{P}{\longrightarrow} u_n$, bei der in jedem Schritt $u_i \xrightarrow[A_i ::= v_i]{} u_{i+1}$ $(1 \leq i < n)$ das am weitesten links stehende Nichtterminal ersetzt wird, d.h. $u_i = x_i A_i y_i$ und $u_{i+1} = x_i v_i y_i$ mit $x_i \in T^*$. Um anzudeuten, dass eine Ableitung eine Linksableitung ist, wird der Pfeil $\underset{\ell}{\longrightarrow}$ statt $\longrightarrow$ verwendet.

Das folgende Lemma impliziert, dass man sich bei kontextfreien Grammatiken auf die Betrachtung von Linksableitungen beschränken kann, ohne dass dies eine Auswirkung auf die erzeugte Sprache hat.

Lemma 13
Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Dann lässt sich jede Ableitung $A \overset{*}{\underset{P}{\longrightarrow}} v$ mit $A \in N$, $v \in T^*$ in eine Linksableitung $A \overset{*}{\underset{P}{\underset{\ell}{\longrightarrow}}} v$ umformen.

Beweis (Per Induktion über die Länge von Ableitungen).

IA: Eine Ableitung $A \overset{0}{\underset{P}{\longrightarrow}} v$ mit $v \in T^*$ existiert nicht, also muss nichts gezeigt werden.

IV: Gelte die Behauptung für alle Ableitungen der Länge $\leq n$.

IS: Betrachte eine Ableitung $A \underset{P}{\longrightarrow} u \overset{n}{\underset{P}{\longrightarrow}} v$. Dann lässt u sich in $u = u_0 A_1 u_1 \cdots A_m u_m$ mit $u_0, \ldots, u_m \in T^*$ und $A_1, \ldots, A_m \in N$ zerlegen. Für $i = 0, \ldots, m$ gilt $u_i \overset{0}{\underset{P}{\longrightarrow}} u_i$ und aufgrund des Kontextfreiheitslemmas auch $A_i \overset{n_i}{\underset{P}{\longrightarrow}} v_i$ für $i = 1, \ldots, m$, wobei $v = u_0 v_1 u_1 \cdots v_m u_m$ und $n_i \leq \sum_{i=1}^{m} n_i = n$. Also kann nach Induktionsvoraussetzung jede der Ableitungen $A_i \overset{n_i}{\underset{P}{\longrightarrow}} v_i$ in eine Linksableitung $A_i \overset{*}{\underset{P}{\underset{\ell}{\longrightarrow}}} v_i$ umgeformt werden. In der richtigen Reihenfolge zusammengesetzt, erhält man

$$\begin{aligned}
A &\underset{P}{\underset{\ell}{\longrightarrow}} u_0 A_1 u_1 \cdots A_m u_m \\
&\overset{*}{\underset{P}{\underset{\ell}{\longrightarrow}}} u_0 v_1 u_1 A_2 u_2 \cdots A_m u_m \\
&\overset{*}{\underset{P}{\underset{\ell}{\longrightarrow}}} u_0 v_1 u_1 v_2 u_2 A_3 u_3 \cdots A_m u_m \\
&\vdots \\
&\overset{*}{\underset{P}{\underset{\ell}{\longrightarrow}}} u_0 v_1 u_1 \cdots v_m u_m \,,
\end{aligned}$$

also insgesamt eine Linksableitung $A \overset{*}{\underset{P}{\underset{\ell}{\longrightarrow}}} v$. □

13 Korrektheit der Übersetzung von kontextfreien Grammatiken in Kellerautomaten

In diesem Kapitel wird der Beweis für Theorem 11 nachgeliefert. Dazu wird zunächst der enge Zusammenhang zwischen dem Ableiten in einer kontextfreien Grammatik und dem Bilden von Folgekonfigurationen in dem zugehörigen Kellerautomat festgehalten.

Sei in diesem Kapitel $G = (N, T, P, S)$ eine gegebene kontextfreie Grammatik und $PDA(G)$, der zu ihr gehörige Kellerautomat, wie in Abschnitt 10.1 definiert.

Lemma 14
Sei $w \in (N \cup T)^*$. Wenn es eine Linksableitung $S \overset{*}{-\ell\rightarrow} w = u\bar{u}$ gibt, wobei $u \in T^*$ das längste terminale Anfangsstück von w ist, dann gibt es für beliebiges $v \in T^*$ eine Konfigurationsfolge $(s_0, uv, S\,c_{OK}) \overset{*}{\vdash\!\!-} (s_0, v, \bar{u}\,c_{OK})$.

Beweis (mittels Induktion über die Ableitungslänge).

IA: Für $S \overset{0}{-\ell\rightarrow} w$ gilt $w = S$, d.h. $u = \lambda$ und $\bar{u} = S$, und daher

$$(s_0, uv, S\,c_{OK}) = (s_0, v, \bar{u}\,c_{OK}) \overset{0}{\vdash\!\!-} (s_0, v, \bar{u}\,c_{OK}).$$

IV: Die Behauptung gelte für alle Linksableitungen der Länge n.

IS: Betrachte nun eine Linksableitung $S \overset{n}{-\ell\rightarrow} u_1 A\bar{u}_1 -\ell\rightarrow u_1 r\bar{u}_1 = w$ der Länge $n+1$ und eine Zerlegung $w = u\bar{u}$, wobei u das längste terminale Anfangsstück von w ist. Da die Ableitung eine Linksableitung ist, gilt $u_1 \in T^*$. Also ist u_1 ein terminales Anfangsstück von w und damit auch Anfangsstück von u, d.h. es gibt ein $t \in T^*$ mit $u = u_1 t$ und $t\overline{u} = r\overline{u}_1$. Somit kann man die Konfigurationsfolge

$$\begin{array}{rcl}
(s_0, uv, S\,c_{OK}) & = & (s_0, u_1 tv, S\,c_{OK}) \\
 & \overset{*}{\vdash\!\!-} & (s_0, tv, A\overline{u}_1\,c_{OK}) \\
 & \vdash\!\!- & (s_0, tv, r\overline{u}_1\,c_{OK}) \\
 & = & (s_0, tv, t\overline{u}\,c_{OK}) \\
 & \overset{*}{\vdash\!\!-} & (s_0, v, \overline{u}\,c_{OK})
\end{array}$$

konstruieren, wobei sich die zweite Zeile aus der Anwendung der Induktionsvoraussetzung für die Linksableitung $S \overset{*}{-\ell\rightarrow} u_1 A\bar{u}_1$, die dritte Zeile aus Zeile (ii) der Definition von d_G und die letzte Zeile aus Zeile (iii) der Definition von d_G ergibt.

□

Lemma 15
Seien $u, v \in T^*$. Wenn es eine Konfigurationsfolge $(s_0, uv, S\,c_{OK}) \overset{*}{\vdash\!\!-} (s_0, v, \bar{u}\,c_{OK})$ gibt, dann auch eine Linksableitung $S \overset{*}{-\ell\rightarrow} u\bar{u}$.

Beweis (mittels Induktion über die Länge der Konfigurationsfolge).

