Skript zur Lehrveranstaltung

Petrinetze: Modellierung, Strukturierung und Kompositionalität

Erarbeitet von: J. Padberg, M. Gajewsky, C. Ermel, H. Ehrig
und unterstützt durch: L. Grigoriu, P. Schiller
FB Informatik, TU Berlin, SS 00

März 2000

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Petrinetze gehören heute zu den „klassischen“ Modellen für nebenläufige und verteilte Systeme und gestatten die Modellierung von Systemen, in denen mehrere Komponenten unabhängig voneinander arbeiten, aber miteinander kommunizieren können. Die Petrinetze erlauben es, verteilte Systeme anschaulich (graphisch) und mathematisch fundiert zu spezifizieren (siehe z.B. [Rei85a] und viele andere). Dies ist hauptsächlich auf folgende Eigenschaften von Petrinetzen zurückzuführen:

- *Einfache Beschreibungssprache*: Petrinetze bestehen aus Stellen und Transitionen, einer Anfangsmarkierung und einfachen Schaltregeln und stellen damit einen einfachen und leicht verständlichen Beschreibungsformalismus dar.

- *Anschaulichkeit*: Die graphische Repräsentation des spezifizierten Systems als Petrinetz erlaubt es, die statischen und dynamischen Aspekte des Systems in natürlicher und damit leicht verständlicher Weise darzustellen.

- *Universalität*: Petrinetze werden zur Modellierung von Systemen aus den verschiedensten Bereichen eingesetzt, von ingenieurswissenschaftlichen Anwendungen bis hin zur Entwicklung von Softwaresystemen.

- *Wohlfundierte Theorie*: Die mathematische Fundierung der Petrinetztheorie erlaubt formale Verifikation von Netzeigenschaften (z. B. durch Invarianten- oder Erreichbarkeitsanalyse).

- *Simulationsfähigkeit*: Die Möglichkeit der Simulation des Prozeßablaufs in einer Petrinetzspezifikation erlaubt die Validierung bezüglich der Anforderungen an das System. Die formale Analyse von Petrinetzen erlaubt die Verifikation von Systemeigenschaften.

- *Existenz von Werkzeugen*: Es gibt eine reichhaltige Auswahl von Tools für die verschiedensten Petrinetz-Klassen, die die Spezifikation, Simulation und Analyse von Petrinetzen unterstützen.

Petrinetze wurden von C. A. Petri in seiner berühmten Dissertation [Pet62] eingeführt, und werden seitdem in unzähligen Artikeln und Büchern aus theoretischen und praktischen Gesichtspunkten heraus untersucht. In den ersten zwanzig Jahren wurden hauptsächlich Low-Level-Netze beschrieben, wie z.B. Bedingungs-Ereignis-Netze, Elementare Netze und Stellen-Transitions-Netze (siehe z.B. [Rei85b, RT86]). Die ersten High-Level-Netze, sogenannte Prädikat-Transitions-Netze, wurden von Genrich und Lautenbach [GL81] entwickelt, um die Modellierung nebenläufiger und verteilter Systeme zu unterstützen. In den letzten zehn Jahren sind viele weitere Klassen von High-Level-Netzen aus ähnlichen Gründen eingeführt und untersucht worden, u. a. Coloured (Gefärbte) Petrinetze von Jensen [Jen81, Jen92, Jen95], Petrinetze mit individuellen Token von Reisig [Rei85c] und Kombinationen von Netzen mit algebraischen Spezifikationen, sowohl von Krämer und Schmidt

[KS91] als auch von Vautherin und Reisig [Vau87, RV87, Rei91], was zu vielen Varianten algebraischer Netze geführt hat (siehe z.B. [BCM88, Bil89, Hum89, REP93, EPR94a, PER95, KR96]), die auch algebraische High-Level-Netze genannt werden. Eine Übersicht über High-Level-Netze, ihre Theorie und Anwendungen ist zu finden in [JR91, Smi96].

Aus algebraischer Sicht werden Methoden der linearen Algebra angewendet, um Invarianten für alle Arten von Petrinetzen zu berechnen. Darüberhinaus werden von Reisig in [Rei85c] Ringe und Moduln untersucht; Winskel [Win87] und Meseguer und Montanari [MM90] untersuchen Monoide, Algebren, Petrinetz-Morphismen und Petrinetz-Kategorien. Diese kategorielle Sicht auf Petrinetze wurde Ausgangspunkt von Untersuchungen von Kompositionalitätsproblemen in [Win87, Hum89, MM90, EPR94b] und von Netz-Transformationen in [REP93, PER95] im Sinne von Graphtransformationen und High-Level-Replacement-Systemen. Ein einheitlicher Ansatz für verschiedene Petrinetz-Klassen wurde mit kategoriellen Methoden in [EPR94c, Pad96] untersucht.

Der erste Teil des schriftlichen Materials *Modellierung mit Petrinetzen* befaßt sich mit „klassischen“ Stellen/Transitionen-Netzen, wie sie in [Rei85a] verwendet werden. Anhand eines Modellierungsbeispiels führen wir die Grundbegriffe ein und stellen dazu die mengentheoretische Formalisierung vor. Wir definieren die Semantik von Netzen als Markierungs- bzw. Erreichbarkeitsgraphen und befassen uns mit Netzeigenschaften und Netz-Verifikation. Anschließend führen wir die linear algebraische Sichtweise von S/T-Netzen mit Hilfe von Vektoren und Matrizen ein. Darauf aufbauend entwickeln wir eine universell algebraische Darstellung, die sich durch Ausnutzung der Monoidstruktur im Sinne von [MM90] beschreiben läßt. Wir erarbeiten die Darstellung von Schaltverhalten, Parallelität und Markierungsgraph in der universell algebraischen Formalisierung analog zu [Erm94].

Kapitel 1

Modellierung mit Stellen/Transitions-Netzen

Wir werden uns in diesem Kapitel mit sogenannten Stellen-Transitions-Netzen (S/T-Netzen, engl. *Place/Transition Nets*) befassen: S/T-Netze basieren auf einer einfachen Erweiterung der Konzepte *Zustand* und *Zustandsübergang*, wie sie von Automaten her bekannt sind. Die Erweiterung besteht darin, daß in S/T-Netzen sowohl die Zustände als auch die Zustandsübergänge auf verschiedene Knoten im Graphen verteilt sind. Das gestattet eine explizite Unterscheidung von Parallelität und Sequentialität.

Im ersten Teil (Kapitel 1.1) werden wir Grundbegriffe wie die graphische Repräsentation statischer Systemaspekte in S/T-Netzen und die dynamischen S/T-Netz-Aspekte, also Modellierung von Prozeßabläufen, anhand eines Beispiels einführen, um dann zu den bereits eingeführten Begriffen die mengentheoretische Formalisierung zu liefern. Damit können wir den Markierungsgraphen als Semantik eines (unmarkierten) S/T-Netzes und den Erreichbarkeitsgraphen als Semantik eines Netzes mit Anfangsmarkierung definieren.

Im zweiten Teil (Kapitel 1.2) befassen wir uns mit Eigenschaften von S/T-Netzen wie Beschränktheit, Unabhängigkeit, Lebendigkeit und Invarianten. Anhand des Beispiels wird gezeigt, wie sich diese Eigenschaften zur Formalisierung von Anforderungsbeschreibungen und zur diesbezüglichen Verifikation von S/T-Netzen verwenden lassen.

1.1 Informelle Einführung und formale Definition

Wir werden nun die Grundbegriffe von S/T-Netzen anhand eines Leser-Schreiber-Systems entwickeln. Dabei wird das Verhalten einer Menge von Betriebssystemprozessen beschrieben, die alle auf einen Speicherplatz lesend oder schreibend zugreifen können.

Das Leser-Schreiber-System

Der Graph in Abbildung 1.1 spezifiziert die Anforderungen der Prozesse zunächst zustandsorientiert, also indem die Zustände eines Prozesses als Knoten und die möglichen

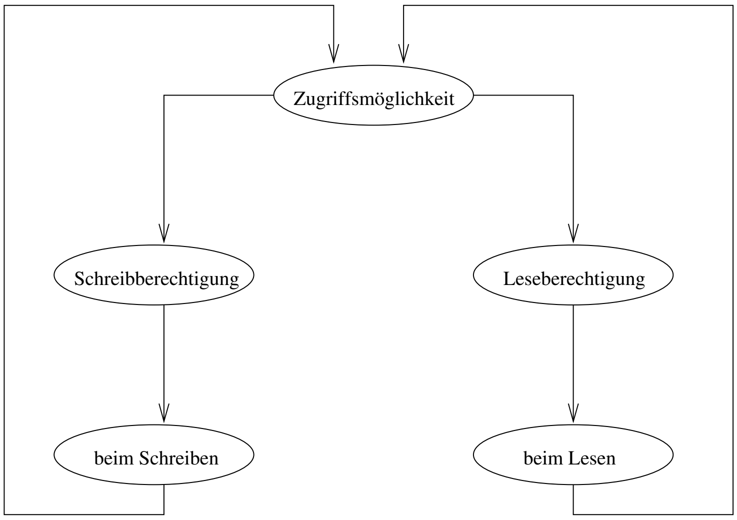


Abbildung 1.1: Zustandsorientierte Beschreibung des Leser-Schreiber-Systems

Zustandsübergänge als Kanten dargestellt werden. Wir sehen, daß ein Prozeß immer zyklisch abläuft und mit entsprechender Zugriffsmöglichkeit entweder zu einem lesenden oder zu einem schreibenden Prozeß werden kann.

Andererseits können wir die Prozeßanforderungen auch spezifizieren, indem wir (wie in Abbildung 1.2) die Aktionen, die von den Prozessen ausgeführt werden können als Knoten auffassen und deren mögliche Abfolge durch Kanten beschreiben.

Beide Spezifikationen sind in gewisser Weise dual zu einander. So lassen sich die Kanten der zustandsorientierten Beschreibung in Abbildung 1.1 und die Knoten der aktionsorientierten Beschreibung in Abbildung 1.2 einander eindeutig zuordnen. Andersherum ist es etwas komplizierter, da der Zustandsknoten „Zugriffsmöglichkeit“ in Abbildung 1.1 der Hyperkante zwischen „Schreiben beenden“, „Lesen beenden“ und „Schreibberechtigung anmelden“, „Leseberechtigung anmelden“ entspricht. Trotzdem sind beide Sichten kompatibel und können in einer sowohl zustands- also auch aktionsorientierten Beschreibung kombiniert werden.

Syntax von S/T-Netzen

Das S/T-Netz in Abbildung 1.3 zeigt diese Kombination, es ist also sowohl zustands- als auch aktionsorientiert. Die Zustände werden im S/T-Netz durch Kreise oder Ellipsen dargestellt und heißen *Stellen*. Jede Stelle kann eine veränderliche Anzahl Marken, auch *Token* genannt, enthalten, deren Zahl durch *Kapazitäten* nach oben hin beschränkt werden kann. In unserem Beispiel haben die Stellen und Transitionen folgende Interpretation:

- Pz — Prozesse mit Zugriffsmöglichkeit
- Plb — Prozeß kann mit Lesen beginnen

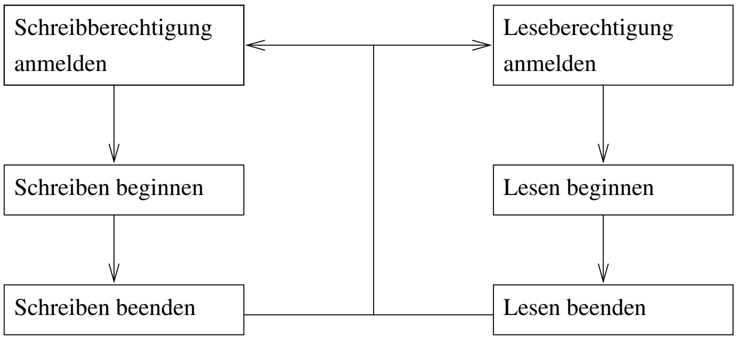


Abbildung 1.2: Aktionsorientierte Beschreibung des Leser-Schreiber-Systems

- Pl — Prozeß liest
- Psb — Prozeß kann mit Schreiben beginnen
- Ps — Prozess schreibt
- Til — Aktionen lesender Prozesse (i = 1 ... 3)
- Tis — Aktionen schreibender Prozesse

Drei Token auf der Stelle Pz bedeuten also, daß es drei Prozesse mit Zugriffsmöglichkeit zum Speicher gibt, und daß momentan kein Prozeß liest oder schreibt (sonst lägen Token auf den Stellen Ps oder Pl) und auch kein Prozeß mit Lesen oder Schreiben beginnen kann (sonst lägen Token auf den Stellen Psb oder Plb).

Eine Verteilung von Token auf den Stellen heißt *Markierung* des S/T-Netzes. Abbildung 1.3 zeigt die *Anfangsmarkierung*, die ursprüngliche Tokenverteilung. Die *Aktionen* des Leser-Schreiber-Systems werden durch Rechtecke gekennzeichnet und heißen *Transitionen*. Stellen und Transitionen bilden zusammen die *Knoten* des S/T-Netzes. Das Netz enthält außerdem eine Menge gerichteter *Kanten*, die jeweils entweder eine Stelle mit einer Transition oder eine Transition mit einer Stelle verbinden. Mehrfachkanten zwischen zwei Knoten gibt es nicht. Eine Kante kann mit einer natürlichen Zahl markiert sein, ihrem *Gewicht*. In unserem Beispiel ist das Gewicht aller Kanten gleich eins, was nach Vereinbarung weggelassen wird. Wir nennen die Stellen, von denen aus es eine Kante zu einer Transition gibt, *Vorbereich* und die Stellen, zu denen es eine Kante von der Transition gibt, *Nachbereich* der Transition.

Das „Token-Spiel“

Bisher haben wir die Syntax von S/T-Netzen betrachtet, kommen wir nun zum dynamischen Verhalten. Ein S/T-Netz kann als ein Spielbrett betrachtet werden, auf dem die Token Spielfiguren darstellen, die nur auf Stellen gesetzt werden dürfen. Jede Transition stellt einen potentiellen Spielzug im „Token-Spiel“ dar: Ein Zug ist möglich, wenn jede

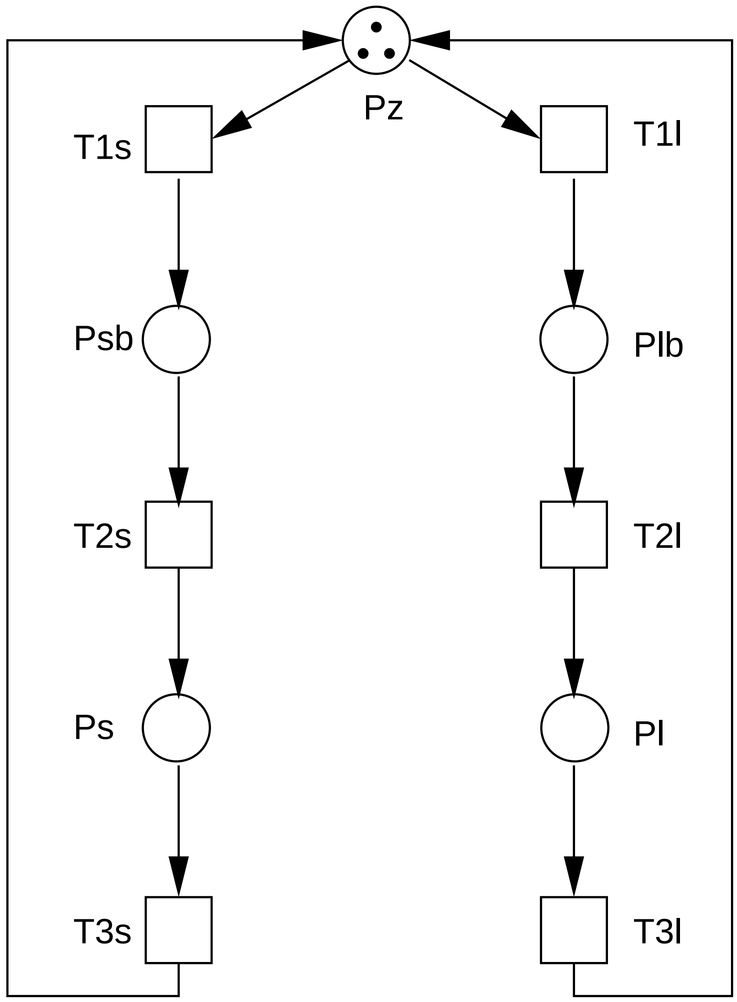


Abbildung 1.3: S/T-Netz des Leser-Schreiber-Systems

Stelle im Vorbereich der Transition mindestens soviele Token enthält wie das Gewicht der entsprechenden eingehenden Kante vorschreibt und wenn jede Stelle im Nachbereich noch wenigstens soviel freie Kapazität hat, wie es das Gewicht der auslaufenden Kante verlangt. Wir sagen dann auch, die Transition ist *aktiviert*. In der Anfangsmarkierung in Abbildung 1.3 sind die Transitionen $T1s$ und $T1l$ aktiviert, alle anderen nicht. Wenn eine Transition aktiviert ist, dann kann der entsprechende Zug stattfinden, die Transition kann *schalten*. Der Effekt des Schaltens einer Transition ist, daß Token aus dem Vorbereich entfernt werden und im Nachbereich hinzugefügt werden. Die Anzahl der entfernten bzw. hinzugefügten Token wird von den entsprechenden Kantengewichten bestimmt. So wird beim Schalten der Transition $T1s$ in Abbildung 1.3 von der Stelle Pz ein Token entfernt und auf der Stelle Plb ein Token hinzugefügt: die Anfangsmarkierung M_0 geht in eine *Folgemarkierung* M_1 (zwei Token auf Pz, ein Token auf Plb) über. In der Markierung M_1 wiederum ist nun z.B. die Transition $T2l$ aktiviert, die beim Schalten zur Markierung M_2 (zwei Token auf Pz, ein

