

## Formale Sprachen

### 4. Arbeitsbogen (Rekursive und rekursiv aufzählbare Sprachen)

1. Seien  $L_1, L_2, \dots, L_k \subseteq \Sigma^*$  formale Sprachen, so dass
  - (i) kein Wort in zwei verschiedenen Sprachen liegt, d.h.  $L_i \cap L_j = \emptyset$  für alle  $i \neq j$ ,
  - (ii) jedes Wort zu einer der Sprachen gehört, d.h.  $\bigcup_{i=1}^k L_i = \Sigma^*$ , und
  - (iii) jede der Sprachen rekursiv aufzählbar ist.

Zeige, dass dann jede der Sprachen rekursiv ist.

2. Zeige, dass das Wortproblem für

$$L_{\neq} = \{\langle M \rangle \mid \text{bei Eingabe } \lambda \text{ schreibt } M \text{ irgendwann ein Zeichen ungleich } \neq \text{ auf ihr Band}\}$$

entscheidbar ist. Betrachte dazu die ersten  $m$  Berechnungsschritte von  $M$ , wobei  $m$  die Anzahl der Zustände ist.

3. Die GREAT COMPUTERS GmbH möchte ihren Marktanteil ausbauen und hat dafür die *Turingmaschine mit Pauken und Trompeten*, kurz TMPT, entwickelt. Eine TMPT funktioniert im Prinzip wie eine normale Turingmaschine, aber jedem Zustand ist entweder eine Pauke oder eine Trompete zugeordnet. Jedesmal, wenn eine TMPT in den nächsten Zustand übergeht, erklingt – je nach Typ des neuen Zustands – eine Pauke oder eine Trompete.

Zeige, dass es unentscheidbar ist, ob eine gegebenes Wort  $w$  bei einer gegebenen TMPT jemals einen Paukenschlag hervorruft.

4. Zeige, dass

$$L_{\text{Halt}} = \{\langle M, w \rangle \mid \text{bei Eingabe } w \text{ hält } M \text{ nie}\}$$

nicht rekursiv aufzählbar ist.