IA: Für $(s_0, uv, S\,c_{OK}) \overset{0}{\vdash\!\!\!-} (s_0, v, \bar{u}\,c_{OK})$ gilt $u = \lambda$ und $\bar{u} = S$, woraus $S \overset{0}{-\ell\!\!\rightarrow} S = u\bar{u}$ folgt.

IV: Gelte die Behauptung für Konfigurationsfolgen der Länge n.

IS: Betrachte $(s_0, uv, S\,c_{OK}) \overset{n+1}{\vdash\!\!\!-} (s_0, v, \bar{u}\,c_{OK})$. Da die Zustandsüberführung nie c_0 auf den Keller schreibt, kann keine der Folgekonfigurationen nach Zeile (i) der Definition von d_G gebildet worden sein. Damit scheidet auch Zeile (iv) aus, denn sonst würde c_{OK} nicht mehr auf den Keller stehen. Also ist die letzte Folgekonfiguration nach Zeile (ii) oder (iii) der Definition von d_G gebildet worden.

1. Entsprechend Zeile (ii) hat die Konfigurationsfolge die Form

$$(s_0, uv, S\,c_{OK}) \overset{n}{\vdash\!\!\!-} (s_0, v, A\bar{u}_1\,c_{OK}) \vdash\!\!\!- (s_0, v, \bar{u}_0\bar{u}_1\,c_{OK}) = (s_0, v, \bar{u}\,c_{OK})$$

   und $A ::= \bar{u}_0$ ist eine Regel in P. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung für die Konfigurationsfolge $(s_0, uv, S\,c_{OK}) \overset{n}{\vdash\!\!\!-} (s_0, v, A\bar{u}_1\,c_{OK})$ ergibt sich dann die Linksableitung

$$S \overset{*}{-\ell\!\!\rightarrow} uA\bar{u}_1 -\ell\!\!\rightarrow u\bar{u}_0\bar{u}_1 = u\bar{u}.$$

2. Entsprechend Zeile (iii) hat die Konfigurationsfolge die Form

$$(s_0, uv, S\,c_{OK}) \overset{n}{\vdash\!\!\!-} (s_0, xv, x\bar{u}\,c_{OK}) \vdash\!\!\!- (s_0, v, \bar{u}\,c_{OK}).$$

   Dann hat also u die Form $u = u_0x$, und aus der Induktionsvoraussetzung für die Konfigurationsfolge $(s_0, u_0xv, S\,c_{OK}) \overset{n}{\vdash\!\!\!-} (s_0, xv, x\bar{u}\,c_{OK})$ ergibt sich die Linksableitung $S \overset{*}{-\ell\!\!\rightarrow} u_0x\bar{u} = u\bar{u}$. □

Mit Hilfe der beiden Lemmata kann nun folgendermaßen geschlossen werden.

Beweis von Theorem 11.
Sei $w \in L(G)$, d.h. $S \overset{*}{\longrightarrow} w$ und $w \in T^*$. Damit existiert nach Lemma 13 eine Linksableitung $S \overset{*}{-\ell\!\!\rightarrow} w$. Da w schon das längste terminale Anfangsstück von w ist, folgt mit Lemma 14, dass es eine Konfigurationsfolge $(s_0, w, S\,c_{OK}) \overset{*}{\vdash\!\!\!-} (s_0, \lambda, \lambda\,c_{OK})$ gibt, wobei $\bar{u} = \lambda$ sein muss und $v = \lambda$ gewählt wurde. Mit den Zeilen (i) und (iv) der Definition von d_G lässt sich diese Folgekonfigurationsbildung vorn und hinten verlängern zu:

$$(s_0, w, c_0) \vdash\!\!\!- (s_0, w, S\,c_{OK}) \overset{*}{\vdash\!\!\!-} (s_0, \lambda, c_{OK}) \vdash\!\!\!- (OK, \lambda, \lambda). \qquad (*)$$

Das bedeutet aber gerade $w \in L(PDA(G))$.

Sei umgekehrt $w \in L(PDA(G))$, d.h. $(s_0, w, c_0) \overset{*}{\vdash\!\!\!-} (OK, \lambda, \gamma)$ für irgendein γ. Das lässt sich immer in die Form $(*)$ zerlegen, denn der erste und letzte Schritt können nicht anders aussehen. Der mittlere Teil impliziert nach Lemma 15 $S \overset{*}{\longrightarrow} w\lambda = w$. Somit gilt $w \in L(G)$.

Insgesamt sind die beiden Sprachen also gleich. □

14 Von Kellerautomaten zu kontextfreien Grammatiken

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie sich Kellerautomaten in kontextfreie Grammatiken übersetzen lassen. Zusammen mit Theorem 11 bedeutet das, dass eine Sprache genau dann kontextfrei ist, wenn es einen Kellerautomaten gibt, der sie erkennt.

Die Übersetzung macht von zwei Beobachtungen Gebrauch, die auch für sich genommen von Interesse sind. Erstens können Kellerautomaten, ohne dass sich an der Mächtigkeit etwas ändert, auch so definiert werden, dass Endkonfigurationen die mit leerem Keller sind (wodurch die Endzustände redundant und damit verzichtbar werden). Zweitens können Konfigurationsfolgen abhängig vom Kellerinhalt der ersten Konfiguration in Teilfolgen zerlegt werden. Präziser ausgedrückt, gelten die in Lemma 16 und 17 formulierten Eigenschaften.

Lemma 16
Für jeden Kellerautomaten K gibt es einen Kellerautomaten K' mit $L(K') = L(K)$, so dass ein Wort u genau dann in $L(K')$ ist, wenn die Anfangskonfiguration für u in eine Konfiguration der Form (s, λ, λ) (mit beliebigem s) überführbar ist.

Beweis.
Sei $K = (Z, I, C, d, s_0, F, c_0)$ ein Kellerautomat, und seien $s_0', s_l, s_f \notin Z$ neue Zustände und $c_0' \notin C$ ein neues Kellersymbol. Der Kellerautomat $K' = (Z', I, C', d', s_0', F', c_0')$ wird so konstruiert, dass K' wie K arbeitet, sich jedoch im ersten Schritt den "Boden" des Kellers markiert, indem er dort das neue initiale Kellersymbol c_0' zurücklässt. Bei Erreichen eines Endzustandes von K kann K' (in dem dieser Zustand kein Endzustand ist) in den Zustand s_l übergehen, dessen Aufgabe es ist, den Keller zu leeren und bei Erreichen von c_0' in den neuen und einzigen Endzustand s_f von K' zu wechseln. Während dieser ganzen letzten Phase werden vom Eingabewort keine Zeichen mehr gelesen. Insgesamt wird erreicht, dass für alle Konfigurationsfolgen $(s_0', u, c_0') \vdash^* (s, v, \gamma)$ von K' genau dann $s \in F'$ gilt, wenn $\gamma = \lambda$ ist.

Dementsprechend ist $Z' = Z \cup \{s_0', s_l, s_f\}$, $C' = C \cup \{c_0'\}$ und $F = \{s_f\}$. Die Überführungsrelation d' von K' ist diejenige von K, erweitert um

- $d'(s_0', c_0') = (s_0, c_0 c_0')$,
- $(s_l, \lambda) \in d'(s, -, c)$ für alle $s \in F \cup \{s_l\}$ und $c \in C$ und
- $d'(s, -, c_0') = (s_f, \lambda)$ für alle $s \in F \cup \{s_l\}$.