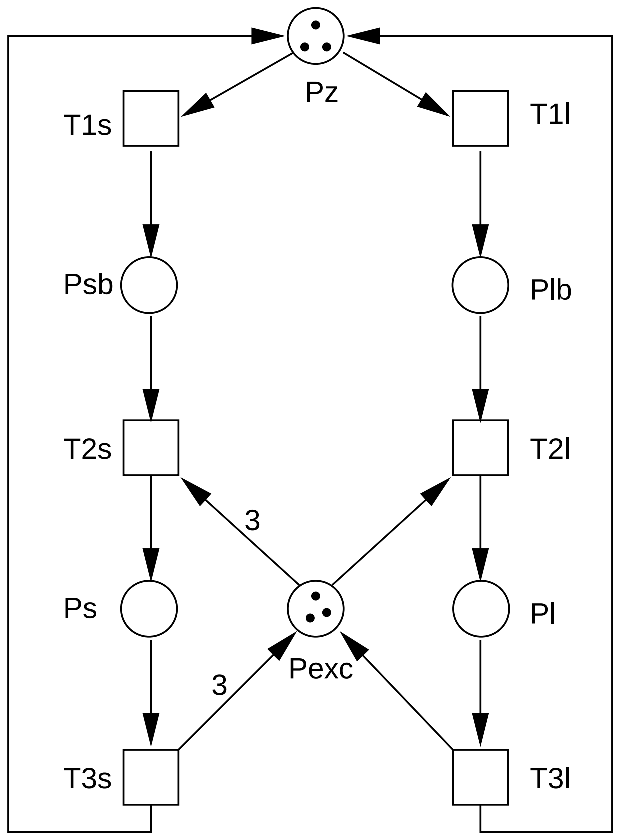


Abbildung 1.4: Leser-Schreiber-System mit gegenseitigem Ausschluß

Token auf Pl) führt. Man sagt, M_2 ist von M_0 aus *erreichbar* (durch Hintereinanderschalten von $Tl1$ und $Tl2$).

Wir wollen nun das parallele Schalten mehrerer Transitionen betrachten. Sind zwei Transitionen aktiviert, und gibt es so viele Token auf den gemeinsamen Stellen beider Vorbereiche, daß jede der Transitionen über „eigene" Token verfügt, ohne sie mit der anderen Transition „teilen" zu müssen, so sagen wir, die Transitionen können *parallel* schalten. In unserem bisherigen Leser-Schreiber-System können verschiedene Prozesse durch paralleles Schalten der Transitionen $T1s$ und $T1l$ bzw. $T2s$ und $T2l$ gleichzeitig lesen und schreiben. Angenommen, wir wollen nun aus Sicherheitsgründen nicht zulassen, daß mehrere Prozesse gleichzeitig den gleichen Speicherbereich beschreiben. Erweitern wir also unser S/T-Netz aus Abbildung 1.3. Um zuverlässiges Verhalten gewährleisten zu können, wird die Lese- und Schreiberlaubnis der Prozesse an folgende Bedingungen geknüpft:

Wenn kein Prozeß den Speicherplatz beschreibt, so dürfen beliebig viele Prozesse mit Zugriffsmöglichkeit lesend auf ihn zugreifen. Ein schreibender Zugriff ist für einen Prozeß jedoch nur erlaubt, sofern kein anderer Prozeß den Speicherplatz liest oder beschreibt. Das um dieses Prinzip des gegenseitigen Ausschlusses erweiterte Netz zeigt Abbildung 1.4.

Die neue Stelle $Pexc$ sorgt zum einen dafür, daß sich Lesen und Schreiben wechselseitig ausschließen; zum anderen wird durch das Kantengewicht 3, das der Anzahl der Prozesse entspricht, sichergestellt, daß kein Prozeß anfangen kann zu schreiben, wenn gerade ein anderer Prozeß schreibt. Andererseits können bis zu 3 Prozesse parallel lesen, da in dieser Richtung das Kantengewicht nur 1 beträgt.

Formale Definition von S/T-Netzen

Im folgenden werden die bisher eingeführten Grundbegriffe mengentheoretisch formalisiert und ergänzt. Als Anschauungsbeispiel für die formale Schreibweise dient uns wiederum das Leser-Schreiber-System aus Abbildung 1.4.

Definition 1.1 (S/T-Netz)
Ein *S/T-Netz* ist ein 5-Tupel $N = (P, T, F, K, W)$, für das gilt:

1. P und T sind disjunkte Mengen, deren Elemente *Stellen (places)* bzw. *Transitionen* genannt werden.

2. $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ ist eine zweistellige Relation, die *Flußrelation* von N.

3. $K : P \to \mathbb{N}_\omega$ erklärt eine (möglicherweise unbeschränkte) *Kapazität* für jede Stelle.

4. $W : F \to \mathbb{N}_+$ ordnet jeder Kante ihr *Kantengewicht* zu.

$\mathbb{N}_\omega$ bezeichnet die Menge der natürlichen Zahlen inklusive ω, das für abzählbar unendlich steht. $\mathbb{N}_+$ ist die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null.

Für das Netz aus Abbildung 1.4 ergibt sich folgende formale Repräsentation:

$$
\begin{array}{lcl}
P & = & \{Pz, Psb, Ps, Plb, Pl, Pexc\} \\
T & = & \{T1s, T2s, T3s, T1l, T2l, T3l\} \\
F & = & \{(Pz, T1s), (T1s, Psb), (Psb, T2s), (T2s, Ps), (Ps, T3s), \\
 & & (T3s, Pz), (Pz, T1l), (Tl, Plb), (Plb, T2l), (T2l, Pl), (Pl, T3l), \\
 & & (T3l, Pz), (T3l, Pexc), (Pexc, T2l), (T3s, Pexc), (Pexc, T2s)\} \\
K(p) & = & \omega \text{ für alle } p \in P \\
W & = & \{(Pz, T1s) \mapsto 1, \ldots, (Pexc, T2l) \mapsto 1, (T3s, Pexc) \mapsto 3, (Pexc, T2s) \mapsto 3\}
\end{array}
$$

Beim Schalten fungieren die Transitionen als Regeln. Vorbereich und Nachbereich sind dann der linken bzw. rechten Regelseite vergleichbar.

Definition 1.2 (Vorbereich, Nachbereich)
Für einen Knoten $x \in P \cup T$ eines S/T-Netzes N wie oben bezeichnet $\bullet x = \{y | \ (y, x) \in F\}$ den *Vorbereich* und $x\bullet = \{y | \ (x, y) \in F\}$ den *Nachbereich* von x.

In Abbildung 1.4 ist beispielsweise der Vorbereich $\bullet T2s$ der Transition $T2s$ mit $\{Psb, Pexc\}$ und der Nachbereich $Pz\bullet$ von Pz mit $\{T1s, T1l\}$ gegeben.

Definition 1.3 (Markierungen und Schaltverhalten)
Sei N ein S/T-Netz wie in Definition 1.1.

1. Eine Abbildung $M : P \rightarrow \mathbb{N}$ heißt *Markierung* von N falls für alle Stellen $p \in P$ gilt: $M(p) \leq K(p)$.
2. Eine Transition $t \in T$ heißt *M - aktiviert*, falls $\forall\ p \in \bullet t : M(p) \geq W(p,t)$ und $\forall\ p \in t\bullet : M(p) + W(t,p) \leq K(p)$.
3. Eine M-aktivierte Transition $t \in T$ bestimmt eine *Folgemarkierung* M' von M durch:

$$M' ::= M'(p) = \begin{cases} M(p) - W(p,t) & \text{, falls} \quad p \in \bullet t - t\bullet \\ M(p) + W(t,p) & \text{, falls} \quad p \in t\bullet - \bullet t \\ M(p) - W(p,t) + W(t,p) & \text{, falls} \quad p \in \bullet t \cap t\bullet \\ M(p) & \text{, sonst} \end{cases}$$

Wir sagen auch *t schaltet von M nach M'* und schreiben $M[t\rangle M'$.

Im Unterschied zu [Rei85a] lassen wir nur Markierungen mit endlich vielen Token auf jeder Stelle zu, d.h. M ist eine Abbildung in die natürlichen Zahlen *ohne* ω.

Die in Abbildung 1.4 dargestellte Markierung ist

$$M_0 ::= M_0(p) = \begin{cases} 0 & \text{, falls} \quad p \in \{Psb, Ps, Plb, Pl\} \\ 3 & \text{, falls} \quad p \in \{Pz, Pexc\} \end{cases}$$

Die Transitionen $T1s$ und $T1l$ sind M_0-aktiviert. Die Folgemarkierung M_1, die durch Schalten von $T1s$ erreicht wird, berechnet sich durch

$$\begin{array}{lcllcl} M_1(Pz) & = & M_0(Pz) - W(Pz, T1s) & = & 3 - 1 = 2, \\ M_1(Psb) & = & M_0(Psb) + W(Psb, T1s) & = & 0 + 1 = 1, \\ M_1(Ps) & = & M_0(Ps) & = & 0, \\ M_1(Plb) & = & M_0(Plb) & = & 0, \\ M_1(Pl) & = & M_0(Pl) & = & 0, \\ M_1(Pexc) & = & M_0(Pexc) & = & 3. \end{array}$$

Wir schreiben daher $M_0[T1s\rangle M_1$.

Markierungen bilden die Zustände eines Netzes. Der *Markierungsgraph* eines S/T-Netzes repräsentiert alle Markierungen, d.h. alle erlaubten Zustände des Netzes, zusammen mit den zwischen ihnen möglichen Schaltschritten und kann als Semantik eines S/T-Netzes angesehen werden.

Definition 1.4 (Markierungsgraph)
Der *Markierungsgraph* $MG = (MG_V, MG_E, s^{MG}, t^{MG} : MG_E \rightarrow MG_V)$ eines S/T-Netzes N ist gegeben durch

- $MG_V = \{M |\ M : P \rightarrow \mathbb{N} \text{ ist Markierung für } N\}$
- $MG_E = \{M \xrightarrow{t} M' | t \in T \wedge M[t\rangle M'\}$
- $s^{MG}(M \xrightarrow{t} M') = M$

- $t^{MG}(M \xrightarrow{t} M') = M'$

Zur Vereinfachung lassen wir meist die Indizes weg und schreiben $M \in MG$ und $M \xrightarrow{t} M' \in MG$. Analog bedeutet $M \xrightarrow{*} M' \in MG$ $(M \xrightarrow{+} M' \in MG)$ die Existenz eines (nichtleeren) Pfades von M nach M' in MG.

$[M\rangle$ bezeichnet die Menge aller von M aus erreichbaren Markierungen oder kürzer die *Erreichbarkeitsmenge* von M und ist gegeben durch

$$[M\rangle \;:=\; \{M' |\; M \xrightarrow{*} M' \in MG\}.$$

Ihrer Interpretation entsprechend nennen wir die Knoten des Markierungsgraphen Markierungen und seine Kanten Schaltschritte. Beachtet, daß ein Schaltschritt durch das Tripel $M \xrightarrow{t} M'$ gegeben ist und nicht nur durch t, da eine Transition in mehreren Schaltschritten vorkommen kann.

Weil der Markierungsgraph *alle möglichen* Markierungen und Schaltschritte enthält, sind natürlich auch welche darunter, die aus der Sicht des modellierten Systems keinen Sinn ergeben. So sind in unserem Leser-Schreiber-Netz nur Markierungen sinnvoll, bei denen auf den Stellen Pz, Psb, Ps, Plb, Pl zusammen genau drei Token liegen, da sonst das Prinzip des gegenseitigen Ausschlusses nicht funktioniert. Im Markierungsgraphen dieses Netzes ergibt sich ein neuer isolierter Teilgraph für jede andere Tokenzahl auf diesen Stellen, die durch die Anfangsmarkierung des Netzes vorgegeben wird.

Da die meisten Systeme nur dann in der gewünschten Weise arbeiten, wenn sie beim Start richtig initialisiert, d.h. in einen definierten Startzustand gebracht werden, betrachten wir auch S/T-Netzen oft in Zusammenhang mit einer solchen *Anfangsmarkierung*.

Definition 1.5 (Markiertes Netz)
Ein *markiertes Netz* $N_{M_0} = (P, T, F, K, W, M_0)$ ist ein S/T-Netz $N = (P, T, F, K, W)$ zusammen mit einer Markierung $M_0 : P \to \mathbb{N}$ für N, die *Anfangsmarkierung* genannt wird.

Die Anfangsmarkierung des Netzes in Abbildung 1.4 ist M_0.

Wenn wir markierte Netze betrachten, sind wir nicht am gesamten Schaltverhalten derselben interessiert, sondern nur an den Schaltvorgängen, die von der Anfangsmarkierung aus möglich sind. Der *Erreichbarkeitsgraph* liefert uns gerade diese Information. Wir definieren den Erreichbarkeitsgraph hier als Teilgraph des Markierungsgraphen, er kann aber auch direkt aus dem Schaltverhalten abgeleitet werden.

Definition 1.6 (Erreichbarkeitsgraph)
Der *Erreichbarkeitsgraph* $EG = (EG_V, EG_E, s^{EG}, t^{EG})$ eines markierten Netzes N_{M_0} ist der kleinste Teilgraph des Markierungsgraphen $MG = (MG_V, MG_E, s^{MG}, t^{MG})$ für das unmarkierte Netz N, so daß gilt:

- $M_0 \in EG_V$.
- Für alle $M \in EG_V$ und $M \xrightarrow{t} M' \in MG_E$ ist auch $M' \in EG_V$ und $M \xrightarrow{t} M' \in EG_E$.

Der Erreichbarkeitsgraph ist ein Teilgraph des Markierungsgraphen, daher hat die in Definition 1.4 eingeführte Notation auch für den Erreichbarkeitsgraphen Gültigkeit. Für ein Beispiel eines Erreichbarkeitsgraphen verweisen wir auf Abbildung 1.6 im nächsten Abschnitt.

Aus Definition 1.6 folgt: Die Erreichbarkeitsmenge $[M_0\rangle$ ist gerade die Menge der Knoten in EG.

1.2 Eigenschaften von Netzen

Nachdem die statischen und dynamischen Aspekte von S/T-Netzen dargestellt und formalisiert sind, werden wir nun eine Reihe von Netzeigenschaften einführen, um dann ihre Eignung zur Analyse von Netzspezifikationen zu untersuchen.

Beschränktheit und Stelleninvarianten

Wenn eine Stelle nicht durch eine Kapazität beschränkt ist, kann es passieren, daß ihre Tokenzahl (durch genügend langes Schalten) jede beliebige natürliche Zahl übersteigt. Eine solche *Unbeschränktheit* hat die Konsequenz, daß der Erreichbarkeitsgraph selbst eines endlichen Netzes (also mit endlichen Stellen- und Transitionsmengen) unendlich wird, wenn das Netz eine solche unbeschränkte Stelle enthält. Für Netze wie unser Leser-Schreiber-System wäre sie außerdem ein dringender Hinweis auf einen Modellierungsfehler.

Definition 1.7 (Beschränktheit)
Sei N_{M_0} ein markiertes Netz und EG sein Erreichbarkeitsgraph. Eine Stelle $p \in P$ heißt *beschränkt*, falls es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle Markierungen $M \in EG$ gilt: $M(p) \leq n$. Das Netz N_{M_0} heißt beschränkt, falls alle Stellen $p \in P$ beschränkt sind.

Beschränktheit von Stellen und markierten Netzen ist entscheidbar [Rei85a].

Das Leser-Schreiber-Netz ist beschränkt, da für keine Stelle die Markierung größer als 3 wird.

Wie oben erwähnt, ist der Erreichbarkeitsgraph eines unbeschränkten Netzes unendlich. Für beschränkte Netze ist der Erreichbarkeitsgraph endlich.

Satz 1.8 (Beschränktheit)
Für endliche markierte Netze N_{M_0} gilt: N_{M_0} ist beschränkt gdw. der Erreichbarkeitsgraph EG von N_{M_0} endlich ist.

