Ein paar Umformungen kontextfreier Grammatiken

- Nützlich für den Beweis des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen.
- Nützlich für die Lösung des Wortproblems für kontextfreie Sprachen.

Eliminierung von λ-Produktionen

Eine Produktion der Form

$$A ::= \lambda$$

heißt λ-Produktion.

Satz

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik $G_{\lambda-\mathrm{frei}}$ ohne λ-Produktionen, so dass

$$L(G) = L(G_{\lambda-\mathrm{frei}}) \setminus \{\lambda\}.$$

Beispiel

$$S ::= AB, \quad A ::= aAA|\lambda, \quad B ::= bBB|\lambda$$

1. Sammeln aller $A \in N$ mit $A \xrightarrow{*} \lambda$:
   - Alle $A \in N$, aus denen λ direkt ableitbar ist:

     $$M_0 = \{A, B\}$$

   - Hinzufügung aller $A \in N$, deren rechte Seiten nur aus Zeichen aus M_0 zusammengesetzt sind:

     $$M_1 = M_0 \cup \{S\} = \{A, B, S\}$$

$$S ::= AB, \quad A ::= aAA|\lambda, \quad B ::= bBB|\lambda$$

- Hinzufügung aller $A \in N$, deren rechte Seiten nur aus Zeichen aus M_1 zusammengesetzt sind:

$$M_2 = M_1 \cup \emptyset = \{A, B, S\}$$

- Alle $A \in N$, aus denen λ in beliebig vielen Schritten ableitbar ist:

$$M = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cdots = \{A, B, S\}$$

$$S ::= AB, \quad A ::= aAA|\lambda, \quad B ::= bBB|\lambda$$

---

2. Sukzessives Erweitern der Regelmenge durch Streichen der Zeichen $A \in M = \{A, B, S\}$ aus den rechten Regelseiten:

- $P_0 = \{S ::= AB, A ::= aAA|\lambda, B ::= bBB|\lambda\}$
- $P_1 = P_0 \cup \{S ::= A|B, A ::= aA, B ::= bB\}$
- $P_2 = P_1 \cup \{S ::= \lambda, A ::= a, B ::= b\}$
- $P_3 = P_2 \cup \emptyset = P_2$
- $P' = P_2 = \{S ::= AB|A|B|\lambda, A ::= aAA|aA|a|\lambda, B ::= bBB|bB|b|\lambda\}$

3. Löschen aller λ-Produktionen aus P':

Aus

$$\{S ::= AB|A|B|\lambda, A ::= aAA|aA|a|\lambda, B ::= bBB|bB|b|\lambda\}$$

erhalten wir

$$P_{\lambda-\text{frei}} = \{S ::= AB|A|B, A ::= aAA|aA|a, B ::= bBB|bB|b\}.$$

Konstruktion von $G_{\lambda-\mathrm{frei}}$

Sei $G = (N, T, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

1. (Sammeln aller $A \in N$ mit $A \xrightarrow{*} \lambda$.)

$$\boxed{\begin{array}{l}
M' := \{A \in N \mid (A ::= \lambda) \in P\} \\
\texttt{repeat} \\
M := M'; \\
M' := M \cup \{A \in N \mid (A ::= w) \in P, w \in M^*\} \\
\texttt{until}\ M' = M
\end{array}}$$

2. (Erweitern der Regelmenge)

$X := P$
repeat
$P' := X;$
$X := P' \cup \{A ::= u_1 u_2 \mid (A ::= u_1 B u_2) \in P', B \in M\}$
until $P' = X$

3. (Konstruktion von $G_{\lambda-\text{frei}}$)

$$G_{\lambda-\text{frei}} = (N, T, P_{\lambda-\text{frei}}, S)$$

mit $P_{\lambda-\text{frei}} = X \setminus \{A ::= \lambda \mid A \in N\}$.

Eliminierung von Kettenregeln

Eine Produktion der Form $A ::= B$ mit $B \in N$ heißt Kettenregel.

Satz

Für jede kontextfreie Grammatik G gibt es eine kontextfreie Grammatik $G_{KR-frei}$ ohne Kettenregeln, so dass

$$L(G) = L(G_{KR-frei}).$$

Idee

1. M: Menge aller Paare $(A, B) \in N \times N$ mit $A \xrightarrow{*} B$ (algorithmisch konstruierbar)

Beispiel

$$\boxed{S ::= A, A ::= B, B ::= b}$$

$$M = \{(S, S), (A, A), (B, B), (S, A), (A, B), (S, B)\}$$

2. $G_{KR-frei} = (N, T, P_{KR-frei}, S)$ mit

$$P_{KR-frei} = \{A ::= r \mid (A, B) \in M, B ::= r \in P, r \notin N\}.$$

Beispiel

$$\boxed{S ::= A, A ::= B, B ::= b}$$

$$M = \{(S, S), (A, A), (B, B), (S, A), (A, B), (S, B)\}$$

$$P_{KR-frei} : \ S ::= b, A ::= b, B ::= b$$