Dann gilt $L(K') = L(K)$; auf den (einfachen) Beweis wird hier verzichtet. Nach Konstruktion hat K' die oben behauptete Eigenschaft, denn die einzige Möglichkeit, einen leeren Keller zu erhalten, ist durch die letzte Zeile der Definition von d' gegeben, welche gleichzeitig die einzige Möglichkeit darstellt, in den Endzustand s_f zu gelangen. □

Lemma 17
Sei $K = (Z, I, C, d, s_0, F, c_0)$ ein Kellerautomat. Seien weiter $z, z' \in Z$, $u \in I^*$ und $\gamma = c_1 \cdots c_n \in C^*$. Eine Konfigurationsfolge $(z, u, \gamma) \vdash^* (z', \lambda, \lambda)$ existiert genau dann,

wenn es Zustände $z_0, \ldots, z_n \in Z$ und eine Zerlegung $u = u_1 \cdots u_n$ von u in Teilwörter $u_1, \ldots, u_n$ gibt, so dass $z = z_0$, $z' = z_n$ und $(z_{i-1}, u_i, c_i) \vdash^* (z_i, \lambda, \lambda)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Beweis.
"$\Leftarrow$": Wenn für $i = 1, \ldots, n$ Konfigurationsfolgen $(z_{i-1}, u_i, c_i) \vdash^* (z_i, \lambda, \lambda)$ existieren, dann nach Definition von Konfigurationsfolgen auch eine Folge

$$(z_0, u_1 \cdots u_n, c_1 \cdots c_n) \vdash^* (z_1, u_2 \cdots u_n, c_2 \cdots c_n) \vdash^* \cdots \vdash^* (z_n, \lambda, \lambda).$$

(Wer daran zweifelt, kann es zur Übung per Induktion nachweisen. Wenn man es ganz korrekt machen will, muss man dazu allerdings zwei Induktionen schachteln: Die äussere geht über n, die innere über die Länge der ersten Konfigurationsfolge.)

"$\Rightarrow$": Diese Richtung wird mittels Induktion über n bewiesen.

IA: Für $n = 0$ ist $\gamma = \lambda$, und die Folge $(z, u, \lambda) \vdash^* (z', \lambda, \lambda)$ kann nur $(z, \lambda, \lambda) \vdash^0 (z, \lambda, \lambda)$ sein, so dass die Behauptung mit $z = z_0 = z'$ erfüllt ist.

IV: Gelte die Behauptung für n.

IS: Da die betrachtete Konfigurationsfolge mit dem Kellerinhalt $\gamma = c_1 \cdots c_{n+1}$ anfängt und mit leerem Keller endet, muss sie die Form

$$(z, u, \gamma) \vdash^* (z_1, u', c_2 \cdots c_{n+1}) \vdash^* (z', \lambda, \lambda)$$

haben, wobei $(z_1, u', c_2 \cdots c_{n+1})$ die erste Konfiguration mit n Kellersymbolen ist. Da Konfigurationsübergänge nach Definition von $\vdash$ nur vom Zustand, vom obersten Kellersymbol und vom ersten Zeichen der verbleibenden Wortes abhängen, gilt somit auch $(z_0, u_1, c_1) \vdash^* (z_1, \lambda, \lambda)$, wobei $z_0 = z$ und $u = u_1 u'$ ist. Die Induktionsvoraussetzung, angewendet auf $(z_1, u', c_2 \cdots c_{n+1}) \vdash^* (z', \lambda, \lambda)$, liefert die restlichen benötigten Teilfolgen $(z_1, u_2, c_2) \vdash^* (z_2, \lambda, \lambda)$, $\ldots$, $(z_n, u_{n+1}, c_{n+1}) \vdash^* (z_{n+1}, \lambda, \lambda)$, wobei $z_{n+1} = z'$ ist. □

Die beiden Lemmata liefern alles Nötige für die Übersetzung von Kellerautomaten in kontextfreie Grammatiken.

Theorem 18
Für jeden Kellerautomaten K gibt es eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L(K)$.

Beweis.
O.B.d.A. hat $K = (Z, I, C, d, s_0, F, c_0)$ die in Lemma 16 angegebene Form. Die Konstruktion von G basiert auf der Idee, Nichtterminale der Form $<z, c, z'>$ mit $z, z' \in Z$ und $c \in C$ zu verwenden, aus denen die Produktionen alle Wörter $u \in I^*$ abzuleiten erlauben, für die es eine Konfigurationsfolge $(z, u, c) \vdash^* (z', \lambda, \lambda)$ gibt. Lemma 17 zufolge ist dies durch folgende Produktionsmenge P zu realisieren:

Für alle $z \in Z$, $a \in I \cup \{-\}$, $c \in C$, $(z_0, c_1 \cdots c_n) \in d(z, a, c)$ und alle $z_1, \ldots, z_n \in Z$ enthält P die Produktion

$$<z, c, z_n> ::= a <z_0, c_1, z_1> \cdots <z_{n-1}, c_n, z_n> \text{ falls } a \in I$$

und die Produktion

$$<z, c, z_n> ::= <z_0, c_1, z_1> \cdots <z_{n-1}, c_n, z_n> \text{ falls } a = -.$$

Für $n = 0$ sind dies terminierende Produktionen.

Durch Induktion über k wird nun für alle $z, z' \in Z$, $c \in C$ und $u \in I^*$ gezeigt, dass eine Ableitung $<z, c, z'> \xrightarrow[P]{k} u$ genau dann existiert, wenn $(z, u, c) \overset{k}{\vdash\!\!\!-} (z', \lambda, \lambda)$ gilt.

IA: Für $k = 0$ gilt die Behauptung, da es weder eine solche Ableitung noch eine solche Konfigurationsfolge gibt.

IV: Sei $k \in \mathbb{N}$ und gelte die Behauptung für alle $j \leq k$.

IS: Für $k + 1$ sind zwei Fälle zu betrachten.

Eine Ableitung

$$<z, c, z'> \xrightarrow[P]{} a <z_0, c_1, z_1> \cdots <z_{n-1}, c_n, z_n> \xrightarrow[P]{k} a u_1 \cdots u_n = u$$

mit den Teilableitungen $<z_{i-1}, c_i, z_i> \xrightarrow[P]{m_i} u_i$ (wobei $z_n = z'$) gibt es genau dann, wenn $(z_0, c_1 \cdots c_n) \in d(z, a, c)$ gilt und außerdem für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ Konfigurationsfolgen $(z_{i-1}, u_i, c_i) \overset{m_i}{\vdash\!\!\!-} (z_i, \lambda, \lambda)$ existieren (wobei Letzteres die Induktionsvoraussetzung benutzt). Nach Lemma 17 ist dies genau dann der Fall, wenn die Konfigurationsfolge

$$(z, u, c) \vdash\!\!\!- (z_0, u_1 \cdots u_n, c_1 \cdots c_n) \overset{m_1}{\vdash\!\!\!-} (z_1, u_2 \cdots u_n, c_2 \cdots c_n) \overset{m_2}{\vdash\!\!\!-} \cdots \overset{m_n}{\vdash\!\!\!-} (z_n, \lambda, \lambda)$$

existiert.