Beweis: Folgt aus der Definition 1.7. $\square$

Die Zahl der Prozesse in dem Leser-Schreiber-System ist nicht nur nach oben hin begrenzt, sie ist sogar konstant. Auf das markierte Netz in Abbildung 1.4 bezogen heißt das, daß die gemeinsame Tokenzahl auf den Stellen $\{Pz, Psb, Plb, Pl, Ps\}$ für alle erreichbaren Markierungen gleich ist. Eine solche Eigenschaft, wird durch sogenannte *Stellen-Invarianten (S-Invarianten)* beschrieben. In unserem Fall ist die S-Invariante die folgende Abbildung (der folgende Stellenvektor) $\{(Pz,1),(Psb,1),(Plb,1),(Pl,1),(Ps,1),(Pexc,0)\}$. Darüberhinaus ist es manchmal sinnvoll, die Token auf bestimmten Stellen mehrfach zu zählen, wenn ein Token auf einer solchen Stelle mehrere Token auf anderen Stellen aufwiegt. In unserem Beispielnetz ergibt sich dadurch eine weitere Invariante, $\{(Pz,0),(Psb,0),(Plb,0),(Pl,1),(Ps,3),(Pexc,1)\}$, die ausdrückt, daß der Wert des Ausdrucks $M(Pl)+3\cdot M(Ps)+M(Pexc)$ beim Schalten des Netzes konstant bleibt. Das bedeutet bei der angegebenen Anfangsmarkierung, daß die Existenz eines schreibenden Prozesses ($M(Ps)=1$) impliziert, daß sich kein Token auf $Pexc$ und Pl befindet (da bei unserer Anfangsmarkierung $M0$ für $M \in EG$ gilt: $M_0(Pl)+3\cdot M_0(Ps)+M_0(Pexc) = M(Pl)+3\cdot M(Ps)+M(Pexc) = 3$) Weil also $Pexc$ unmarkiert ist, kann kein Prozess unter diesen Umständen zu lesen anfangen ($T2l$ braucht einen Token von $Pexc$, um schalten zu können). Umgekehrt kann kein Prozess anfangen zu schreiben, wenn bereits ein Prozess liest, denn dann ist $M(Pexc) < 3$ und damit T_{S2} nicht aktiviert.

Daraus kann man schlußfolgern, daß die Existenz eines schreibenden Prozesses, die eines lesenden Prozesses ausschließt. S-Invarianten können auch Eigenschaften wie $\forall M \in EG : M(P1) = M(P2) + M(P3)$ beschreiben (oder bei deren Beweis eine wichtige Rolle spielen). Z.B. wenn $\{(P1,-1),(P2,1),(P3,1)\}$ S-Invariante in einem Netz N_{M_0} ist und $M_0(P1) = M_0(P2) + M_0(P3)$, dann gilt die genannte Eigenschaft.

Die folgende Definition der S-Invarianten entspricht nicht der Standard-Definition wie z.B. in [Rei85a] sondern den S-Vektoren im Satz 2.4. Die Einträge eines solchen S-Vektors sind die Koeffizienten, mit denen die Markierungen gewichtet werden. Im obigen Beispiel also $1\cdot M(Pl)$, $3\cdot M(Ps)$ und $1\cdot M(Pexc)$.

Definition 1.9 (S-Invariante)
Sei N ein S/T-Netz und MG der Markierungsgraph von N. Ein Stellenvektor $I_S : P \to \mathbb{Z}$ heißt *S-Invariante* von N, falls für alle $M \in MG$ gilt $M \to M' \in MG$ impliziert $\Sigma_{p\in P} I_S(p)\cdot M(p) = \Sigma_{p\in P} I_S(p)\cdot M'(p)$.
Eine S-Invariante I_S eines Netzes N heißt *positiv*, falls für alle $p \in P$ gilt $I_S(p) \geq 0$.

Bemerkung: Wenn man S-Invarianten für den Erreichbarkeitsgraphen definiert, $EG_{I_s} = \{I_S : P \to \mathbb{Z} \mid \forall M \in EG : \Sigma_{p\in P} I_S(p)\cdot M_0(p) = \Sigma_{p\in P} I_S(p)\cdot M(p)\}$, gilt $EG_{I_s} \subseteq Inv_S$, wobei Inv_S die Menge der S-Invarianten von N ist. Nach [Rei85b] stimmen EG_{I_s} und Inv_S überein, falls jede Transition des Netzes mindestens einmal schalten kann, eine Bedingung, die normalerweise erfüllt ist.

Abgesehen von ihrer unmittelbaren Interpretation sind positive S-Invarianten auch hinreichende Bedingungen für die Beschränktheit der in ihnen enthaltenen Stellen (die Stellen für die $I_S(p) > 0$).

Satz 1.10 (Beschränktheit)
Sei N_{M_0} ein markiertes Netz. Für jede Stelle $p \in P$ gilt: Wenn p einer positiven S-Invariante angehört, so ist p beschränkt. N_{M_0} ist beschränkt, wenn jede Stelle $p \in S$ einer solchen S-Invariante angehört.

Beweis: Sei I_S positiv und p mit $I_S(p) > 0$ gegeben, dann gilt für alle $M : P \to \mathbb{N}$:

Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n := \Sigma_{p \in P} I_S(p) \cdot M_0(p) \overset{Def 1.9}{=} \Sigma_{p \in P} I_S(p) \cdot M(p) \overset{I_S\ positiv}{\geq} I_S(p) \cdot M(p)$.
Dann gilt $M(p) \leq n / I_S(p)$, also p ist beschränkt. Wenn jede Stelle einer positiven S-Invariante angehört, dann sind alle Stellen beschränkt und also auch N. □

Unabhängigkeit und Parallelität

In der Theorie paralleler und nebenläufiger Systeme gibt es zwei grundsätzliche Methoden, parallele Prozesse formal zu beschreiben. Die einfachere von beiden ist vielleicht der Implementierung von Multitasking-Betriebssystemen auf Rechnern mit von Neumann - Architektur abgeschaut und besteht darin, parallele Prozesse durch beliebige Verschachtelung ihrer Einzelaktionen zu simulieren. Dieses *Interleavingmodell* führt also Parallelität auf Nichtdeterminismus zurück; einem parallelen Ablauf in der Realität entspricht eine Menge von Interleavingsequenzen im Modell. Zwei Einzelaktionen gelten als nebenläufig oder unabhängig, wenn sie mit dem selben Resultat in beliebiger Reihenfolge ausgeführt werden können. Betrachten wir das Netz aus Abbildung 1.4, so gilt dies z.B. für das Schalten der Transitionen $T1s$ und $T1l$ bei der im Bild angegebenen Markierung. Nach dem Schalten der beiden Transitionen sind sie unter der resultierenden Markierung M_3 wieder aktiviert.

Das weitere Schalten der Transitionen $T1s$ ($M_3[T1s\rangle M_4$) und $T1l$ ($M_3[T1l\rangle M_5$), ist nicht unabhängig, und die Transitionen stehen in einem sogenannten *Konflikt* (das Schalten einer Transition hat zur Folge, daß die andere anschließend nicht schalten kann).

Wann können nun zwei Transitionen bei einer Markierung M in beliebiger Reihenfolge schalten ? (Wann sind beide Schaltfolgen $M[t1\rangle M_1$, $M_1[t2\rangle M_2$ und $M[t2\rangle M_1'$, $M_1'[t1\rangle M_2$ möglich?) Der Grund für die Vertauschbarkeit des Schaltens von $T1s$ und Schalten von $T1l$ aus dem Beispiel liegt offensichtlich darin, daß die betreffenden Transitionen weder um die Token in ihrem Vorbereich, noch um freie Kapazitäten in ihrem Nachbereich konkurrieren müssen. Zwei Schaltschritte sind also *unabhängig*, wenn jede Transition über „eigene Token" im Vorbereich und „eigenen Freiraum" im Nachbereich verfügt.

Im Bereich der Petrinetze hat sich für die Beschreibung des abhängigen Verhältnisses von Einzelaktionen (in diesem Fall sind die Aktionen das Schalten von Transitionen) der Begriff *Konflikt* als nützlich erwiesen.

Definition 1.11 (Konflikt)
Für eine Markierung M stehen zwei Transitionen $t1$ und $t2$ eines S/T-Netzes im *Konflikt* miteinander gdw. :

- $t1$ und $t2$ sind M-aktiviert (siehe Definition 1.3.2)
- $(\exists\, p \in \bullet t1 \cap \bullet t2 : \ M(p) < W(p, t1) + W(p, t2))$
  $\vee \quad (\exists p \in t1 \bullet \cap\, t2 \bullet : M(p) + W(t1, p) + W(t2, p) > K(p))$

Das heißt, zwei Transitionen stehen im Konflikt, wenn beide aktiviert sind und durch das Schalten einer von ihnen, die andere nicht mehr aktiviert ist.

Das zweite Modell paralleler bzw. nebenläufiger Systeme wird, in Abgrenzung vom Obigen, als echte Nebenläufigkeit bezeichnet. Es zeichnet sich dadurch aus, daß sich die Parallelität realer Prozesse im Modell direkt widerspiegelt; im Falle der S/T-Netze z.B. durch gleichzeitiges Schalten von Transitionen. Dazu wird zunächst in einem sogenannten Schaltvektor festgelegt, wie oft jede Transition in dem betreffenden Schritt schalten soll. Die in einem Schaltvektor aufgeführten Transitionen sind gemeinsam aktiviert, wenn jede Transition sowohl ihre eigenen Token im Vorbereich als auch ihren eigenen Freiraum im Nachbereich hat.

Betrachten wir exemplarisch einen Schaltvektor, der zwei Transitionen, z.B. $T1s$ und $T1l$, parallel schalten läßt. Dieser ist genau dann unter einer Markierung aktiviert, wenn beide Transitionen aktiviert sind und nicht im Konflikt stehen, d.h. $T1s$ und $T1l$ können M_0 auch in einem Schritt nach M_3 überführen.

Durch die Möglichkeit parallelen Schaltens ergibt sich natürlich ein größerer Markierungsgraph als im sequentiellen Fall. Er enthält zwar die gleichen Knoten wie der sequentielle, d.h. paralleles Schalten liefert keine neuen erreichbaren Markierungen, aber dafür zusätzliche Kanten. Eine formale Definition des parallelen Schaltens und des entsprechenden Markierungsgraphen verschieben wir auf Kapitel 3, wo sich beides in natürlicher Weise aus der Matrixdarstellung für S/T-Netze ergibt.

Lebendigkeit und Transitionsinvarianten

Nebenläufige Systeme haben Eigenschaften, die in sequentiellen Systemen nicht auftreten. So können sie z. B. gerade durch ihre Parallelität in einen Deadlock geraten. Ein Deadlock ist eine Situation, in der sich zwei oder mehrere Prozesse gegenseitig so behindern, daß das gesamte System blockiert ist.

Betrachten wir als Beispiel einer Modellierung einer solchen Situation eine Verallgemeinerung unseres Leser-Schreiber-Systems in Abbildung 1.5. Zwei Prozesse teilen sich zwei Betriebsmittel. Im ersten Schritt benötigt Prozeß 1 das eine Betriebsmittel (das Token auf der Stelle $Pb1$) und Prozeß 2 das andere (das Token auf der Stelle $Pb2$). Im zweiten Schritt benötigt Prozeß 1 seinerseits das Betriebsmittel, das auf $Pb2$ liegt, und legt das erste Betriebsmittel wieder auf $Pb1$ zurück. Prozeß 2 dagegen benötigt das Betriebsmittel von $Pb1$ und legt das zweite Betriebsmittel auf $Pb2$ zurück. Der dritte Schritt initialisiert das System erneut, indem er das jeweils benötigte Betriebsmittel wieder an die entsprechende Stelle zurückgibt und die Anfangsmarkierung wiederherstellt.

Das System läuft einwandfrei, solange beide Prozesse nacheinander ablaufen, d.h. solange es kein Interleaving oder paralleles Schalten zwischen $T1, T2, T3$ einerseits und $T4, T5, T6$ andererseits gibt. Die Schwierigkeit tritt dann auf, wenn die beiden unabhängig aktivierten Transitionen $T1$ und $T4$ im ersten Schritt parallel oder nacheinander geschaltet haben. Dann kann keine Transition mehr schalten, ein Deadlock ist entstanden. Das heißt, daß das System über „zu viel“ Unabhängigkeit verfügt, als daß es störungsfrei laufen könnte. Abbildung 1.6 zeigt den Erreichbarkeitsgraphen des Netzes in Abbildung 1.5. Der

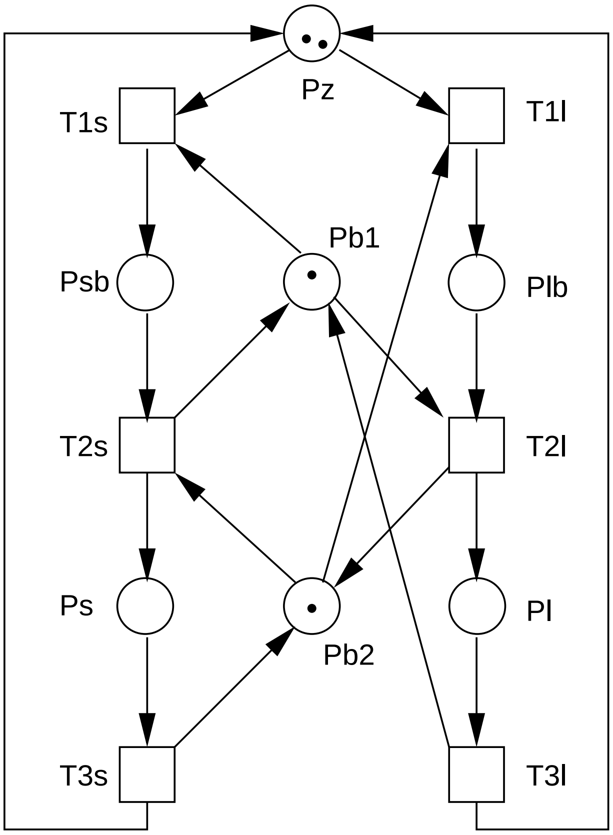


Abbildung 1.5: Deadlock-Modellierung

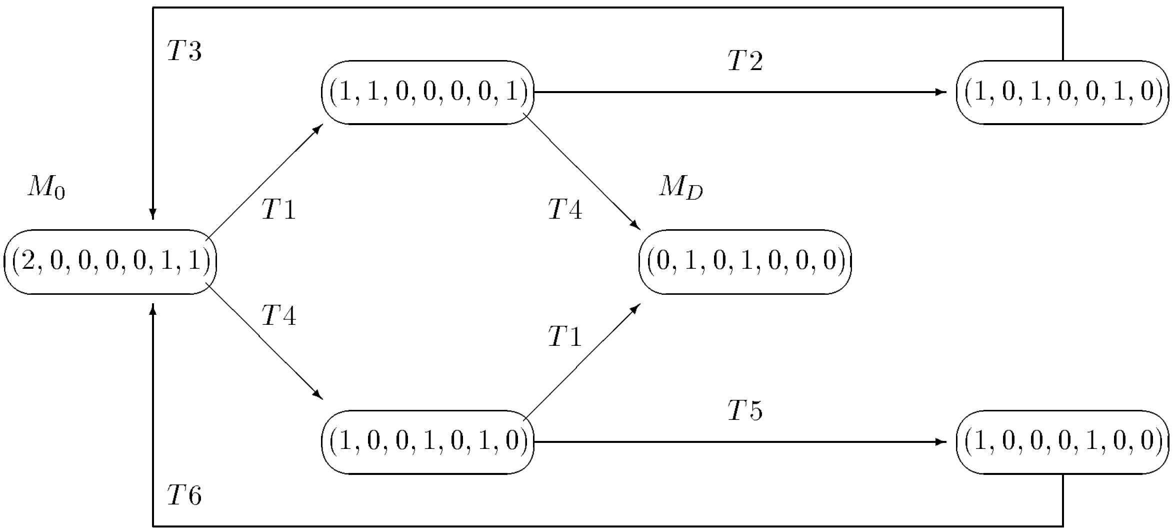


Abbildung 1.6: Erreichbarkeitsgraph des Deadlock-Netzes

Deadlock M_D ist daran zu erkennen, daß von dem entsprechende Knoten keine Kanten ausgehen.

Zu Analysezwecken ist es wichtig, solche und ähnliche Blockierungen ausfindig zu machen. Wir führen daher im folgenden eine Reihe von Lebendigkeitseigenschaften eines S/T-Netzes ein. Alle diese Eigenschaften beruhen darauf, daß gewisse Transitionen t von Markierungen M aus nie mehr, noch einmal oder immer wieder schalten können. Wir definieren also zunächst, wann eine Transition von einer Markierung aus erreichbar ist.

Definition 1.12 (Erreichbarkeit)
Sei N ein S/T-Netz und MG sein Markierungsgraph. Eine Transition $t \in T$ heißt von $M \in MG$ aus erreichbar, kurz M-erreichbar, falls in MG ein Pfad $M \xrightarrow{*} M' \xrightarrow{t} M''$ existiert.

Eine Markierung M von einem Netz N_{M_0} heißt *erreichbar*, falls $M \in EG$, oder anders ausgedrückt, falls $M \in [M_0\rangle$, d. h. $M \in \{M' | M_0 \xrightarrow{*} M' \in MG\}$.

