Pumping-Lemma für reguläre Sprachen

Erstes Pumping-Lemma

Sei L eine von einem endlichen Automaten erkannte Sprache.

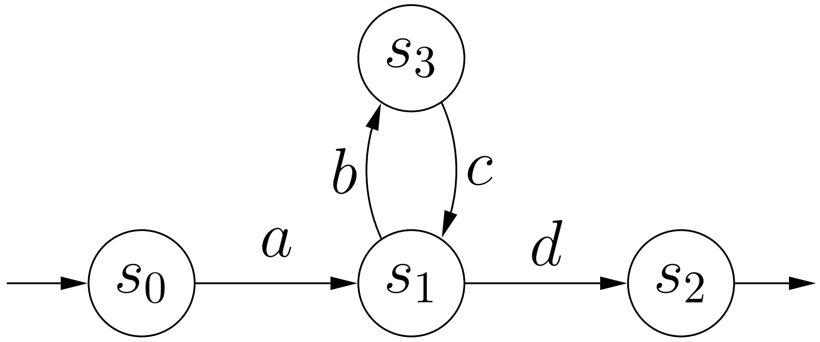
Dann existiert eine natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}$ derart, dass jedes Wort $w \in L$ mit $length(w) \geq p$ zerlegt werden kann in drei Teilwörter $w = xyz$ mit

1. $length(xy) \leq p$
2. $y \neq \lambda$
3. $xy^iz \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beispiel

$L = \{a(bc)^n d \mid n \in \mathbb{N}\}$

EA für L:



Für $p = 4$ hat jedes $w \in L$ mit $length(w) \geq 4$ die Form $a(bc)^n d$ mit $n \geq 1$. Eine mögliche Zerlegung von w in xyz ist $x = a$, $y = bc$, $z = (bc)^{n-1}d$, denn $length(xy) = 3 \leq 4$, $y \neq \lambda$ und $xy^iz = a(bc)^i(bc)^{n-1}d \in L \;\; \forall i \in \mathbb{N}$.

Endliche Automaten

- Modellierungskonzept mit vielen brauchbaren Eigenschaften
- schnelle Spracherkennung
- graphisch-visuelle Beschreibung
- automatische Korrektheitsbeweise
- gute Kompositionalitätseigenschaften

Aber:

- Was können endliche Automaten nicht?

Anwendung des Pumping-Lemmas

Das Pumping-Lemma kann benutzt werden, um zu zeigen, dass eine Sprache von keinem endlichen Automaten erkannt wird.

Behauptung: Die Sprache $L_{balance} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ wird von keinem endlichen Automaten erkannt.

Beweis (Widerspruch)

1. Annahme: L wird von einem endlichen Automaten erkannt. Sei p die Konstante aus dem Pumping-Lemma.
2. Sei $w = a^p b^p$ (d.h. $w \in L_{balance}$ und $length(w) \geq p$).
3. Sei $w = xyz$ mit $y \neq \lambda$ und $length(xy) \leq p$. Dann liegt das Teilwort y in der ersten Hälfte von w, d.h. $y = a^k$ für ein $k > 0$ und es gilt $xy^0 z = xz = a^{p-k} b^p \notin L_{balance}$ für $k \neq 0$. (Widerspruch)

- Ziel: mit Hilfe des Pumping-Lemmas beweisen, dass eine Sprache L von keinem EA erkannt wird.

- Vorgehensweise (für unsere Beispiele)
  (a) Nimm an: L wird von einem EA erkannt.
  (b) Wähle $w \in L$ mit $length(w) \geq p$, wobei p die Konstante aus dem Pumping-Lemma ist.
  (c) Finde für jede Zerlegung $xyz = w$ mit $y \neq \lambda$ und $length(xy) \leq p$ ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $xy^iz \notin L$. Falls dies gelingt, ist der Beweis fertig. Sonst gehe zu Schritt b.