Ein analoger Schluss zeigt, dass es eine Ableitung der Form

$$<z, c, z'> \xrightarrow[P]{} <z_0, c_1, z_1> \cdots <z_{n-1}, c_n, z_n> \xrightarrow[P]{k} u_1 \cdots u_n = u$$

genau dann gibt, wenn die Konfigurationsfolge

$$(z, u, c) \vdash\!\!\!- (z_0, u_1 \cdots u_n, c_1 \cdots c_n) \overset{m_1}{\vdash\!\!\!-} (z_1, u_2 \cdots u_n, c_2 \cdots c_n) \overset{m_2}{\vdash\!\!\!-} \cdots \overset{m_n}{\vdash\!\!\!-} (z_n, \lambda, \lambda)$$

existiert, was den Induktionsbeweis abschließt.

Definiere nun $G = (\{S\} \cup Z \times C \times Z, I, P_0 \cup P, S)$ mit $P_0 = \{S ::= <s_0, c_0, s> \mid s \in Z\}$. Dann ergibt sich zusammen mit dem oben Bewiesenen für alle $u \in I^*$

$$\begin{aligned} u \in L(G) \quad &\Longleftrightarrow \quad <s_0, c_0, s> \xrightarrow{*} u \quad \text{für ein } s \in Z \\ &\Longleftrightarrow \quad (s_0, u, c_0) \overset{*}{\vdash\!\!\!-} (s, \lambda, \lambda) \quad \text{für ein } s \in Z \\ &\Longleftrightarrow \quad u \in L(K), \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

15 Das Cocke-Kasami-Younger-Verfahren

Das Verfahren von Cocke, Kasami und Younger ist eine Lösung des Wortproblems kontextfreier Grammatiken in Chomsky-Normalform. Es beruht auf dem Kontextfreiheitslemma und hat kubischen Aufwand.

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik in *Chomsky-Normalform*,[6] d.h. für jede Produktion $A ::= r$ ist $r \in T$ oder $r \in N^2$. Will man wissen, ob ein Wort $w \in T^*$ aus einem nichtterminalen Zeichen $A \in N$ ableitbar ist, ob also $A \xrightarrow{*} w$ gilt, gibt es nur zwei relevante Fälle, in denen die Antwort positiv ausfällt:

1. $|w| = 1$ und $A ::= w \in P$ oder
2. $|w| > 1$ und es existieren $A ::= BC \in P$ sowie $B \xrightarrow{*} u$, $C \xrightarrow{*} v$ mit $w = uv$.

Wegen der Chomsky-Normalform leitet kein nichtterminales Zeichen das leere Wort ab. Außerdem hat die Ableitung $A \xrightarrow{*} w$ immer mindestens einen ersten Schritt $A \longrightarrow r$ für $A ::= r \in P$. Ist $r \in T$, muss die restliche Ableitung $r \xrightarrow{*} w$ die Länge 0 haben, d.h. $r = w$. Ist $r = BC$ für $B, C \in N$, dann induziert die restliche Ableitung $r = BC \xrightarrow{*} w$ nach dem Kontextfreiheitslemma zwei Ableitungen $B \xrightarrow{*} u$ und $C \xrightarrow{*} v$ mit $w = uv$. Außerdem hat damit w mindestens die Länge 2. Das ergibt insgesamt die beiden genannten Fälle, wenn man beachtet, dass die jeweiligen Rückrichtungen offensichtlich sind.

Um also für terminale Wörter der Länge 1 die Ableitbarkeit aus einem nichtterminalen Zeichen zu prüfen, muss man nur die terminierenden Regeln anschauen. Um sie für längere Wörter zu prüfen, muss man die nichtterminalen Regeln anschauen und das Wort in zwei Teile teilen. Das Anfangsstück muss aus dem ersten, das Endstück aus dem zweiten nichtterminalen Zeichen der rechten Regelseite ableitbar sein. Das ist dieselbe Frage, aber für kürzere Wörter, so dass diese Rekursion nach endlich vielen Schritten abbricht. Beachtet man noch, dass bei weiteren Zerlegungen der Wörter beliebige Teilwörter des ursprünglichen Wortes entstehen können, erhält man folgende Formulierung der obigen beiden Fälle, wobei als Gesamtwort $x_1 \cdots x_n$ (mit $x_l \in T$ für $l = 1, \ldots, n$) und als Teilwort $x_i \cdots x_{i+j-1}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, n - i + 1$ betrachtet werden:

$A \xrightarrow{*} x_i \cdots x_{i+j-1}$ gdw.

- $j = 1$ und $A ::= x_i \in P$ oder
- $j > 1$, $A ::= BC \in P$ und es existiert k mit $1 \leq k < j$ derart, dass $B \xrightarrow{*} x_i \cdots x_{i+k-1}$ und $C \xrightarrow{*} x_{i+k} \cdots x_{i+j-1}$.

Das liefert ein Verfahren, um die nichtterminalen Zeichen zu bestimmen, aus denen sich Teilwörter von $x_1 \cdots x_n$ ableiten lassen.

[6] Zu jeder kontextfreien Grammatik, die nicht das leere Wort erzeugt, kann eine kontextfreie Grammatik in dieser Form konstruiert werden, die dieselbe Sprache erzeugt. Genaueres lässt sich z.B. in [HU69, Abschnitt 4.4 und 4.5] oder [EP00, Abschnitt 6.2 und 6.3] nachlesen.

Seien für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, n - i + 1$

$$CELL_{i,j} = \{A \in N \mid A \xrightarrow{*} x_i \cdots x_{i+j-1}\}.$$

Dann können diese "Zellen" nach der obigen Überlegung folgendermaßen berechnet werden:

- Für $i = 1, \ldots, n$: $CELL_{i,1} = \{A \in N \mid A ::= x_i \in P\}$;
- für $j = 2, \ldots, n$ und $i = 1, \ldots, n - j + 1$:

$$CELL_{i,j} = \bigcup_{k=1}^{j-1} \{A \in N \mid A ::= BC \in P,\ B \in CELL_{i,k},\ C \in CELL_{i+k,j-k}\}.$$

Damit ist auch das Wortproblem für G gelöst, denn es gilt:

$$x_1 \cdots x_n \in L(G) \text{ gdw. } S \xrightarrow{*} x_1 \cdots x_n \text{ gdw. } S \in CELL_{1,n}.$$

Da es für jedes $j = 1, \ldots, n$ jeweils $n - j + 1$ Zellen mit j als zweitem Index gibt, müssen insgesamt

$$\sum_{j=1}^{n} (n - j + 1) = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Zellen berechnet werden. Für die Zellen $CELL_{i,1}$ geht das in konstanter Zeit, weil nur die gegebenen terminierenden Produktionen inspiziert werden müssen (höchstens $\#N \cdot \#T$ viele). Um eine Zelle $CELL_{i,j}$ mit $j > 1$ zu bilden, muss man für $k = 1, \ldots, j - 1$ auf die Zellenpaare $CELL_{i,k}$ und $CELL_{i+k,j-k}$ zugreifen. Man kann annehmen, dass die bereits berechnet sind, weil ihre zweiten Indizes kleiner als das aktuelle j sind. Jede dieser Zellen enthält eine beschränkte Zahl von nichtterminalen Zeichen (höchstens $\#N$ viele). Aus den $j - 1$ Zellenpaaren sind die beschränkt vielen Elementpaare zu bilden (höchstens $\#N^2$ viele) und mit den rechten Seiten der nichtterminalen Produktionen (höchstens $\#N^3$ viele) zu vergleichen. Da $j \leq n$ ist, sind für die $O(n^2)$ vielen Zellen höchstens $O(n)$ viele konstante Aktionen erforderlich, was einen Gesamtaufwand von $O(n^3)$ ergibt.