Falls M eine erreichbare Markierung ist, liegt der Pfad $M_0 \xrightarrow{*} M$ auch im Erreichbarkeitsgraphen. Wir brauchen also nicht extra zu sagen, ob sich die Aussage „t ist M-erreichbar“ auf den Erreichbarkeits- oder den Markierungsgraphen bezieht, da sich das aus der Herkunft von M ableiten läßt.

Auf den Begriff der Erreichbarkeit aufbauend definieren wir nun die Lebendigkeit von Markierungen, Transitionen und Netzen, die sich im wesentlichen durch die unterschiedliche Quantifizierung von M und t unterscheiden.

Definition 1.13 (Lebendigkeit)
Sei N ein S/T-Netz und MG sein Markierungsgraph, M_0 eine Anfangsmarkierung für N und EG der entsprechende Erreichbarkeitsgraph. Dann heißt

- eine *Markierung* $M \in MG$ *lebendig*, falls jede Transition $t \in T$ M-erreichbar ist.
- eine *Transition* $t \in T$ *lebendig*, wenn sie für alle Markierungen $M \in EG$ M-erreichbar ist.
- das *Netz* N *lebendig*, wenn alle Transitionen $t \in T$ lebendig sind.

Definition 1.14 (Tote Markierung)
Sei N ein S/T-Netz, dann heißt eine Markierung $M : P \to \mathbb{N}$ *tot*, gdw. kein $t \in T$ M-aktiviert ist.

Die Markierung M_D in Abbildung 1.6 ist tot, alle anderen Markierungen sind lebendig.

Tote Markierungen bzw. Deadlocks sind Haltezustände des Netzes. Lebendige Markierungen sind solche, die noch keine Transition *endgültig* blockiert haben. „Lebendig“ ist hier also nicht das Gegenteil von „tot“! Für die Analyse eines Netzes ist insbesondere die Lebendigkeit der Anfangsmarkierung interessant, da sie darüber Auskunft gibt, ob das Netz „überflüssige“ Transitionen enthält. Sie schließt das Auftreten von Deadlocks aber keinesfalls aus, wie das obige Beispiel zeigt. Stärker ist in dieser Hinsicht die Lebendigkeit einer Transition, die ausdrückt, daß diese nie für immer blockiert werden kann. In einem lebendigen markierten Netz schließlich kann keine Transition je blockiert werden.

Das Leser-Schreiber-Netz in Abbildung 1.4 ist lebendig, das Betriebsmittel-Netz in Abbildung 1.5 nicht, denn wenn $T1$ und $T4$ geschaltet haben, ist eine Markierung entstanden, unter der keine Transition mehr aktiviert ist.

Lebendigkeit für Transitionen und Netze ist bezüglich einer Anfangsmarkierung (d.h. mit Hilfe des Erreichbarkeitsgraphen) definiert, während die Lebendigkeit einer Markierung anhand des Markierungsgraphen beschrieben wird. Das folgende Korollar zeigt den Zusammenhang zwischen der Lebendigkeit eines markierten Netzes und der von Markierungen.

Korollar 1.15 (Lebendigkeit)
Sei N_{M_0} ein markiertes Netz und EG sein Erreichbarkeitsgraph. Dann gilt: N ist genau dann lebendig, wenn jede Markierung $M \in EG$ lebendig ist.

Beweis: N ist lebendig $\overset{Def\ 1.13}{\textbf{gdw.}}$ $\forall t \in T : t$ ist lebendig $\overset{Def\ 1.13}{\textbf{gdw.}}$ $\forall t \in T : \forall M \in EG : \exists M \xrightarrow{*} M' \xrightarrow{t} M'' \in EG$ **gdw.** $\forall t \in T : \forall M \in EG : \exists M \xrightarrow{*} M' \xrightarrow{t} M'' \in MG$ **gdw.** $\forall M \in EG : M$ ist lebendig.

Die vorletzte Äquivalenz gilt, da einerseits wegen $EG \subseteq MG$ jeder Pfad in EG auch in MG ist, und andererseits aus $M \in EG$ und $M \xrightarrow{*} M' \xrightarrow{t} M'' \in MG$ schon $M \xrightarrow{*} M' \xrightarrow{t} M'' \in EG$ folgt. $\square$

Betrachten wir noch einmal Abbildung 1.6, so fällt auf, daß der Erreichbarkeitsgraph zwei Zyklen enthält. Solche Zyklen werden durch sogenannte *Transitionsinvarianten* beschrieben. Die Markierungen, die auf diesen Zyklen liegen, können, nachdem sie einmal erreicht wurden, beliebig oft reproduziert werden.

Die folgende Definition[1] gilt nur für unbeschränkte Netze. Da für jedes Netz mit Kapazitäten sich ein unbeschränktes Netz konstruieren läst, stellt das keine weitere Einschränkung dar.

Definition 1.16 (T-Invariante)
Es sei $N = (P, T, F, K, W)$ ein S/T-Netz mit $\forall p \in P : \ K(p) = \omega$. Ein Transitionsvektor $I_T : T \to \mathbb{Z}$ heißt T-Invariante von N, falls es einen nichtleeren endlichen Pfad $M_1 \xrightarrow{t_1} \cdots \xrightarrow{t_n} M_{n+1} \in MG$ mit $M_1 = M_{n+1}$ gibt, so daß $I_T(t) = |\{i |\ t = t_i \wedge (1 \le i \le n)\}|$, wobei die Betragstriche die Kardinalität der eingeschlossenen Menge bedeuten.

Bemerkung:

- Der Wert $I_T(t)$ gibt an, wieviel mal t innerhalb der zyklischen Schaltfolge (die durch die T-Invariante I_T beschrieben wird) schaltet. Im Erreichbarkeitsgraphen eines markierten Netzes gibt es tatsächlich die von einer positiven T-Invariante beschriebene Schaltforlge nur bei entsprechender Anfangsmarkierung.

[1] Diese Definition von T-Invarianten entspricht nicht der Standard-Definition wie z. B. bei [Rei85a] sondern definiert positive T-Vektoren wie sie im Satz 2.6 verwendet werden.

- T-Invarianten können, wie wir später sehen werden, mit den Mitteln der linearen Algebra gut berechnet werden.

Realisierbare T-Invarianten (die im Erreichbarkeitsgraphen vorzufinden sind) sind aus Modellierungssicht interessant, weil sie zyklische Schaltfolgen repräsentieren, die zum Erreichbarkeitsgraphen des Netzes gehören. In unserem Beispiel aus Abbildung 1.5 gibt es die realisierbaren T-Invarianten $\{(T1,1),(T2,1),(T3,1),(T4,0),(T5,0),(T6,0)\}$ und $\{(T1,0),(T2,0),(T3,0),(T4,1),(T5,1),(T6,1)\}$ sowie $\{(T1,1),(T2,1),(T3,1),(T4,1),$ $(T5,1),(T6,1)\}$ als Komposition der beiden, die Prozesse befinden sich also (solange sie sich nicht gegenseitig blockieren) in Endlosschleifen.

Für endliche und beschränkte markierte Netze, d. h. für solche mit endlichem Erreichbarkeitsgraphen, liefern T-Invarianten außerdem eine notwendige Bedingung für deren Lebendigkeit.

Satz 1.17 (T-Invarianten und Lebendigkeit)
Für jedes endliche, beschränkte, markierte Netz N_{M_0} gilt: Wenn N_{M_0} lebendig ist, dann gibt es eine T-Invariante I_T, so daß alle Transitionen $t \in T$ in I_T vorkommen (bzw. daß $\forall t \in T:\ I_T(t) \geq 1$)

Beweis: Es sei $n' := |P|$ und es sei $k = |T|$ (da N endlich ist, sind P und T endlich) und $\exists n \in \mathbb{N}:\ n = |P|$ und $\exists k \in \mathbb{N}:\ k = |T|$.
N ist beschränkt, also gilt laut Def. 1.7: $\exists m \in \mathbb{N}$ so daß $\forall M \in EG,\ \forall p \in P:\ M(p) \leq m$. Die Anzahl der Markierungen im Erreichbarkeitsgraph $|EG_V|$ ist auch beschränkt, da $|EG_V| \leq n \cdot m^n$ (es gibt nicht mehr als $n \cdot m^n$ Markierungen).
N_{M_0} ist lebendig $\overset{Def\ 1.12, Def\ 1.13}{\Rightarrow} \forall t \in T,\ \forall M \in EG:\ \exists M \xrightarrow{*} M' \xrightarrow{t} M'' \in EG$ (2) $\Rightarrow$ es gibt für alle $M \in EG$ einen Pfad, $M_0 \xrightarrow{t1} \cdots \longrightarrow M'$, der das Schalten aller Transitionen enthält (man kann alle Transitionen aus T der Reihe nach betrachten). Es sei die Menge $\{t1, t2, ..., tk\} := T$. Für $t1$ und M_0 gilt laut (2) $\exists M_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{t1} M_{01}$ Für $t2$ und M_1 gilt laut (2) $\exists M_1 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{t2} M_{02}$. Analog kann man aus M_{01} M_{02} erhalten, über einen Pfad, der $t3$ enthält, und die Konstruktion fortführen, bis man M_{0k} erhält. Der Pfad $M_0 \rightarrow ... \rightarrow M_{01} ... \rightarrow M_{0k}$ ist im EG enthalten und enthält das Schalten aller Transitionen des Netzes. Es sei $M_1 := M_{0k}$. Von M_1 aus kann man in derselben Art M_{1k} erhalten, nachdem die Transitionen $t_1, ..., t_k$ geschaltet haben.Es sei $M_2 := M_{1k}, M_3 := M_{3k}, ...$ Die Konstruktion kann man unendlich weiterführen. Da $|EG_V| \leq n \cdot m^n$ und da $M_1, M_2, ...$ eine unendliche Folge ist, $\exists p, q \in \mathbb{N},\ p < q,\ p, q \leq n \cdot m^n$ so daß $M_p = M_q$. Zwischen M_p und M_q gibt es (laut obigem Finden von M_p und M_q) einen Pfad, auf dem mindestens einmal alle Transitionen schalten. Es sei $I_T : T \rightarrow N,\ I_T(t) :=$ die Anzahl der Schaltschritte in denen t auf dem erwähnten Pfad geschaltet hat. I_T ist eine (realisierbare) T-Invariante, die alle Transitionen enthält. $\square$

Als Gegenbeispiel für die Implikation in der anderen Richtung dient uns wieder das Deadlock-Netz in Abbildung 1.5 und sein Erreichbarkeitsgraph in Abbildung 1.6. Dort kommen alle Transitionen in der Invariante $\{(T1,1),(T2,1),(T3,1),(T4,1),(T5,1),(T6,1)\}$ vor obwohl das Netz nicht lebendig ist.

S/T-Netze mit unbeschränkten Kapazitäten

Im Folgenden werden wir für S/T-Netze eine Repräsentation entwickeln, die einen optimierten Zugriff auf die für das Schalten notwendigen Informationen bietet und die effiziente Analyse bestimmter Netzeigenschaften ermöglicht. Die *Matrixdarstellung für S/T-Netze* funktioniert rein syntaktisch und kommt daher einer Implementierung nahe. Außerdem erreichen wir eine Vereinfachung der Schreibweise und des Rechnens und bekommen obendrein das parallele Schalten von Transitionen quasi geschenkt.

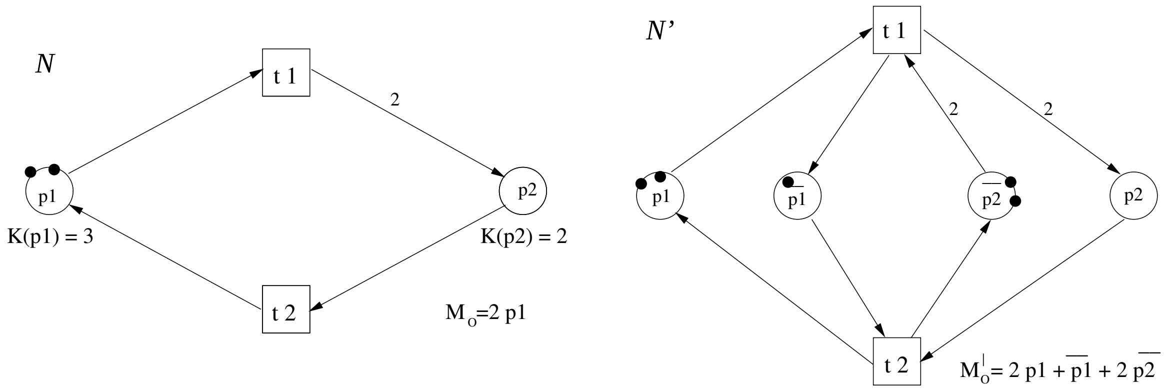
Die Matrixdarstellung wird nur für Netze mit unbeschränkten Stellenkapazitäten definiert. Um die darauf aufbauenden Analyse- und Entscheidungsverfahren auch für Netze mit beschränkter Kapazität verfügbar zu machen, betrachten wir zunächst eine Konstruktion, die uns zu einem beliebigen markierten Netz ein äquivalentes Netz mit unbeschränkten Kapazitäten liefert. Wir sehen zwei markierte Netze als äquivalent an, wenn ihre Erreichbarkeitsgraphen isomorph sind.

Definition 1.18 (Netz mit unbeschränkten Kapazitäten zu N)
Sei $N = (P, T, F, K, W, M_0)$ ein markiertes S/T-Netz

Dann ist das *Netz mit unbeschränkten Kapazitäten* $N' = (P', T, F', K', W', M_0')$ *zu* N gegeben durch:

- $P' = P \cup \{\overline{p} | p \in P \text{ mit } K(p) \neq \omega\}$
- $F' = F \cup \{(t, \overline{p}) | (p, t) \in F, \overline{p} \in P' \backslash P\} \cup \{(\overline{p}, t) | (t, p) \in F, \overline{p} \in P' \backslash P\}$
- $K'(x) = \omega$ für alle $x \in P'$
- $W' := W'(x) = \begin{cases} W(t,p) & ; \text{falls } x = (\overline{p}, t) \in F' \backslash F \\ W(p,t) & ; \text{falls } x = (t, \overline{p}) \in F' \backslash F \\ W(x) & ; \text{sonst} \end{cases}$
- $M_0' := M_0'(x) = \begin{cases} K(p) - M_0(p) & ; \text{falls } x = \overline{p} \in P' \backslash P \\ M_0(x) & ; \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel: Konstruktion eines Netzes mit unbeschränkten Kapazitäten:



Lemma 1.19 (Bewahrung des Schaltverhaltens)
Sei $N = (P, T, F, K, W, M_0)$ ein S/T-Netz mit Kapazitäten und $N' = (P', T, F', K', W', M_0')$ das dazugehörige Netz mit unbeschränkten Kapazitäten.

1. Dann ist jede Transition $t \in T$, die in N unter M_1 aktiviert ist, auch in N' unter M_1', mit
$$M_1' := M_1'(x) = \begin{cases} K(p) - M_1(p) & ; \text{falls } x = \overline{p} \in P' \backslash P \\ M_1(x) & ; \text{sonst} \end{cases}$$
aktiviert.

2. Für jeden möglichen Schaltschritt $M_1[t\rangle M_2 \in MG$ gibt es einen möglichen Schaltschritt $M_1'[t\rangle M_2' \in MG'$, mit:
$$M_2' := M_2'(x) = \begin{cases} K(p) - M_2(p) & ; \text{falls } x = \overline{p} \in P' \backslash P \\ M_2(x) & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Beweis:

1. Sei $t \in T$ unter M_1 aktiviert, also gilt $\forall p \in \bullet t : M_1(p) \geq W(p, t)$ und $\forall p \in t\bullet : M_1(p) + W(t, p) \leq K(p)$

   Nun gibt es 2 Fälle, entweder $p \in P$ oder $\overline{p} \in P' \backslash P$. Im ersten Fall, bei $p \in P \wedge p \in \bullet t$,dann gilt $M_1'(p) = M_1(p) \geq W(p, t) = W'(p, t)$.
   Es sei nun $\overline{p} \in P' \backslash P \wedge \overline{p} \in \bullet t$:
   $M_1'(\overline{p}) = K(p) - M_1(p) \geq W(t, p) = W'(\overline{p}, t)$, also ist t in N' auch unter M_1' aktiviert.