16 Ableitungsbäume

Die Tatsache, dass das Wortproblem kontextfreier Sprachen mit Hilfe von Kellerautomaten gelöst werden kann, liegt wesentlich am Konzept der Linksableitungen. Denn sie erlauben, Ableitbarkeit und Erzeugbarkeit von Wörtern durch Operationen auf einem Keller zu realisieren. Ableitungsbäume sind ein vergleichbares Konzept zur Repräsentation kontextfreier Ableitungen. Die Konstruktion von Ableitungsbäumen beruht auf dem Kontextfreiheitslemma und gestattet, bekannte Eigenschaften von Bäumen für die Untersuchung von Ableitungen zu nutzen.

Um das zu demonstrieren, werden einige Beispiele für die vorteilhafte Nutzung der Baumstruktur gegeben. Sie alle werden im Kapitel 17 zum Nachweis des Pumping-Lemmas für

kontextfreie Sprachen verwendet. In Abschnitt 16.2 wird nachgewiesen, dass man aus der Länge des Resultats eines Ableitungsbaumes dessen Höhe abschätzen kann. In Abschnitt 16.3 wird zu jedem Ableitungsbaum ein Weg von der Wurzel zu einem Blatt konstruiert, der so lang ist, wie der Baum hoch ist. In Abschnitt 16.4 schließlich werden das An- und Abhängen von Ableitungsbäumen betrachtet.

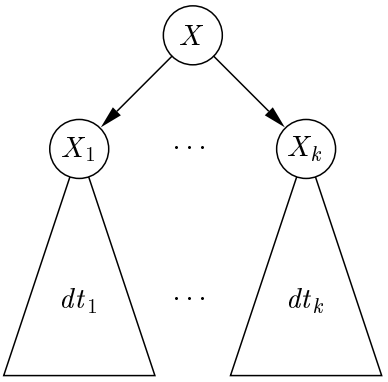
16.1 Konstruktion

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik ohne λ-Produktionen, d.h. ohne Produktionen mit dem leeren Wort als rechter Seite.

Dann kann jeder Ableitung $X \xrightarrow{*} w$, die in einem einzelnen Symbol X beginnt, folgendermaßen rekursiv ein *Ableitungsbaum* $dt(X \xrightarrow{*} w)$ zugeordnet werden (wobei dt sich auf die englische Bezeichnung *derivation tree* für Ableitungsbaum bezieht):

(i) Für $X \xrightarrow{0} X$ mit $X \in N \cup T$ besteht der zugeordnete *Ableitungsbaum* aus einem mit X markierten Knoten mit der *Höhe* 0 und X als *Resultat*. Der einzelne Knoten ist sowohl *Wurzel* als auch *Blatt*. Dieser Ableitungsbaum wird mit $dt(X \xrightarrow{0} X)$ bezeichnet.

(ii) Für $X \xrightarrow{n+1} U$ sei $X ::= X_1 \cdots X_k$ mit $X_i \in N \cup T$ die erste angewendete Regel, und seien $X_i \xrightarrow{n_i} U_i$ die korrespondierenden Ableitungen gemäß dem Kontextfreiheitslemma. Wegen $n_i \leq n$ kann angenommen werden, dass Ableitungsbäume $dt_i = dt(X_i \xrightarrow{n_i} U_i)$ mit einer jeweiligen Höhe, U_i als Resultat und einem Knoten X_i als Wurzel bereits existieren. Dann hat der Ableitungsbaum $dt(X \xrightarrow{n+1} U)$ die Form



mit einer *Höhe*, die um 1 größer als die größte Höhe der angehängten Ableitungsbäume dt_i ist, mit U als *Resultat*, dem obersten Knoten als *Wurzel* und den Blättern der angehängten Teilbäume als *Blätter*.

Ist dt ein Ableitungsbaum und bezeichnet man seine Höhe mit $height(dt)$ und sein Resultat mit $res(dt)$, so gilt nach Konstruktion:

(i) $height(dt(X \xrightarrow{0} X)) = 0$ und $res(dt(X \xrightarrow{0} X)) = X$,

(ii) $height(dt(X \xrightarrow{n+1} U)) = 1 + \max\{height(dt_i) \mid i = 1, \ldots, k\}$ und
$res(dt(X \xrightarrow{n+1} U)) = U = U_1 \cdots U_k = res(dt_1) \cdots res(dt_k)$.

16.2 Beziehung zwischen Baumhöhe und Resultatslänge

Gemäß der rekursiven Definition erhöht sich die Höhe um 1, wenn man k Bäume an eine Wurzel hängt, während sich die Länge des Resultats als Summe der Längen der Resultate der angehängten Bäume ergibt. Daraus ergibt sich folgende Beziehung zwischen Höhe und Resultatslänge.

Sei b die Länge der längsten rechten Seite von Produktionen aus P. Dann gilt für alle Ableitungsbäume dt:

$$|res(dt)| \leq b^{height(dt)}.$$

Beweis (mit Induktion über die Höhe).

IA: $height(dt) = 0$ bedeutet $dt = dt(X \xrightarrow{0} X)$ für ein geeignetes $X \in N \cup T$. Somit gilt:

$$|res(dt)| = |res(dt(X \xrightarrow{0} X))| = |X| = 1 \leq 1 = b^0 = b^{height(dt)}.$$

IV: Die Behauptung gelte für alle Höhen bis m.

IS: Betrachte nun $height(dt) = m + 1$. Gemäß der rekursiven Definition korrespondiert dt zu einer Ableitung $X \xrightarrow{n+1} U$ (mit $n \geq m$), einer ersten Regelanwendung $X \longrightarrow X_1 \cdots X_k$ und induzierten Ableitungen $X_i \xrightarrow{n_i} U_i$ $(i = 1, \ldots, k)$. Bezeichne jeweils dt_i den korrespondierenden Ableitungsbaum $dt(X_i \xrightarrow{n_i} U_i)$. Wegen

$$height(dt) = 1 + \max\{height(dt_i) \mid i = 1, \ldots, k\}$$

ist dann $height(dt_i) \leq m$, so dass nach Induktionsvoraussetzung für alle $i = 1, \ldots, k$ gilt:

$$|res(dt_i)| \leq b^{height(dt_i)}.$$

Daraus folgt wunschgemäß:

$$\begin{aligned}
|res(dt)| &= |res(dt_1) \cdots res(dt_k)| \\
&= \sum_{i=1}^{k} |res(dt_i)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} b^{height(dt_i)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} b^m \\
&= k \cdot b^m \\
&\leq b \cdot b^m \\
&= b^{height(dt)}.
\end{aligned}$$

□

16.3 Ein langer Weg von der Wurzel zu einem Blatt

In jedem Baum gibt es mindestens einen Weg von der Wurzel zu einem Blatt, der so lang ist, wie der Baum hoch ist.

Sei dt ein Ableitungsbaum. Dann gibt es in dt einen Weg

$$A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_l$$

mit $l = \mathit{height}(dt)$, wobei der erste Knoten die Wurzel und der letzte ein Blatt ist.

Beweis (mit Induktion über die Höhe).

IA: $\mathit{height}(dt) = 0$ bedeutet $dt = dt(X \xrightarrow{0} X)$ für ein $X \in N \cup T$. Als Weg der Länge 0 kann (und muss) man dann den einzigen Knoten wählen, d.h. $A_0 = X$.

IV: Die Behauptung gelte für alle Ableitungsbäume der Höhe m.

IS: Betrachte einen Ableitungsbaum dt mit $\mathit{height}(dt) = m+1$. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis in Abschnitt 16.2 gibt es dann ein i_0, so dass $\mathit{height}(dt_{i_0}) = m$ ist, sowie eine Kante von der Wurzel von dt zur Wurzel von dt_{i_0}. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es in dt_{i_0} einen Weg

$$A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{m+1}$$

wobei der erste Knoten die Wurzel von dt_{i_0} ist, d.h. insbesondere $A_1 = X_{i_0}$, und der letzte Knoten ein Blatt von dt_{i_0} ist. Dieser Knoten ist auch ein Blatt von dt, so dass der gesuchte Weg entsteht, wenn man die eine Kante davorsetzt, wobei man $A_0 = X$ wählt. □

16.4 Anhängen und Abhängen von Ableitungsbäumen

Nach Konstruktion führt von der Wurzel eines Ableitungsbaumes genau eine Kante zu der Wurzel jedes angehängten Ableitungsbaumes, was rekursiv bedeutet, dass von der Wurzel zu jedem Knoten genau ein Weg führt und jeder Knoten Wurzel genau eines Teilbaumes ist. Wenn man den abhängt (bis auf seine Wurzel), bleibt wieder ein Ableitungsbaum übrig. Genauer gilt für $dt = dt(X \xrightarrow{*} U)$ und für einen Weg

$$X \longrightarrow A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_l$$

von der Wurzel zu einem Knoten folgendes:

Es existieren Ableitungen $X \xrightarrow{*} U_1 A_l U_3$ und $A_l \xrightarrow{*} U_2$, so dass $dt_2 = dt(A_l \xrightarrow{*} U_2)$ der Teilbaum von dt ist, der A_l als Wurzel hat, und $dt_1 = dt(X \xrightarrow{*} U_1 A_l U_3)$ der Baum ist, der durch Löschen von dt_2 aus dt entsteht. Insbesondere liegt der obige Weg auch in dt_1 und führt dort zu einem Blatt.

Sind umgekehrt dt_1 und dt_2 mit dem obigen Weg in dt_1 von der Wurzel zu einem Blatt gegeben, kann man dt_2 an das Blatt A_l von dt_1 hängen, und man erhält einen Ableitungsbaum $dt_3 = dt(X \xrightarrow{*} U_1 A_l U_3 \xrightarrow{*} U_1 U_2 U_3)$. Sind dt_1 und dt_2 die beiden Bäume, die beim Abhängen aus dt entstehen, dann gilt $dt_3 = dt$ und damit insbesondere $U = U_1 U_2 U_3$.

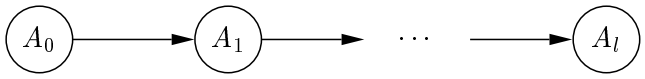
Auf die vollständige Formalisierung dieser beiden Konstruktionen wird hier verzichtet.

17 Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen

In diesem Abschnitt wird ein Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen formuliert und bewiesen. Analog zum Pumping-Lemma für reguläre Sprachen in Abschnitt 6.3[7] eignet es sich zum Nachweis, dass bestimmte Sprachen nicht kontextfrei sind.

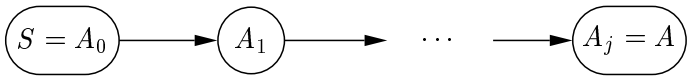
Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen beruht darauf, dass beim Erkennen eines genügend langen Wortes in einem endlichen Automaten eine Zustandsfolge durchlaufen wird, die einen Kreis enthält. Übertragen auf rechtslineare Grammatiken heißt das, dass es Ableitungen der Form $S \xrightarrow{*} xA$, $A \xrightarrow{*} yA$ und $A \xrightarrow{*} z$ mit $x, y, z \in T^*$ und $|y| > 0$ gibt, woraus sich Ableitungen der Form $S \xrightarrow{*} xy^i z$ für $i \in \mathbb{N}$ bilden lassen. Bei beliebigen kontextfreien Grammatiken kann man nicht erwarten, dass das nichtterminale Zeichen A immer ganz rechts steht, sondern irgendwo im abgeleiteten Wort. Aber auch Ableitungen der Form $S \xrightarrow{*} uAy$, $A \xrightarrow{*} vAx$ und $A \xrightarrow{*} w$ lassen sich zu Ableitungen $S \xrightarrow{*} uv^i wx^i y$ für $i \in \mathbb{N}$ zusammensetzen. Das ergibt ebenfalls einen Pumpeffekt, bei dem allerdings zwei Teilwörter gleichzeitig iteriert werden (wovon eines allerdings auch leer sein darf). Es bleibt, die drei Ableitungen zu finden. Der schwierige Teil dabei ist, ein A zu finden, das in einem seiner abgeleiteten Wörter wieder auftaucht. Um das zu erreichen, werden die Ergebnisse über Ableitungsbäume herangezogen.