2. Sei M_2 die Folgemarkierung von M_1 mit
$$M_2(p) = \begin{cases} M_1(p) - W(p,t) & ; \text{falls } p \in \bullet t - t\bullet \\ M_1(p) + W(t,p) & ; \text{falls } p \in t \bullet - \bullet\, t \\ M_1(p) - W(p,t) + W(t,p) & ; \text{falls } p \in \bullet t \cap t\bullet \\ M_1(p) & ; \text{sonst} \end{cases}$$
   dann gilt für $p \in P \subseteq P'$:
$$M_2'(p) = \begin{cases} M_1'(p) - W'(p,t) = M_1(p) - W(p,t) = M_2(p) & ; \text{falls } p \in \bullet t - t\bullet \\ M_1'(p) + W'(t,p) = M_1(p) - W(t,p) = M_2(p) & ; \text{falls } p \in t \bullet - \bullet\, t \\ M_1'(p) - W'(p,t) + W'(t,p) = & \\ \quad M_1(p) - W(p,t) + W(t,p) = M_2(p) & ; \text{falls } p \in \bullet t \cap t\bullet \\ M_1'(p) = M_1(p) = M_2(p) & ; \text{sonst} \end{cases}$$
   Also $M_2'(p) = M_2(p)$ für $p \in P \subseteq P'$.
   Sei $\overline{p} \in P' \backslash P$, dann ist

$$M_2'(\overline{p}) = \begin{cases} M_1'(\overline{p}) - W'(\overline{p},t) = K(p) - M_1(p) - W(t,p) = & \\ \quad = K(p) - (M_1(p) + W(t,p)) = K(p) - M_2(p) & ;\text{ falls } \overline{p} \in \bullet t - t\bullet \\ M_1'(\overline{p}) + W'(t,\overline{p}) = K(p) - M_1(p) + W(p,t) = & \Rightarrow p \in t\bullet - \bullet t \\ \quad = K(p) - (M_1(p) - W(p,t)) = K(p) - M_2(p) & ;\text{ falls } \overline{p} \in t\bullet - \bullet t \\ M_1'(\overline{p}) - W'(\overline{p},t) + W'(t,\overline{p}) = K(p) - & \Rightarrow p \in \bullet t - t\bullet \\ \quad - (M_1(p) + W(t,p) - W(p,t)) = K(p) - M_2(p) & ;\text{ falls } \overline{p} \in \bullet t \cap t\bullet \\ M_1'(\overline{p}) = K(p) - M_1(p) = K(p) - M_2(p) & ;\text{ sonst} \end{cases}$$

Also $M_2'(\overline{p}) = K(p) - M_2(p)$.
Insgesamt also:

$$M_2'(x) = \begin{cases} K(x) - M_2(x) & ;\text{falls } x = \overline{p} \\ M_2(x) & ;\text{sonst} \end{cases}$$

□

Der folgende Satz stellt die Äquivalenz des Schaltverhaltens fest.

Satz 1.20 (Isomorphie der Erreichbarkeitsgraphen)
Sei $N'_{M_0'}$ das Netz mit unbeschränkten Kapazitäten zu einem markierten S/T-Netz N_{M_0}. Dann sind die Erreichbarkeitsgraphen EG und EG' der Netze N und N' isomorph, d. h. es gibt einen bijektiven Graphmorphismus $f:\ EG \to EG'$.

Beweis: Wir definieren f und zeigen, daß f ein Isomorphismus ist.

- $f_V(M) = M'$ mit $M'(x) := \begin{cases} K(p) - M(p) & ;\text{ falls } x = \overline{p} \in P' \backslash P \\ M(x) & ;\text{ sonst} \end{cases}$

- $f_E(M_1 \xrightarrow{t} M_2) = f_V(M_1) \xrightarrow{t} f_V(M_2)$

1. f ist wohldefiniert

- **f_V ist wohldefiniert.**
  Man kann mit der angegebenen Regel für alle $M \in EG_V$ ein $f_V(M)$ bilden und $M' = f_V(M) \in EG'_V$, da M' für alle $p \in P'$ definiert ist und somit eine Markierung in N'.

- **f_E ist wohldefiniert**
  Z.z.: $M_1 \xrightarrow{t} M_2 \in EG_E \Rightarrow$ es gibt einen Schaltschritt $f_V(M_1) \xrightarrow{t} f_V(M_2) \in EG'_E$.
  Das folgt aus Lemma 1.19

2. f ist injektiv

- f_V ist injektiv (α)
  Es seien $M_1, M_2 \in EG_V$ so daß $f_V(M_1) = f_V(M_2)$. (z.z. ist $M_1 = M_2$)
  $\Rightarrow \forall p \in P'$: $f_V(M_1)(p) = f_V(M_2)(p) \overset{deff}{\Rightarrow} \forall p \in P$: $M_1(p) = M_2(p) \Rightarrow M_1 = M_2$

- f_E ist injektiv (β)
  Es seien $t, t', M_1, M_2, M_3, M_4$ so, daß $f_E(M_1 \xrightarrow{t} M_2) = f_E(M_3 \xrightarrow{t'} M_4) \overset{def f_E}{\Rightarrow} f_V(M_1) \xrightarrow{t} f_V(M_2) = f_V(M_3) \xrightarrow{t} f_V(M_4)$ und durch Identifikation der Glieder der Gleichung unter Berücksichtigung der Injektivität von f_V erhalten wir:
  $f_V(M_1) = f_V(M_3) \overset{(\alpha)}{\Rightarrow} M_1 = M_3$ und analog $M_2 = M_4$ und $t = t' \Rightarrow$
  $\Rightarrow M_1 \xrightarrow{t} M_2 = M_3 \xrightarrow{t'} M_4 \Rightarrow (\beta)$

2. f ist surjektiv
Induktion über die Anzahl der Schaltschritte
Induktionsanfang:
$M'_0 \in EG'$: laut Voraussetzung gilt $M'_0 = f_V(M_0)$
Induktionsschritt:
Z.z. ist, daß für jede Markierung $M'_1 \in EG'$ mit der Eigenschaft
$\exists M_1 \in EG$ so daß $f_V(M_1) = M'_1$ (Induktionsverankerung) gilt:
$\forall M'_2 \in EG'$, für die es einen Schaltschritt $M'_1 \xrightarrow{t} M'_2 \in EG'$ gibt, $\exists M_2 \in EG$, so daß $f_V(M_2) = M'_2$ und $f_E(M_1 \xrightarrow{t} M_2) = M'_1 \xrightarrow{t} M'_2$
• wenn t bei M'_1 schalten kann, dann kann t auch bei M_1 schalten (folgt unmittelbar aus der Definition von f_V).
Es sei M_2 so daß $M_1 \xrightarrow{t} M_2$
Laut Satz 1.19 gilt: $f_E(M_1 \xrightarrow{t} M_2) = f_V(M_1) \xrightarrow{t} f_V(M_2)$. Da $f_V(M_1) \xrightarrow{t} M'_2$, folgt $f_V(M_2) = M'_2$. Aus $M_1 \in EG$ und $M_1 \xrightarrow{t} M_2$ folgt $M_2 \in EG$ und $\exists f_V(M_2) = f_V(M_2) = M'_2$ (i)
• Laut Satz 1.19 gilt: $f_E(M_1 \xrightarrow{t} M_2) = f_V(M_1) \xrightarrow{t} f_V(M_2) = M'_1 \xrightarrow{t} M'_2$
und der Schaltschritt $M'_1 \xrightarrow{t} M'_2$ befindet sich im Wertebereich von f_E. (ii)
$(i) \wedge (ii) \Rightarrow$ laut Theorem der vollständigen Induktion sind f_E und f_V surjektiv $\Rightarrow f$ ist surjektiv.

f ist wohldefiniert, injektiv und surjektiv $\Rightarrow f$ ist ein Isomorphismus.

□

Wir können nun die Eigenschaften von N_{M_0} dadurch untersuchen, daß wir sie für $N'_{M'_0}$ berechnen und die Ergebnisse auf N_{M_0} übertragen. Der obige Satz, und insbesondere der Morphismus f, definiert diese Übertragung und sichert deren Korrektheit.

Korollar 1.21 (Eigenschaften des Netzes mit unbeschränkten Kapazitäten)
Seien $N'_{M'_0} = (P', T, F', K', W', M'_0)$ das Netz mit unbeschränkten Kapazitäten zu einem markierten Netz $N_{M_0} = (P, T, F, K, W, M_0)$ und EG bzw. EG' die entsprechenden Erreichbarkeitsgraphen. Dann gilt:

1. t ist lebendig in N_{M_0} **gdw.** t ist lebendig in $N'_{M'_0}$.
2. a)$M \in EG$ ist lebendig **gdw.** $f_V(M) \in EG'$ ist lebendig .
   b)$M \in EG$ ist tot **gdw.** $f_V(M) \in EG'$ ist tot.

3. N_{M_0} ist lebendig **gdw.** $N'_{M'_0}$ ist lebendig.

4. $p \in P$ in N ist beschränkt **gdw.** $p \in P'$ in N' ist beschränkt in EG'.

5. $\forall p \in P$: $\{p, \overline{p}\} \subseteq P'$ bilden eine S-Invariante von N'.

6. N_{M_0} ist beschränkt **gdw.** $N'_{M'_0}$ ist beschränkt.

7. $I_S : P \to \mathbb{N}$ ist S-Invariante von N' **gdw.** $I'_S : P' \to \mathbb{N}$ mit $I'_S(x) := \begin{cases} I_S(x) & \text{für } x \in P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist S-Invariante von N'.

8. $I_T : T \to \mathbb{N}$ ist T-Invariante in N **gdw.** I_T ist T-Invariante in N'.

Beweisidee:
1. und 2. folgen aus der Tatsache, daß eine Transition $t \in T$ genau dann von einer Markierung $M' \in EG'$ aus erreichbar ist, wenn t von $f_V^{-1}(M') \in EG$ aus erreichbar ist, (siehe Satz 1.20) d.h. $\exists M' \xrightarrow{*} M'_1 \xrightarrow{t} M'_2 \in EG'$ **gdw.** $\exists f_V(M') \xrightarrow{*} f_V(M'_1) \xrightarrow{t} f_V(M'_2) \in EG$.
3. folgt dann direkt aus 1.
4. und 5. drücken die korrekte Funktion der Konstruktion des unbeschränkten Netzes aus: Eine (möglicherweise durch begrenzte Kapazität erzwungene) Beschränktheit einer Stelle p des Ausgangsnetzes wird im abgeleiteten Netz durch ihre Komplementstelle sichergestellt, p und $\overline{p}$ bilden eine S-Invariante. 6. folgt dann aus 4. und 5.
7. und 8. Übungsaufgabe. □

Die Konstruktion liefert nur für Netze mit Anfangsmarkierung ein äquivalentes Netz, und die Markierungsgraphen sind keinesfalls isomorph. Daher werden auch nur die Eigenschaften des Erreichbarkeitsgraphen, nicht aber die des Markierungsgraphen bewahrt.

Im folgenden Abschnitt betrachten wir Netze mit unbeschränkten Stellenkapazitäten und führen die *Matrixdarstellung von S/T-Netzen* ein.

Kapitel 2

Linear Algebraische Darstellung von S/T-Netzen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Darstellung von S/T-Netzen durch Matrizen und Vektoren. Das hat folgende Vorteile:

- Berechnung von Schaltsequenzen läßt sich durch eine Matrizen-Vektor-Berechnung ausdrücken und und ist somit die Basis für automatische Berechnung.
- Paralleles Schalten läßt sich durch eine Vektoraddition ausdrücken.
- Invarianten können berechnet werden.
  Invarianten sind entweder Zustände, die sich im Laufe des Ablaufs nicht ändern , also invariant bleiben (Stellen-Invarianten, siehe Definition 1.9) oder Schaltsequenzen die immer wieder durchlaufen werden können (Transitions-Invarianten, siehe Definition 1.16)
  Beide stellen eine Methode zur Überprüfung der Korrektheit eine Netzes dar.

Für die linear algebraische Darstellung müssen wir Netze mit unbeschränkten Kapazitäten voraussetzen. Dies stellt jedoch keine Einschränkung dar, weil jedes Netz mit Kapazitäten durch eines ohne Kapazitäten ausgedrückt werden kann (siehe Definition 1.18 und Satz 1.20 im letzten Kapitel).

Zunächst wiederholen wir die nötigen Grundbegriffe der linearen Algebra:

Vektoren und Matrizen werden in der Regel mit natürlichen Zahlen indiziert, d.h. eine ganzzahlige $n \times k$-Matrix ist eine Tabelle mit n Zeilen und k Spalten, also eine Abbildung $\underline{m} : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, k\} \to \mathbb{Z}$. Wir verwenden stattdessen beliebige endliche Indexmengen, da diese in unserem Fall direkt durch die Mengen P und T eines Netzes gegeben sind; eine ganzzahlige $A \times B$-Matrix ist also in unserem Falle eine Abbildung $\underline{m} : A \times B \to \mathbb{Z}$. Um die Matrizen tabellarisch darzustellen und auf die üblichen Konstruktionen zurückzugreifen, numerieren wir die Elemente der Indexmengen einfach durch, d.h. wir definieren eine bijektive Abbildung $f : A \to \{1, \ldots, |A|\}$, wobei $|A|$ die Kardinalität der Indexmenge A bezeichnet.

Vektoren sind einspaltige bzw. einzeilige Matrizen, d.h. Abbildungen $v : A \times \{*\} \to \mathbb{Z}$ (Spaltenvektoren) bzw. $v : \{*\} \times A \to \mathbb{Z}$ (Zeilenvektoren). Da das kartesische Produkt einer Menge A mit der einelementigen Menge $\{*\}$ isomorph zur ursprünglichen Menge A ist, betrachten wir stattdessen den A-Vektor v als eine Abbildung $v : A \to \mathbb{Z}$ und sehen ihn als Spaltenvektor an.

Viele der von uns betrachteten Matrizen und Vektoren sind positiv ganzzahlig, d.h. ihr Bildbereich ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. So sind sowohl Markierungen $M : P \to \mathbb{N}$ als auch Transitionsinvarianten (gewichtete Mengen) $I_T : T \to \mathbb{N}$ positive P- bzw. T-Vektoren.

Vektoren wie auch Matrizen können addiert sowie untereinander und mit ganzen Zahlen multipliziert werden. Für A-Vektoren v_1, v_2 ist

- ihre *Summe* $v_1 + v_2$ der A-Vektor v mit $v(a) = v_1(a) + v_2(a)$,
- ihr *Skalarprodukt* $v_1 \cdot v_2$ die ganze Zahl $\Sigma_{a \in A} v_1(a) \cdot v_2(a)$.
- das *skalare Vielfache* $z \cdot v_1$ für $z \in \mathbb{Z}$ der A-Vektor v mit $v(a) = z \cdot v_1(a)$.
- $v_1 \geq v_2$ falls für alle $a \in A$ gilt: $v_1(a) \geq v_2(a)$.

Analog ist für $A \times B$-Matrizen $\underline{m}_1, \underline{m}_2$ und eine $B \times C$-Matrix $\underline{m}_3$

- die *Summe* $\underline{m}_1 + \underline{m}_2$ die $A \times B$-Matrix $\underline{m}$ mit $\underline{m}(a, b) = \underline{m}_1(a, b) + \underline{m}_2(a, b)$.
- das *Produkt* $\underline{m}_2 \cdot \underline{m}_3$ die $A \times C$-Matrix $\underline{m}$ mit $\underline{m}(a, c) = \Sigma_{b \in B} \underline{m}_1(a, b) \cdot \underline{m}_2(b, c)$.
- das *skalare Vielfache* $z \cdot \underline{m}_1$ die $A \times B$-Matrix $\underline{m}$ mit $\underline{m}(a, b) = z \cdot \underline{m}_1(a, b)$.

Die links- bzw. rechtsseitige Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor erhalten wir, indem wir den Vektor in der oben beschriebenen Weise als einzeilige bzw. einspaltige Matrix auffassen. Weiterhin läßt sich mit Hilfe der Skalarmultiplikation und der Addition auch die Subtraktion von Matrizen bzw. Vektoren definieren.

Für die Verknüpfungen gelten die üblichen Gesetze, d.h. die Addition von Matrizen ist kommutativ und assoziativ, Skalarmultiplikation und Addition sind distributiv. Die Matrixmultiplikation ist assoziativ (aber nicht kommutativ!) und Matrixmultiplikation und Addition sind distributiv, d.h. $(\underline{m}_1 + \underline{m}_2) \cdot \underline{m} = (\underline{m}_1 \cdot \underline{m}) + (\underline{m}_2 \cdot \underline{m})$ und $\underline{m} \cdot (\underline{m}_1 + \underline{m}_2) = (\underline{m} \cdot \underline{m}_1) + (\underline{m} \cdot \underline{m}_2)$. Für Vektoren ist darüberhinaus das Skalarprodukt kommutativ.

Matrizen lassen sich transponieren. In der tabellarischen Darstellung werden dabei Zeilen zu Spalten und Spalten zu Zeilen, d.h. aus einer $A \times B$-Matrix $\underline{m}$ wird eine $B \times A$-Matrix $\underline{m}^T$ mit $\underline{m}^T(b, a) = \underline{m}(a, b)$. Die Transposition eines (Spalten-) Vektors v liefert den Zeilenvektor v^T der durch dieselbe Abbildung $v : A \to \mathbb{Z}$ gegeben ist, d.h. $v^T(a) = v(a)$.

Es gilt $(\underline{m}^T)^T = \underline{m}$ sowie $(v^T)^T = v$. Die Transposition ist mit der Addition und der Skalarmultiplikation verträglich. Für das Produkt von Matrizen gilt $(\underline{m}_1 \cdot \underline{m}_2)^T = \underline{m}_2^T \cdot \underline{m}_1^T$.