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik ohne λ-Produktionen und Kettenregeln, d.h. ohne Produktionen mit dem leeren Wort oder einem einzelnen nichtterminalen Zeichen als rechter Seite. Für $z \in L(G)$ gibt es dann einen Ableitungsbaum $dt = dt(S \xrightarrow{*} z)$. Dessen Höhe ist nach Abschnitt 16.2 größer als $\#N$, falls $|z| > b^{\#N}$, wobei b wieder die Länge der längsten rechten Seite einer Produktion von G ist. Nach Abschnitt 16.3 gibt es dann in dt einen Weg von der Wurzel zu einem Blatt

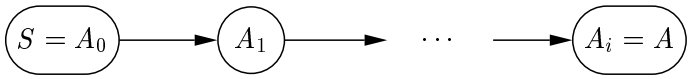


[7] Dort ist das Pumping-Lemma für die von endlichen Automaten erkannten Sprachen formuliert. Reguläre Sprachen sind genau die von endlichen Automaten erkannten; Regularität ist aber die viel griffigere Bezeichnung und wird deshalb hier verwendet.

mit $l = height(dt)$ und $A_0 = S$. Die l Zeichen $A_0, \ldots, A_{l-1}$ sind nichtterminal, weil in einem Ableitungsbaum höchstens Blätter terminal sind. Wegen $l > \#N$ muss es Indizes $i < j$ geben mit $A_i = A_j$. Dieses nichtterminale Zeichen wird im folgenden auch mit A bezeichnet. Nach Abschnitt 16.4 induziert der Teilweg



zwei Ableitungen $S \xrightarrow{*} z_1Az_2$ und $A \xrightarrow{*} w$, derart dass $z = z_1wz_2$ und der obige Teilweg in $dt_1 = dt(S \xrightarrow{*} z_1Az_2)$ liegt und dort von der Wurzel zu einem Blatt führt. Entsprechend induziert der Teilweg



zwei Ableitungen $S \xrightarrow{*} uAy$ und $A \xrightarrow{*} vAx$ mit $z_1Az_2 = uvAxy$. Beachte dabei, dass z_1 und z_2 terminal sind, weil z terminal ist, und dass deshalb auch u und y terminal sein müssen. Das nichtterminale Zeichen A in z_1Az_2 kann also nur in der zweiten Ableitung abgeleitet werden.

Damit sind die drei gesuchten Ableitungen gefunden. Daraus lassen sich induktiv Ableitungen der folgenden Form iterieren:

(i) $S \xrightarrow{*} uAy (= uv^0Ax^0y)$; und

(ii) wenn $S \xrightarrow{*} uv^iAx^iy$ bereits konstruiert ist, erhält man
$S \xrightarrow{*} uv^iAx^iy \xrightarrow{*} uv^ivAxx^iy = uv^{i+1}Ax^{i+1}y$.

Schließlich läßt sich jede dieser Ableitungen terminieren: $S \xrightarrow{*} uv^iAx^iy \xrightarrow{*} uv^iwx^iy$, so dass $uv^iwx^iy \in L(G)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ folgt.

Wegen $i < j$ ist $A \xrightarrow{*} vAx$ keine 0-Ableitung. Und da G keine Kettenregeln enthält, können v und x nicht beide leer sein; d.h. $vx \neq \lambda$.

Wählt man darüber hinaus den ursprünglichen Weg als den längstmöglichen und i ebenfalls so groß wie möglich, dann muss $l - i \leq \#N + 1$ gelten, weil sonst zwei andere Knoten unterhalb von i gleich markiert wären, was der Wahl von i widerspricht. Außerdem kann in dem Ableitungsbaum $dt_2 = dt(A \xrightarrow{*} vAx \xrightarrow{*} vwx)$ kein Weg länger als $\#N + 1$ sein, weil sonst der ursprüngliche Weg nicht der längste gewesen wäre. Dann ist dt_2 aber auch nicht höher, und vwx hat höchstens die Länge $b^{\#N+1}$.

Die vorausgehenden Überlegungen ergeben das folgende Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen.

Theorem 19
Zu jeder kontextfreien Sprache L existieren zwei natürliche Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

Ist $z \in L$ mit $|z| > p$, dann lässt sich z schreiben als $z = uvwxy$, wobei $|vwx| \leq q$ ist und $vx \neq \lambda$, und für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$uv^iwx^iy \in L.$$

Beweis.
Zu jeder kontextfreien Sprache L existiert eine kontextfreie Grammatik G ohne λ-Produktionen und Kettenregeln, derart dass $L(G) = L - \{\lambda\}$ gilt. Wählt man nun $p = b^{\#N}$ und $q = b^{\#N+1}$, wobei b die Länge der längsten rechten Seite der Produktionen von G ist, dann bilden die Überlegungen vor dem Theorem den Rest des Beweises. Beachte, dass es keine Rolle spielt, ob $\lambda \in L$ gilt, weil ohnehin nur Wörter ab einer bestimmten Länge pumpbar sein müssen. □

Korollar 20

1. *Die Sprache $L_0 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht kontextfrei.*
2. *Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen gegenüber Durchschnitt, d.h. es gibt kontextfreie Sprachen, deren Durchschnitt nicht kontextfrei ist.*

Beweis.

1. Angenommen, L_0 wäre kontextfrei. Seien p und q die zu L_0 gehörenden Zahlen aus dem Pumping-Lemma. Dann gibt es für $n \in \mathbb{N}$ mit $3n > p$ eine Zerlegung $a^n b^n c^n = uvwxy$, derart dass $uv^i wx^i y \in L$ für alle $i \geq 0$, $|vwx| \leq q$ und $vx \neq \lambda$.

   Enthielte v oder x a's und b's oder b's und c's, so käme in uv^2wx^2y im Widerspruch zur Definition von L_0 ein a hinter einem b bzw. ein b hinter einem c vor. Also ist $v = a^r$ oder $v = b^r$ oder $v = c^r$ und entsprechend $x = c^s$ oder $x = b^s$ oder $x = a^s$, wobei $r + s \geq 1$. Da v in z stets vor x liegt, sind das insgesamt sechs Fälle. Im Fall $v = a^r$ und $x = c^s$ gilt $u = a^j$, $w = a^k b^n c^l$, $y = c^m$ und $z = uvwxy = a^j a^r a^k b^n c^l c^s c^m$ mit $j + r + k = n = l + s + m$. Damit erhält man $uv^0wx^0y = a^j \lambda a^k b^n c^l \lambda c^m = a^{n-r} b^n c^{n-s} \in L_0$, was wegen $r + s \geq 1$ der Definition von L_0 widerspricht. Analog führen die anderen fünf Fälle zum Widerspruch.
2. Die durch die Produktionen $S_1 ::= S_1 c \mid A$ und $A ::= aAb \mid \lambda$ sowie $S_2 ::= aS_2 \mid B$ und $B ::= bBc \mid \lambda$ definierten Grammatiken erzeugen die kontextfreien Sprachen $L_1 = \{a^m b^m c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 = \{a^m b^n c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$, deren Durchschnitt gerade die nicht kontextfreie Sprache L_0 aus Punkt 1 ist. □

Mit Punkt 1 von Korollar 20 kann nun die zweite Aussage in Theorem 3, d.h. die Echtheit der Inklusion $\{L \setminus \{\lambda\} \mid L \in \mathcal{L}_2\} \subsetneqq \mathcal{L}_1$, bewiesen werden. Die Sprache L_0 wird nämlich von der Grammatik $G_0 = (\{A, B, C, S, X, Z\}, \{a, b, c\}, P_0, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &::= AZ \\ A &::= aABC \mid aX \\ CB &::= BC \\ XB &::= bX \\ CZ &::= Zc \\ XZ &::= bc \end{aligned}$$

erzeugt, die eine monotone Variante der Grammatik aus Abschnitt 2.2, Beispiel 6 ist. Somit gilt $L_0 \in \mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2$.