Tabelle 2.1: Matrixdarstellung des Leser-Schreiber-Netzes

$\underline{pre}/\underline{post}$	T1s	T2s	T3s	T1l	T2l	T3l	M_0
Pz	1/0		0/1	1/0		0/1	3
Psb	0/1	1/0					
Ps		0/1	1/0				
Plb				0/1	1/0		
Pl					0/1	1/0	
Pexc		3/0	0/3		1/0	0/1	3

2.1 Idee: S/T-Netze als Matrizen

Definition 2.1 (Netz in Matrixdarstellung)
Ein *S/T-Netz in Matrixdarstellung* $\underline{N} = (P, T, \underline{pre}, \underline{post})$ besteht aus einer endlichen Menge von Transitionen T, einer endlichen Menge von Stellen P, sowie zwei positiven Matrizen $\underline{pre}, \underline{post} : P \times T \to \mathbb{N}$.

Sei $N = (P, T, F, K, W)$ ein S/T-Netz, so daß $K(p) = \omega$ für alle $p \in P$. Dann ist die *Matrixdarstellung* $\underline{N}$ von N durch $\underline{N} = (P, T, \underline{pre}, \underline{post})$ gegeben, für $\underline{pre}$ und $\underline{post}$: $P \times T \to \mathbb{N}$ mit

- $\underline{pre}(p,t) = \begin{cases} W(p,t) & ; \text{falls } p \in \bullet t \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$

- $\underline{post}(p,t) = \begin{cases} W(t,p) & ; \text{falls } p \in t\bullet \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$

Ein *markiertes Netz in Matrixdarstellung* $\underline{N}_{M_0}$ ist ein S/T-Netz in Matrixdarstellung $\underline{N}$ zusammen mit einer Anfangsmarkierung $M_0 : P \to \mathbb{N}$.

Dabei gibt $\underline{pre}$ an, wieviele Token die Transition t beim Schalten von p entnehmen muß und $\underline{post}$ beschreibt, wieviele Token t auf p ablegt. Die Matrixdarstellung eines S/T-Netzes ist also nicht viel mehr als eine tabellarische Darstellung der Flußrelation zusammen mit den Kantengewichten. Da Markierungen Abbildungen $M : P \to \mathbb{N}$ sind, können wir sie auch als Vektoren über der Stellenmenge des betreffenden Netzes schreiben. Tabelle 2.1 zeigt die Matrixdarstellung des Leser-Schreiber-Netzes von Seite 8. $\underline{pre}$ und $\underline{post}$ werden zusammen dargestellt, da sie beide dieselbe Zeilen- und Spaltenzahl haben. Die Anfangsmarkierung M_0 wird als Spaltenvektor dargestellt.

Mit Hilfe von Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen bzw. Vektoren definieren wir nun das Schaltverhalten eines Netzes in Matrixdarstellung. Wie angekündigt beinhaltet es schon das parallele Schalten endlich vieler Transitionen.

Definition 2.2 (Schaltverhalten eines Netzes in Matrixdarstellung)
Sei $\underline{N}$ ein S/T-Netz in Matrixdarstellung wie in Definition 2.1 und $M : P \to \mathbb{N}$ eine Markierung für N.

1. Ein *Schaltvektor* ist ein positiver Vektor $v : T \to \mathbb{N}$, der jeder Transition $t \in T$ die Häufigkeit ihres Schaltens zuordnet. v heißt *M - aktiviert*, falls $M \geq \underline{pre} \cdot v$.

2. Ein M-aktivierter Schaltvektor v bestimmt eine *Folgemarkierung* M' von M durch $M' = M - \underline{pre} \cdot v + \underline{post} \cdot v = M + (\underline{post} - \underline{pre}) \cdot v$.

Die (ganzzahlige) Matrix $\underline{I} = \underline{post} - \underline{pre}$ heißt *Inzidenzmatrix* des Netzes N. Wir sagen auch *v schaltet von M nach M'* und schreiben $M[v\rangle M'$.

Unser Leser-Schreiber-System hat folgende Inzidenzmatrix:

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da Vor- und Nachbereich jeder Transition dieses Netzes disjunkt ist, läßt sich die Matrix $\underline{pre}$ rekonstruieren, indem einfach in $\underline{I}$ alle positiven Einträge ausgeblendet, und das Vorzeichen der verbleibenden gewechselt wird. Analog erhält man $\underline{post}$, indem man alle negativen Einträge wegläßt.

Untersuchen wir nun, inwiefern die obige Definition paralleles Schalten ermöglicht. Wir haben bereits in Abschnitt 1.2 festgestellt, daß in unserem Leser-Schreiber-Netz die Schaltschritte $M_0[T1s\rangle M_1, M_0[T1l\rangle M_2$ unabhängig sind, also unserer Intuition nach parallelisierbar sein sollten. Zunächst führen wir für jede Transition $t \in T$ den charakteristischen Vektor $c_t : T \to \mathbb{N}$ mit

$$c_t(x) = \begin{cases} 1 & ; \text{falls } x = t \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

ein.

Diesen parallelen Schaltschritt wollen wir durch $M_0[c_{T1s} + c_{T1l}\rangle M_2$ beschreiben, wobei $c_{T1s} + c_{T1l} : T \to \mathbb{N}$ den Schaltvektor beschreibt, der für $T1s$ und $T1l$ jeweils eine Eins und sonst nur Nullen enthält. Nach unserer Definition müssen wir nun zur Realisierung dieses Schaltvorganges zunächst überprüfen, ob $\underline{pre} \cdot (c_{T1s} + c_{T1l}) \leq M_0$ gilt.

Die Multiplikation der $\underline{pre}$-Matrix mit dem Schaltvektor $c_{T1s} + c_{T1l}$ kann man sich anschaulich so vorstellen, daß zunächst $T1s$ und $T1l$ durch die entsprechenden Spalten der $\underline{pre}$-Matrix ersetzt, und diese dann anschließend addiert werden. Wir rechnen also $\underline{pre} \cdot (c_{T1s} + c_{T1l}) = \underline{pre} \cdot (1,0,0,1,0,0) = (1,0,0,0,0,0) + (1,0,0,0,0,0) = (2,0,0,0,0,0) <$

$(3,0,0,0,0,0) = M_0$. Macht euch klar, daß das Ergebnis ein Stellenvektor $M : P \to \mathbb{N}$, d.h. eine Markierung ist. Die $\leq$-Relation auf Vektoren ist komponentenweise definiert, d.h. $\underline{pre} \cdot (c_{T1s} + c_{T1l}) \leq M_0$ ist erfüllt, wenn auf jeder Stelle $p \in P$ wenigstens soviele Token liegen, wie $T1s$ und $T1l$ zusammen von dort abziehen wollen.

Das Schalten selbst erfolgt dadurch, daß zuerst $\underline{pre} \cdot (c_{T1s} + c_{T1l})$ von der Markierung M_0 abgezogen wird, d.h. $T1s$ und $T1l$ entnehmen *gleichzeitig* die Token aus ihrem Vorbereich, und anschließend wird zu der dadurch entstandenen Markierung $\underline{post} \cdot (c_{T1s} + c_{T1l})$ hinzuaddiert, was das gleichzeitige Ablegen der Token auf den Nachbereichsstellen beschreibt.

Wenn wir anstelle des Schaltvektors v nur *charakteristische Vektoren* von Transitionen zulassen, bekommen wir für Netze in Matrixdarstellung genau das (sequentielle) Schaltverhalten nach Definition 1.3. Das sequentielle Schalten ist also ein Spezialfall des parallelen. Andersherum läßt sich jeder parallele Schaltschritt in beliebiger Reihenfolge sequentialisieren.

Satz 2.3 (Paralleles und Sequentielles Schalten)
Sei N ein S/T-Netz, MG sein Markierungsgraph und $\underline{N}$ die Matrixdarstellung von N. Dann gilt:

1. Für $t \in T$ existiert ein Schaltschritt $M[c_t\rangle M'$ **gdw.** $M \xrightarrow{t} M'$ ein Schaltschritt in MG ist.

2. Für einen Schaltvektor $v : T \to \mathbb{N}$ und $M \in MG$ so daß v M-aktiviert ist, gilt: Wenn $M[v\rangle M'$ existiert, so gibt es einen Pfad $M_1 \xrightarrow{t_1} \cdots \xrightarrow{t_k} M_{k+1}$ in MG mit $M_1 = M$ und $M_{k+1} = M'$ für jede Folge von Transitionen $t_1, \ldots, t_k$ mit $c_{t_1} + \cdots + c_{t_k} = v$.

Beweis:

1. t ist M-aktiviert **gdw.** $\forall p \in \bullet t.\ M(p) \geq W(p,t)$ **gdw.** $\forall p \in \bullet t.\ M(p) \geq \underline{pre}(p,t)$ **gdw.** $\forall p \in P.\ M(p) \geq \underline{pre}(p,t)$ (da $\forall p \in P - \bullet t.\ \underline{pre}(p,t) = 0$) **gdw.** $M \geq \underline{pre} \cdot c_t$ **gdw.** c_t ist M-aktiviert.

   $M[c_t\rangle M'$ **gdw.** $M' = M + (\underline{post} - \underline{pre}) \cdot c_t$. Für $p \in \bullet t - t\bullet$ ist $\underline{post}(p,t) = 0$, d.h. $M'(p) = M(p) - \underline{pre}(p,t) = M(p) - W(p,t)$. Für $p \in t\bullet - \bullet t$ ist $\underline{pre}(p,t) = 0$, d.h. $M'(p) = M(p) + \underline{post}(p,t) = M(p) + W(t,p)$. Für $p \in t\bullet \cap \bullet t$ gilt: $M'(p) = M(p) - \underline{pre}(p,t) + \underline{post}(p,t) = M(p) - W(p,t) + W(t,p)$. Nach Definition 1.3 gilt dann $M[t\rangle M'$.

2. Wir beweisen durch Induktion über k daß alle charakteristischen Schaltvektoren c_{t_i} für $i = 1, ..., k$ M_i aktiviert sind.

   Induktionsanfang: $k = 0$
   Für $k = 0$ gibt es keine charakteristischen Schaltvektoren, es sind also alle aktiviert.

   Induktionsannahme: Für $k = n$ gilt: für $v = c_{t_1} + ... + c_{t_n}$ $M[v\rangle M'$ **gdw.** jede Folge $t_1...t_n$ $M_1 \xrightarrow{t_1} ... \xrightarrow{t_n} M_{n+1}$ in MG.

Induktionsschritt: $n \mapsto n+1$.
Sei $v = c_{t_1} + ... + c_{t_{n+1}}$ Schaltvektor und $M_1[v\rangle M_{n+2}$.
Wir wählen einen beliebigen charakteristischen Vektor c_{t_i}, $i \in \{i, ..., n+1\}$. Dieser ist unter M_1 aktiviert, da $c_{t_i} \leq v$ und deshalb $\underline{pre} \cdot c_{t_i} \leq \underline{pre} \cdot v \leq M_1$. Sei M_2 Folgemarkierung von M_1 unter c_{t_i}, dann ist $v' = c_{t_1} + ... + c_{t_{i-1}} + c_{t_{i+1}} ... c_{t_{n+1}} = v - c_{t_i}$ unter M_2 aktiviert, denn

$$\begin{array}{rcll} M_2 & = & M_1 - \underline{pre} \cdot c_{t_i} + \underline{post} \cdot c_{t_i} & \\ & = & M_1 - \underline{pre}(v - v') + \underline{post} \cdot c_{t_i} & \\ & = & M_1 - \underline{pre} \cdot v + \underline{pre} \cdot v' + \underline{post} \cdot c_{t_i} & \\ & \geq & \underline{pre} \cdot v' + post \cdot c_{t_i} & \text{da } M_1 - \underline{pre} \cdot v \geq 0 \\ & \geq & \underline{pre} \cdot v' & \text{da } post \cdot c_{t_i} \geq 0 \end{array}$$

Da v' ein Vektor ist, der sich in n charakteristische Vektoren zerlegen läßt, also die Induktionsannahme gilt, haben wir
$M_1 \xrightarrow{t_1} ... \xrightarrow{t_{n+1}} M_{n+2}$
Es gilt also:

$$M_{n+2} = M_1 + \sum_{i=1}^{n+2} (\underline{post} - \underline{pre}) c_{t_i} = M_1 + (\underline{post} - \underline{pre}) \sum_{i=1}^{n+2} c_{t_i} = M_1 + I \cdot v$$

□

2.2 Invariantenberechnung aus der Matrixdarstellung

Eine der grundlegenden Analyseverfahren für S/T-Netze ist die Berechnung von Invarianten mit den Mitteln der linearen Algebra. Wir werden diese Berechnungsmethode einführen und die Zusammenhänge zu den Invarianten im Erreichbarkeits- und Markierungsgraphen zeigen.

Stellen-Invarianten

Eine S-Invariante ist ein Stellenvektor (S-Vektor) $I_S : P \to \mathbb{N}$, so daß für alle $M \xrightarrow{t} M' \in MG$ gilt: $\Sigma_{p \in P} I_S(p) \cdot M(p) = \Sigma_{p \in P} I_S(p) \cdot M'(p)$. Die obigen Summen repräsentieren das Skalarprodukt von Vektoren, wir schreiben daher kürzer $I_S^T \cdot M = I_S^T \cdot M'$. Mit der Definition der Folgemarkierung $M' = M + \underline{I} \cdot c_t$ wird daraus $I_S^T \cdot M = I_S^T \cdot (M + \underline{I} \cdot c_t) = I_S^T \cdot M + I_S^T \cdot \underline{I} \cdot c_t$ Durch Subtraktion von $I_S^T \cdot M$ erhalten wir $I_S^T \cdot \underline{I} \cdot c_t = 0$.

Gesucht sind also alle S-Vektoren I_S, so daß das Produkt jeder Spalte der Matrix $\underline{I}$ mit I_S^T 0 ergibt. Das ist äquivalent zu der Aussage, daß $I_S^T \cdot \underline{I} = \underline{0}^T$ gilt, wobei $\underline{0} : T \to \mathbf{Z}$ der Nullvektor über T ist. Um dieser Bedingung die Form eines linearen Gleichungssystems zu geben, transponieren wir beide Seiten der Gleichung und erhalten $(I_S^T \cdot \underline{I})^T = (\underline{0}^T)^T$ und daraus $\underline{I}^T \cdot I_S = \underline{0}$.

S-Invarianten sind also alle ganzzahligen Lösungsvektoren des obigen linearen Gleichungssystems.

Satz 2.4 (S-Invarianten)
Sei $\underline{N}$ ein P/T-Netz in Matrixdarstellung und $\underline{I}$ seine Inzidenzmatrix. Ein S-Vektor I_S ist S-Invariante von $\underline{N}$ falls I_S eine ganzzahlige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\underline{I}^T \cdot x = \underline{0}$$

ist.

Beweis: $\Sigma_{p \in P} I_S(p) \cdot M(p) = \Sigma_{p \in P} I_S(p) \cdot M'(p)$ für $M \xrightarrow{t} M'$
entspricht in Matrixdarstellung $I_S^T \cdot M = I_S^T \cdot M'$ für alle $M \xrightarrow{t} M'$
Wir haben zu zeigen

1. $\underline{I}^T \cdot I_S = \underline{0} \Rightarrow I_S$ ist S-Invariante, also $I_S^T \cdot M = I_S^T \cdot M'$ für alle $M \xrightarrow{t} M'$ in MG
   Also

$$\begin{aligned} I_S^T \cdot M &= (I_S^T \cdot \underline{I}) \cdot c_t + I_S^T \cdot M \qquad \text{da } (\underline{I}^T \cdot I_S)^T = \underline{0}^T \\ &= I_S^T \cdot (\underline{I} \cdot c_t + M) \\ &= I_S^T \cdot M' \end{aligned}$$

2. I_S ist S-Invariante $\Leftrightarrow \underline{I}^T \cdot I_S = \underline{0}$
   für alle $M \xrightarrow{t} M'$ in MG gilt (da I_S S-Invariante ist): $I_S^T \cdot M = I_S^T \cdot M'$
   $\Leftrightarrow \underline{0} = I_S^T(M' - M)$
   $\Leftrightarrow \underline{0} = I_S^T(\underline{I} \cdot c_t + M - M)$
   $\Leftrightarrow \underline{0} = I_S^T \cdot \underline{I} \cdot c_t$ Siehe $(*)$
   $\Leftrightarrow \underline{0} = I_S^T \cdot \underline{I}$
   $\Leftrightarrow I^T \cdot I_S = \underline{0}$
   $(*)$ Z.z.: $(\forall t \in T : I_S^T \cdot \underline{I} \cdot c_t = \underline{0}) \Rightarrow I_S^T \cdot \underline{I} = \underline{0}$
   Wir wählen den indirekten Beweis: Sei $I_S^T \cdot \underline{I} = \underline{0} \wedge \exists t \in T : I_S^T \cdot \underline{I} \cdot c_t \neq \underline{0}$:
   dann läßt sich daraus folgern $I_S^T \cdot M' = I_S^T(\underline{I} \cdot c_t + M) = I_S^T \cdot \underline{I} \cdot c_t + I_S^T \cdot M \neq I_S^T \cdot M$,
   was ein Widerspruch ist.
   Also gilt $(*)$.