18 Ein unentscheidbares Problem für kontextfreie Grammatiken

Was verrät die Syntax über die Semantik? Das ist eine Kernfrage der Informatik, weil die semantische Ebene das Gewünschte und Interessierende repräsentiert, während nur die syntaktischen Beschreibungen explizit verfügbar sind. Das Halteproblem für Programme (und Turingmaschinen) und das Wortproblem für Grammatiken sind typische Probleme dieser Art.

Dummerweise sind viele semantische Fragen an syntaktischen Gebilden unentscheidbar – selbst dann noch, wenn man die Syntax stark einschränkt. Ein Beispiel dieser Art wird in diesem Kapitel für kontextfreie Grammatiken vorgestellt. Während das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken ($L(G) = \emptyset\,?$) entscheidbar ist, erweist sich bereits die Frage nach der Leerheit des Durchschnitts zweier kontextfreier Sprachen ($L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset\,?$) als unentscheidbar.

Um das zu beweisen, werden Postsche Korrespondenzprobleme, deren Lösbarkeit bekanntlich unentscheidbar ist, auf das Durchschnittsleerheitsproblem reduziert. Solche Reduktionen sind typisch für den Nachweis von Unentscheidbarkeit.

Betrachte dazu ein Postsches Korrespondenzproblem $PCP = ((u_1, \ldots, u_n), (v_1, \ldots, v_n))$ über dem Alphabet T. PCP ist lösbar, wenn es eine nichtleere Indexfolge $i_1 \cdots i_k$ mit $u_{i_1} \cdots u_{i_k} = v_{i_1} \cdots v_{i_k}$ gibt. Die Konkatenationen aus beiden Listen zu Indexfolgen lassen sich gleichzeitig kontextfrei erzeugen, wenn man die zweite Konkatenation transponiert. Die entsprechende Grammatik G_{PCP} hat folgende Produktionen:

$$\left.\begin{array}{l} S ::= u_i A\, \mathit{trans}(v_i) \\ A ::= u_i A\, \mathit{trans}(v_i) \mid \$ \end{array}\right\} \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Offensichtlich lassen sich damit aus S die terminalen Wörter der Form

$$u_{i_1} \cdots u_{i_k} \$\, \mathit{trans}(v_{i_k}) \cdots \mathit{trans}(v_{i_1}) = u_{i_1} \cdots u_{i_k} \$\, \mathit{trans}(v_{i_1} \cdots v_{i_k})$$

ableiten. Mit anderen Worten ist PCP genau dann lösbar, wenn $L(G_{PCP})$ ein Wort der Form $w\$\, \mathit{trans}(w)$ enthält.

Solche Wörter lassen sich aber bekanntlich durch eine kontextfreie Grammatik G_{mirror} mit den Produktionen

$$S ::= \$ \mid xSx \text{ für } x \in T$$

erzeugen. Also ist PCP genau dann lösbar, wenn $L(G_{PCP}) \cap L(G_{mirror}) \neq \emptyset$.

Wäre nun das Durchschnittsleerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken entscheidbar, gälte das insbesondere für die Grammatiken G_{PCP} und G_{mirror}, so dass sich die Lösbarkeit von Postschen Korrespondenzproblemen als entscheidbar erwiese. Der Widerspruch ist nur dadurch auflösbar, dass die Annahme falsch ist. Die Frage nach der Leerheit des Durchschnitts von Sprachen, die von kontextfreien Grammatiken erzeugt werden, muss also unentscheidbar sein.

Liefert eine Indexfolge eine Lösung für ein PCP, so bildet jede Wiederholung der Indexfolge ebenfalls eine Lösung. Ein PCP hat also unendlich viele Lösungen, wenn es überhaupt Lösungen hat. Mit der obigen Übersetzung ist PCP genau dann lösbar, wenn $L(G_{PCP}) \cap L(G_{mirror})$ unendlich ist. Die Frage nach der (Un-)Endlichkeit des Durchschnitts zweier kontextfrei erzeugter Sprachen erweist sich also ebenso wie die Frage nach der Leerheit des Durchschnitts als unentscheidbar.

Das Wortproblem für den Durchschnitt ist übrigens entscheidbar, denn ein Wort liegt genau dann im Durchschnitt, wenn es in beiden Sprachen liegt. Das Wortproblem für die einzelnen kontextfreien Sprachen ist aber entscheidbar.

Literatur

Die folgenden Literaturhinweise geben einen Einblick in die Theorie der formalen Sprachen und verschiedene andere Gebiete der Theoretischen Informatik. Die Bücher [HU69, Sal73, Sal78, HU79, MAK88, HU90, EP00] behandeln formale Sprachen ausführlich, wobei [Sal78] und [HU90] die deutschen Übersetzungen von [Sal73] und [HU79] sind. Wer noch weitergehende Informationen sucht, wird vermutlich im dreibändigen *Handbook of Formal Languages* [RS97] fündig. In [Woo87, AU92] werden vorrangig kontextfreie Sprachen untersucht. Die Verbindung von formalen Sprachen und der syntaktischen Behandlung von Programmiersprachen wird umfassend in [AU72] abgehandelt.

Literatur

[AU72] Alfred V. Aho und Jeffrey D. Ullman. *The Theory of Parsing, Translation, and Compiling, Vol. I: Parsing.* Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, New Jersey, 1972.

[AU92] Alfred V. Aho und Jeffrey D. Ullman. *Foundations of Computer Science.* Computer Science Press, New York, 1992.

[EP00] Katrin Erk und Lutz Priese. *Theoretische Informatik.* Springer, Berlin Heidelberg, 2000.

[HU69] John E. Hopcroft und Jeffrey D. Ullman. *Formal Languages and Their Relation to Automata.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.

[HU79] John E. Hopcroft und Jeffrey D. Ullman. *Introduction to Automata Theory, Languages and Compuation.* Addison-Wesley, Reading, Mass., 1979.

[HU90] John E. Hopcroft und Jeffrey D. Ullman. *Einführung in die Automatentheorie, Formale Sprachen und Komplexitätstheorie.* Addison-Wesley (Deutschland), Bonn, 1990.

[Kre00] Hans-Jörg Kreowski. Theoretische Informatik 1. Universität Bremen, 2000. Skript zur Lehrveranstaltung.

[LP81] Harry R. Lewis und Christos H. Papadimitriou. *Elements of the Theory of Computation.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.

[MAK88] Robert N. Moll, Michael A. Arbib, und A.J. Kfoury. *An Introduction to Formal Language Theory.* Springer, New York, 1988.

[RS97] Grzegorz Rozenberg und Arto K. Salomaa (Hrsg.). *Handbook of Formal Languages.* Springer, 1997. Vol. 1: Word, Language, Grammar. Vol. 2: Linear Modeling. Vol. 3: Beyond Words.

[Sal73] Arto K. Salomaa. *Formal Languages.* Academic Press, New York, 1973.

[Sal78] Arto K. Salomaa. *Formale Sprachen.* Springer, Berlin, 1978.

[Sch95] Uwe Schöning. *Theoretische Informatik – kurzgefaßt* (2. Auflage). Spektrum Akademischer Verlag, 1995.

[Weg93] Ingo Wegener. *Theoretische Informatik.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1993.

[Woo87] Derick Wood. *Theory of Computation.* John Wiley & Sons, New York, 1987.