□

Da es für lineare Gleichungssysteme effiziente Lösungsverfahren gibt, können wir mit Satz 2.4 S-Invarianten von Netzen ohne Kapazitätsbeschränkung berechnen. Für Netze mit beschränkter Kapazität müssen wir vorher das dazugehörige Netz mit unbeschränkten Kapazitäten konstruieren. Korollar 1.21 sichert uns dann zu, daß wir mit den S-Invarianten des Netzes mit unbeschränkten Kapazitäten auch alle S-Invarianten des Ursprungsnetzes ermitteln.

Beispiel 2.5 (S-Invarianten Vektoren für das Leser/Schreiber System)

$$\underline{\mathbf{I}}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung des Gleichungssystems $\underline{I}^T \cdot x = \underline{0}$:
Durch Zeilenaddition erhalten wir :

$$\begin{array}{cccccc@{\qquad\qquad}l} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1{}' = z_1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3 & z_2{}' = z_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_3{}' = z_3 + z_1 + z_2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 & z_4{}' = z_4 + z_3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & z_5{}' = z_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z_6{}' = z_6 + z_4 + z_5 \end{array}$$

Also

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ -x_2 + x_3 - 3x_6 &= 0 \\ -x_3 + x_4 + 3x_6 &= 0 \\ -x_4 + x_5 - x_6 &= 0 \end{aligned}$$

damit können x_5 und x_6 als beliebig angenommen werden, also

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_3 - 3x_6 \\ x_3 &= x_4 + 3x_6 \\ x_4 &= x_5 - x_6 \end{aligned}$$

Für $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ erhalten wir $x_4 = 1$, $x_3 = 1$, $x_2 = 1$ und $x_1 = 1$, also den S-Invarianten Vektor $I_{S_1} : (1,1,1,1,1,0)$.

Für $x_5 = 1$, $x_6 = 1$ erhalten wir $x_4 = 0$, $x_3 = 3$, $x_2 = 0$, und $x_1 = 0$, also den S-Invarianten Vektor $I_{S_2} : (0,0,3,0,1,1)$.

Lösungen dieses Systems, d.h. S-Invarianten, sind also die P-Vektoren $(1,1,1,1,1,0)^T$ und $(0,0,3,0,1,1)^T$, sowie alle ganzzahligen Linearkombinationen davon.(Zur Interpretation der S-Invarianten siehe Seite 14.)

T-Invarianten

Eine T-Invariante ist ein Transitionenvektor, der einen Zyklus im Markierungsgraphen beschreibt. Das bedeutet, daß der gemeinsame Effekt gleich Null ist, weil sich die Wirkungen der einzelnen Transitionen gegenseitig aufheben. Nun ist eine solche T-Invariante durch eine Funktion $I_T : T \to \mathbb{N}$, d.h. durch einen Schaltvektor, gegeben. Der gemeinsame Effekt wird also durch $\underline{I} \cdot I_T$ beschrieben. Daraus ergibt sich folgender Satz:

Satz 2.6 (T-Invarianten)
Sei $\underline{N}$ ein S/T-Netz mit unbeschränkten Kapazitäten, $\underline{N}$ in Matrixdarstellung und $\underline{I}$ seine Inzidenzmatrix. Ein T-Vektor I_T ist positive T-Invariante von $\underline{N}$, gdw. I_T eine positive, ganzzahlige Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\underline{I} \cdot x = \underline{0} \tag{1}$$

ist.

Beweis: Sei I_T eine positive ganzzahlige Lösung des Gleichungssystems (1). Es sei $M \geq \underline{pre} \cdot I_T$. Da I_T ein Schaltvektor ist und M eine Markierung von N, existiert ein Schaltschritt $M[I_T\rangle M'$. Nun ist $M = M'$, da $M' = M + \underline{I} \cdot I_T$ und $\underline{I} \cdot I_T = \underline{0}$. Nach Satz 2.3 existiert ein Pfad $M_1 \xrightarrow{t_1} \cdots \xrightarrow{t_k} M_{k+1}$, der zum Zyklus wird, da $M_1 = M = M' = M_{k+1}$ ist.

Sei I_T nun T-Invariante, d.h. es existiert ein Zyklus $M \xrightarrow{t_1} \cdots \xrightarrow{t_k} M$ und $I_T(t) = |\{i|\ t = t_i \wedge 1 \leq i \leq k\}|$. Letztere Bedingung ist äquivalent zu $I_T = c_{t_1} + \cdots + c_{t_k}$. Nach Satz 2.3.2 und der Definition der Folgemarkierung gilt: $M + \Sigma_{i \in \{1,\ldots,k\}} \underline{I} \cdot c_{t_i} = M$, d.h. $\Sigma_{i \in \{1,\ldots,k\}} \underline{I} \cdot c_{t_i} = \underline{0}$. Mit der Distributivität zwischen Addition und Multiplikation folgt $\underline{I} \cdot \Sigma_{i \in \{1,\ldots,k\}} c_{t_i} = \underline{0}$ und daraus $\underline{I} \cdot I_T = \underline{0}$. $\square$

Das Gleichungssystem zur Berechnung der T-Invarianten sieht im Falle des Leser-Schreiber-Netzes wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Als Lösungen ergeben sich $(1,1,1,0,0,0)^T$ und $(0,0,0,1,1,1)^T$ sowie ebenfalls alle ganzzahligen Linearkombinationen. (Zur Interpretation dieser T-Invariante siehe Seite 20.)

Kapitel 3

Universell algebraische Darstellung von S/T-Netzen

In diesem Kapitel führen wir die universell algebraische Darstellung von S/T-Netzen ein. Dabei wird die Netzstruktur durch zwei Abbildungen, ähnlich wie Graphen beschrieben. Diese Abbildungen geben für jede Transition ihren Vor- und Nachbereich an. Diese Darstellung ist Grundlage der folgenden Kapitel, die sich mit Strukturierung und Kompositionalität beschäftigen. Die Verwendung universell algebraischer und kategorieller Methoden mit S/T-Netzen hat folgende Vorteile:

- Das Schalten einer einzelnen Transition und das nebenläufige Schalten mehrerer Transitionen wird einheitlich notiert und behandelt.
- Durch Einbettung der S/T-Netze in den mathematischen Kontext der Kategorientheorie werden deren Ergebnisse und Methoden für die Strukturierung und Analyse von Netzen anwendbar.
- Netzmorphismen lassen sich konstruieren, die S/T-Netze abbilden und dabei das Schaltverhalten und die Invarianten bewahren.
- Ebenso können verschiedene Arten von Modellen miteinander verglichen werden: Bei nebenläufigen Systemen werden häufig verschiedene Modelle desselben Systems für unterschiedliche Zwecke betrachtet (z.B. Petrinetze, Ereignisstrukturen, Transitionssysteme, Synchronisationsbäume usw.). Diese Modelle können eine kategorielle Struktur erhalten und ihre semantischen Beziehungen in der Sprache der Kategorientheorie ausgedrückt werden.

3.1 Idee: S/T-Netze als gerichtete Graphen

Monoide (siehe auch in Satz 4.7 die Definition kommutativer Monoide) sind wichtige algebraische Strukturen. Insbesondere freie Monoide werden zur Beschreibung formaler Sprachen genutzt. Das freie Monoid A^* über einem Alphabet $A = \{a, b, c, ..., x, y, z\}$ mit der

Stringkonkatenation als Monoidoperation und dem leeren Wort als neutralen Element liefert die (unendliche) Menge aller Wörter.
Die Struktur des freien Monoids ist grundlegend für die Untersuchung von Sprachen, denn sie sind Teilmengen eines freien Monoids, nämlich Mengen wohlgeformter Wörter oder Sätze. Im Folgenden untersuchen wir freie kommutative Monoide, die zusätzlich die Eigenschaft haben, daß die Monoidoperation kommutativ ist.

Definition 3.1 (Freies kommutatives Monoid über eine Menge)
Sei M eine Menge, dann läßt sich das freie kommutative Monoid $M^{\oplus} = (M^{\oplus}, \lambda, \oplus)$ über M mit neutralem Element λ und einer zweistelligen Verknüpfung „$\oplus$“ folgendermaßen rekursiv beschreiben:

1. $M \cup \lambda \subseteq M^{\oplus}$
2. $v, w \in M^{\oplus} \rightarrow v \oplus w \in M^{\oplus}$
3. $v \oplus \lambda = v = \lambda \oplus v,$ /*neutrales Element */
4. $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$ /* Assoziativität */
5. $v \oplus w = w \oplus v$ /* Kommutativität */

Die Kommutativität führt dazu, daß Wörter, die in A^* unterschiedlich sind, wie z.B. „ *abcacdc* “ und „ *cdcabca* “, in $A^{\oplus}$ ein und dasselbe Element bezeichnen. Das Element läßt sich als *lineare Summe* notieren: „$2a \oplus b \oplus 3c \oplus d$ “.

Allgemein gilt für die Lineare-Summen-Schreibweise von Elementen $w \in A^{\oplus}$:
$w = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$, $k_i \in \mathbb{N}$, $a_i \in A$ (Summanden $0a_i$ werden nach Vereinbarung weggelassen), wobei $\lambda = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$ mit $k_i = 0$ für alle $i : 1 \leq i \leq |A|$ und
die Addition von $w = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i$ und $w' = \sum_{i=1}^{m} k'_i a_i$ sich durch $w \oplus w' = \sum_{i=1}^{max(n,m)} (k_i + k'_i) a_i$ ergibt.

Bemerkung 3.2 (Operationen und Vergleichoperationen)
Gegeben $M^{\oplus}$ über der Menge M. Dann gilt für $w, w' \in M^{\oplus}$ mit $w = \sum_{i=1}^{|M|} k_i m_i$ und $w' = \sum_{i=1}^{|M|} k'_i m_i$: $w \leq w'$ **gdw** für alle $i : 1 \leq i \leq |M|$ gilt $k_i \leq k'_i$.
Analog für $<, \geq, >$.
Sei $w \leq w'$, dann ist die Operation $\ominus$ definiert durch $w' \ominus w = \sum_{1 \leq i \leq n} (k'_i - k_i) m_i$

Satz 3.3 (Eigenschaften freier kommutativer Monoide)

1. Charakterisierung durch die Abbildung in die natürlichen Zahlen.
   Es gilt: $w \in A^{\oplus}$ **gdw** eine Abbildung $\underline{w} : A \rightarrow \mathbb{N}$ existiert.

2. Universelle Eigenschaft
   Für jede Abbildung $f : A \to M$ in die Trägermenge eines kommutativen Monoids existiert genau ein Monoidhomomorphismus $\overline{f} : (A^\oplus, \lambda, \oplus) \to (M, \epsilon, \bullet)$ so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & M \\ A^\oplus \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis:

1. Gegeben $w = \Sigma k_i a_i \in A^\oplus$ dann ist $\underline{w}(a_i) = k_i$. Umgekehrt sei $\underline{w} : A \to \mathbb{N}$ gegeben, dann ist $w = \Sigma \underline{w}(a_i) a_i \in A^\oplus$

2. Für jede Abbildung $f : A \to M$ ergibt sich $\overline{f} : (A^\oplus, \lambda, \oplus) \to (M, \epsilon, \bullet)$ mit
   $\overline{f}(\lambda) = \epsilon$
   $\overline{f}(a) = f(a)$ für alle $a \in A \subseteq A^\oplus$
   $$\begin{aligned} \overline{f}(w) &= \overline{f}(\Sigma k_i a_i) \\ &= \overline{f}(\underbrace{a_1 \oplus a_1 \oplus ... \oplus a_1}_{k_1 \text{ mal}} \oplus \underbrace{a_2 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_2}_{k_2 \text{ mal}} \oplus ... \oplus \underbrace{a_n \oplus a_n \oplus ... \oplus a_n}_{k_n \text{ mal}}) = \\ &= \underbrace{f(a_1) \bullet f(a_1) \bullet ... \bullet f(a_1)}_{k_1 \text{ mal}} \bullet ... \bullet \underbrace{f(a_n) \bullet f(a_n) \bullet ... \bullet f(a_n)}_{k_n \text{ mal}} \end{aligned}$$

   $\overline{f}$ ist Monoidhomomorphismus, da er das neutrale Element als auch die Operation bewahrt.

□

Eine präzise Behandlung der universellen Eigenschaft freier kommutativer Monoide erfolgt im nächsten Kapitel im Rahmen der Kategorientheorie (siehe Satz 4.7).

Satz 3.4 (Äquivalenz der Existenz von Abbildungen)
Eine Abbildung in die Menge der Abbildungen einer Menge B in die natürlichen Zahlen $m : A \to Abb(B, \mathbb{N})$ ist gegeben **gdw** es eine Abbildung auf dem Produkt der beiden jeweiligen Domänen in die natürlichen Zahlen gibt, also $\underline{m} : A \times B \to \mathbb{N}$

Beweis: Für $m : A \to Abb(B, \mathbb{N})$ gilt $m(a) : B \to \mathbb{N}$, also ist $\underline{m} : A \times B \to \mathbb{N}$ definiert durch $m(a)(b)$. Gegeben $\underline{m} : A \times B \to \mathbb{N}$, dann definiert für alle $a \in A$ $\underline{m}(a, \_) : B \to \mathbb{N}$ eine Abbildung also läßt sich $m : A \to Abb(B, \mathbb{N})$ durch $m(a) := \underline{m}(a, \_)$ definieren. □

Definition 3.5 (S/T-Netz in universell algebraischer Darstellung)
Ein S/T-Netz in universell algebraischer Darstellung ist durch $N = (P, T, pre, post)$ mit P der Menge der Stellen, T der Menge der Transitionen und den Abbildungen $pre, post : T \to P^\oplus$, die den Vorbereich ($pre$) und den Nachbereich ($post$) der Transitionen beschreiben. Wir können das Netz darstellen als $T \underset{post}{\overset{pre}{\rightrightarrows}} P^\oplus$.

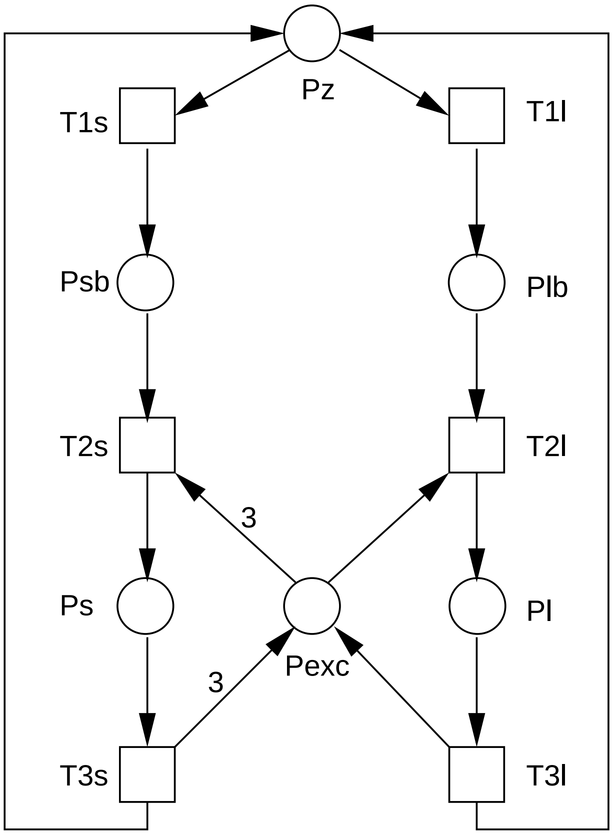


Abbildung 3.1: Leser-Schreiber-Netz

Beispiel
Beim Leser-Schreiber-Netz in Abbildung 3.1 sind die Funktionen *pre* und *post* folgendermaßen gegeben:

$$\begin{array}{ll}
pre(T1s) = Pz & post(T1s) = Psb \\
pre(T1l) = Pz & post(T1l) = Plb \\
pre(T2s) = Psb \oplus 3Pexc & post(T2s) = Ps \\
pre(T2l) = Plb \oplus Pexc & post(T2l) = Pl \\
pre(T3s) = Ps & post(T3s) = 3Pexc \oplus Pz \\
pre(T3l) = Pl & post(T3l) = Pexc \oplus Pz
\end{array}$$

Satz 3.6 (Äquivalenz der Darstellungen)
Für ein endliches S/T-Netz mit unbeschränkten Kapazitäten sind die folgenden Darstellungen äquivalent:

1. die klassische Darstellung $N = (P, T, F, K, W)$ (siehe Definition 1.1) mit:

   (a) P und T sind endliche, disjunkte Mengen.

(b) $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ ist die Flußrelation von N.

(c) $K : P \to \mathbb{N}_\omega$ ist die unbeschränkte Kapazität mit $K(p) = \omega$ für alle $p \in P$.

(d) $W : F \to \mathbb{N}_+$ das Kantengewicht zu.

2. die Matrixdarstellung: $\underline{N} = (P, T, \underline{pre}, \underline{post})$ mit $\underline{pre}, \underline{post} : P \times T \to \mathbb{N}$ (siehe Definition 2.1)

3. die universell algebraische Darstellung: $N = (P, T, pre, post)$ mit $pre, post : T \to P^\oplus$ (siehe Definition 3.5)

Beweis:

1 $\Leftrightarrow$ 2 siehe Definition 2.1 für endliche Mengen P und T.

2 $\Leftrightarrow$ 3 Für $N = (P, T, pre, post)$ gilt
$pre, post : T \to P^\oplus$ entspricht $pre', post' : T \to [P \to \mathbb{N}]$ wegen Satz 3.3.1
entspricht $\underline{pre}, \underline{post} : P \times T \to \mathbb{N}$ wegen Satz 3.4 mit $\underline{pre}(p, t) = pre'(t)(p)$, also der algebraischen Darstellung $(P, T, \underline{pre}, \underline{post})$ als Vor- bzw. Nachbereichsmatrix.

□

Bemerkung 3.7
Für unendliche Mengen P lassen sich in der klassischen Darstellung Transitionen mit unendlichem Vor- oder Nachbereich darstellen. Das ist aufgrund der Endlichkeit von Matrizen bzw. lineare Summen in der linear bzw. universell algebraischen Darstellung nicht möglich.

Definition 3.8 (Transitionsvektor)
Sei $N = (P, T, pre, post)$ ein S/T-Netz in universell algebraischer Darstellung. Dann ist $v \in T^\oplus$ ein Transitionsvektor und $pre^\oplus, post^\oplus : T^\oplus \to P^\oplus$ sind Monoidhomomorphismen die den parallelen Vor- und Nachbereich von v beschreiben mit $pre^\oplus(\Sigma k_i t_i) = \Sigma k_i pre(t_i)$, $post^\oplus$ analog.

Definition 3.9 (Markierung)
Sei $N = (P, T, pre, post)$ ein S/T-Netz in universell algebraischer Darstellung, dann ist $M \in P^\oplus$ eine Markierung.

Beispiel 3.10
Gegeben sei die initiale Markierung unseres Leser-Schreiber-Systems $M_0 = 3Pz \oplus 3Pexc$. Der Transitionsvektor, der das parallele Schalten von $T1s$ und $T1l$ beschreibt, ist $T1s \oplus T1l$, der parallele Vorbereich $pre^\oplus(T1s \oplus T1l) = pre(T1s) \oplus pre(T1l) = 1Pz \oplus 1Pz = 2Pz$ und der parallele Nachbereich ist $post^\oplus(T1s \oplus T1l) = post(T1s) \oplus post(T1l) = Psb \oplus Plb$.

Definition 3.11 (Aktivierung, Schaltverhalten und Folgemarkierung)
Gegeben $N = (P, T, pre, post)$.

1. Der Transitionsvektor $v \in T^\oplus$ ist aktiviert, notiert mit $M[v\rangle$, wenn $pre^\oplus(v) \leq M$

2. Schaltet ein unter M aktivierter Transitionsvektor v, d. h. er erzeugt die Folgemarkierung M', notiert mit $M[v\rangle M'$, wobei sich M' so berechnen läßt: $M' = (M \ominus pre^{\oplus}(v)) \oplus post^{\oplus}(v)$.

Beispiel 3.12
Das parallele Schalten von $T1s \oplus T2l$ in dem Leser-Schreiber-System wird also wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned} M' &= ((3Pz \oplus 3Pexc) \ominus 2Pz) \oplus (Psb \oplus Plb) \\ &= 3Pz \ominus 2Pz \oplus 3Pexc \oplus Psb \oplus Plb \\ &= Pz \oplus 3Pexc \oplus Psb \oplus Plb \end{aligned}$$

Satz 3.13 (Äquivalenz des Schaltverhaltens)
Gegeben sei $N = (P, T, pre, post)$ ein S/T-Netz in universell algebraischer Darstellung und $\underline{N} = (P, T, \underline{pre}, \underline{post})$ das äquivalente Netz in linear algebraischer Darstellung. Dann ist

1. $v \in T^{\oplus}$ genau dann unter $M \in P^{\oplus}$ aktiviert, wenn $\underline{v} : T \to \mathbb{N}$ (siehe Satz 3.3) unter $\underline{M} : P \to \mathbb{N}$ aktiviert ist.

2. die Folgemarkierung $M' = (M \ominus pre(t)) \oplus post(t)$ **gdw** $\underline{M'} = \underline{M} + \underline{I} \cdot \underline{v}$.

Beweis: Zuerst weisen wir nach, daß die Vor- bzw. Nachbereiche der linear und universell algebraischen Darstellung übereinstimmen. Sei $v \in T^{\oplus}$ mit $v = \Sigma k_i t_i$

$$\begin{aligned} pre^{\oplus}(v) &= \Sigma k_i pre(t_i) \\ &= \Sigma k_i pre'(t_i)(p) \\ &= \Sigma k_i \underline{pre'} c_{t_i} \\ &= \underline{pre} \cdot (\Sigma k_i c_{t_i}) \\ &= \underline{pre} \cdot \underline{v} \\ post^{\oplus}(v) &= \underline{post} \cdot \underline{v} \text{ analog} \end{aligned}$$

Daraus folgt

1. $pre^{\oplus}(v) \leq M$ **gdw** $\underline{pre} \cdot \underline{v} \leq \underline{M}$

2.
$$\begin{aligned} & M' = && M \ominus pre^{\oplus}(v) \oplus post^{\oplus}(v) \\ \Leftrightarrow\ & \underline{M'} = && \underline{M} - \underline{pre} \cdot \underline{v} + \underline{post} \cdot \underline{v} \\ \Leftrightarrow\ & \underline{M'} = && \underline{M} + (\underline{post} - \underline{pre})\underline{v} \\ \Leftrightarrow\ & \underline{M'} = && \underline{M} + \underline{I} \cdot \underline{v} \end{aligned}$$

$\square$

Kapitel 4

Universell Algebraische Darstellung von Petrinetzen im Rahmen der Kategorientheorie

Im folgenden befassen wir uns mit der Anwendung von Methoden aus der Kategorientheorie zur Formalisierung von Strukturierung und Komposition von S/T-Netzen in universell algebraischer Darstellung, wie sie im dritten Kapitel eingeführt wurden.

Sowohl Kompositionalität als auch Strukturierungstechniken für S/T-Netze sind notwendig, um das Verhalten eines komplexen Systems überschaubar zu modellieren, d.h. es wird aus separat spezifizierten Subsystemen zusammengesetzt, und die Eigenschaften des komplexen Systems werden aus denen der Subsysteme abgeleitet. Unser Ziel ist es, mit Hilfe kategorieller Methoden Kompositionsoperationen zu definieren, die die Möglichkeit bieten, S/T-Netze und ihre Eigenschaften (z. B. Invarianten) schrittweise zu konstruieren, sie über ihr Verhalten in Beziehung zu setzen und ihre Darstellung verhaltenserhaltend zu modifizieren. Als Grundlage dienen die Arbeiten [Win87, Hum89, MM90, Hei92, EPR94c]. Die dort mit Hilfe von Methoden aus der Kategorientheorie entwickelten Konzepte erlauben zum einen eine einheitliche Beschreibung wichtiger Netzeigenschaften wie Additivität von Schaltvorgängen, der Zusammenhang zwischen Schaltverhalten und Invarianten, und erleichtert zum anderen durch die Abstraktion von der Darstellung zugunsten des Verhaltens das Erkennen von Zusammenhängen zu anderen Formalismen wie etwa Prozeßalgebren oder Transitionssystemen.

Wir stellen zunächst die grundlegenden Konstruktionen aus der Kategorientheorie vor, insbesondere verschiedene Techniken zur Strukturierung von Netzen. Ein weiteres Kapitel beschreibt die Repräsentation von Invarianten als kategorielle Limes-Konstruktionen. Zum Schluß wird auf Funktoren eingegangen, die es gestatten, die Semantik eines komponierten S/T-Netzes aus der Semantik der Komponenten-Teilnetze herzuleiten (kompositionelle Semantik). Dazu führen wir die Repräsentation der Petrinetz-Semantik als sogenannten Markierungsgraph-Funktor ein.

4.1 Einleitung in die Kategorientheorie

Die Kategorientheorie ist eine mathematische Theorie, deren Entwicklung vor etwa 50 Jahren mit dem Ziel begonnen hat, ähnliche Konstruktionen in verschiedenen Bereichen der Mathematik gemeinsam zu beschreiben und zu analysieren. Vor etwa 25 Jahren wurden kategorielle Methoden erstmals auch erfolgreich in einigen Bereichen der Informatik angewendet. Dazu gehört insbesondere die kategorielle Theorie von Automaten, durch die es Anfang der 70'er Jahre gelungen ist, die einzeln entwickelten Theorien für deterministsche, nicht-deterministische, partielle, relationale, stochastische, lineare und topologische Automaten in einer einheitlichen Theorie zusammenzufassen. Heute ist die Kategorientheorie neben Algebra und Logik die wichtigste mathematische Theorie zur formalen Beschreibung von Strukturen in der Informatik und ist eine der wichtigsten Grundlagen der strukturellen Mathematik.

Dementsprechend gestattet die Kategorientheorie eine gemeinsame Untersuchung vieler bekannter Strukturen der Mathematik und Informatik. Ihr hohes Abstraktionsniveau und ihre Universalität bei gleichzeitiger Anschaulichkeit ermöglichen eine einfache Beschreibung von komplex aufgebauten Strukturen. Kennzeichnend dabei ist, daß die 'Objekte' nicht durch ihre innere Struktur, sondern durch ihre Beziehung zu anderen 'Objekten' beschrieben werden. Wichtige kategorielle Methoden und Ergebnisse lassen sich elegant auf viele Bereiche der Mathematik (Mengen, Abbildungen, Relationen, Ordnungsstrukturen, Graphen, lineare Algebra, universelle Algebra, Analysis, Topologie, etc.) und Informatik (z.B. Automaten, Datenstrukturen, Abstrakte Datentypen, Algebren, Graphgrammatiken, Petrinetze, λ -Kalkül, Logik, Programmierkonzepte, Programmiersprachen, Formale Spezifikation, Softwareengineering, Parallele Prozesse, Verteilte Systeme, etc.) anwenden und werden zur Beschreibung und Analyse von Kalkülen und ihrer Modelle eingesetzt.

Die Relevanz kategorieller Methoden in Mathematik und Informatik läßt sich in den folgenden 5 Punkten zusammenfassen:

1. Klassifikation und einheitliche Theorie

   Die Kategorientheorie gestattet eine Klassifikation und einheitliche Theorie von vielen verschiedenen Strukturen innerhalb der Mathematik und Informatik. Dazu gehört in der Mathematik eine gemeinsame Behandlung von algebraischen, analytischen, topologischen und geordneten Strukturen und in der Informatik eine einheitliche Beschreibung von Syntax und Semantik verschiedener Formalismen zur Spezifikation, Programmierung und Beweistechnik.

2. Paradigma der Beschreibungs- und Beweistechnik

   Während das klassische Paradigma zur Beschreibungs- und Beweistechnik auf den Grundbegriffen „Menge“ und „Element“ basiert, beruht das Paradigma der Kategorientheorie auf den Begriffen „Objekt“ und „Morphismus“. Damit werden Strukturen nicht mehr extensional beschrieben sondern durch universelle Eigenschaften charakterisiert und entsprechendes gilt für Beweise, wobei das Dualitätsprinzip der Kategorientheorie eine zentrale Rolle spielt.

3. Flexible horizontale Strukturierung und vertikale Verfeinerungstechnik

   Das Konzept von Diagrammen aus Objekten und Morphismen einer Kategorie gestattet eine einheitliche Technik für verschiedene Typen von komplexen Strukturen, wobei die einzelnen Komponenten einer komplexen Struktur und deren Beziehung durch die Objekte und Morphismen des Diagramms und die flache Version der komplexen Struktur durch den Limes oder Colimes des Diagramms beschrieben wird. Vertikale Verfeinerung von komplexen Strukturen kann durch Morphismen zwischen den einzelnen Komponenten dieser Strukturen beschrieben werden, die dann einen Morphismus zwischen den komplexen Strukturen induzieren.

4. Instrumentarium zur Übertragung von Konzepten und Ergebnissen

   Das wichtige Konzept von Funktoren in der Kategorientheorie, d.h. strukturverträgliche Abbildungen zwischen Objekten und Morphismen von zwei Kategorien, liefert ein Instrumentarium für die formale Beschreibung von Übergängen (Transformationen) zwischen verschiedenen Ebenen einer Beschreibungstechnik, etwa zwischen der syntaktischen und der semantischen Ebene.

5. Instrumentarium für gegenseitige Befruchtung von Gebieten

   Durch das Konzept von Funktoren $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ ist es auch möglich Konstruktionen und Problemstellungen in einem Bereich von Mathematik und Informatik, beschrieben durch Kategorie $\mathcal{C}_1$ auf einen anderen Bereich, definiert durch Kategorie $\mathcal{C}_2$, zu übertragen und damit die beiden Bereiche gegenseitig zu befruchten. Klassisches Beispiel ist dabei die Klassifikation von geometrischen Strukturen im Rahmen der Topologie durch die Untersuchung von algebraischen Strukturen, genannt Homologiegruppe. Die Übertragung erfolgt dabei durch Funktoren von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der kommutativen Gruppen.

Zur Vertiefung wird folgende Literatur empfohlen: [AHS90, AM75, BW90, Mac71, Mar96, EGRW95, EGRW96].

4.2 Grundbegriffe der Kategorientheorie

Im Unterschied zu Mengen, deren Elemente in keinerlei Beziehung zueinander stehen, sind Kategorien Strukturen, bei denen gerade die Beziehungen zwischen den Objekten von entscheidender Bedeutung sind. Diese Beziehungen werden durch sogenannte Morphismen dargestellt, die nicht nur aussagen, ob zwei Objekte zueinander in Beziehung stehen, sondern auch, welcher Art diese Beziehungen sind. In der Kategorie der Mengen, deren Objekte Mengen sind, werden die Beziehungen zwischen zwei Mengen M und N dadurch ausgedrückt, wie sich die Elemente von M in N wiederfinden lassen. D. h. ein Morphismus von M nach N ist eine Abbildung, die jedem Element von M genau ein Element von N zuordnet. Im allgemeinen kann es also viele Beziehungen zwischen zwei Objekten geben.

Von den Strukturen, die durch Kategorien modelliert werden, wird nur verlangt, daß die Beziehung zwischen den Objekten transitiv ist und jedes Objekt zu sich selbst in Beziehung steht. Diese beiden Eigenschaften werden in Kategorien durch die Kompositionsoperation und die Identitäten dargestellt.

Definition 4.1 (Kategorie)
Eine Kategorie $\mathcal{C} = (Ob_\mathcal{C}, Mor_\mathcal{C}, \circ, id)$ ist gegeben durch

1. eine Klasse $Ob_\mathcal{C}$ von *Objekten*,

2. für je zwei Objekte $A, B \in Ob_\mathcal{C}$ eine Menge $Mor_\mathcal{C}(A, B)$ von *Morphismen*,

3. für je drei Objekte $A, B, C \in Ob_\mathcal{C}$ eine Kompositionsoperation

$$\circ : Mor_\mathcal{C}(A, B) \times Mor_\mathcal{C}(B, C) \to Mor_\mathcal{C}(A, C) \ ,$$

4. für jedes Objekt $A \in Ob_\mathcal{C}$ eine Identität $id_A \in Mor_\mathcal{C}(A, A)$,

die folgende Bedingungen erfüllen:

Assoziativität Für alle $f \in Mor_\mathcal{C}(A, B), g \in Mor_\mathcal{C}(B, C)$ und $h \in Mor_\mathcal{C}(C, D)$ gilt

1. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Neutralität Für alle $f \in Mor_\mathcal{C}(A, B)$ gilt

1. $f \circ id_A = f$ und $id_B \circ f = f$.

Für einen Morphismus $f \in Mor_\mathcal{C}(A, B)$ heißt das Objekt A *Quelle* (domain) und B *Ziel* (codomain) von f. Man schreibt dann auch $f : A \to B \in Mor_\mathcal{C}$. Mit dieser Schreibweise läßt sich die Komposition von Morphismen in Diagrammen folgendermaßen veranschaulichen.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, bend left, "g \circ f"] \arrow[dr, bend right, "k \circ h"'] & B \arrow[d, "g"] \\
D \arrow[r, "k"'] & C
\end{tikzcd}$$

Allgemein sind Diagramme Graphen, deren Knoten durch Objekte und deren Kanten durch Morphismen einer Kategorie $\mathcal{C}$ markiert sind. Dabei muß eine Kante, deren Quelle mit $A \in Ob_{\mathcal{C}}$ und deren Ziel mit $B \in Ob_{\mathcal{C}}$ markiert ist, mit einem Morphismus $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ markiert sein. Ein Diagramm ist kommutativ, wenn je zwei Pfade mit gleichem Anfangs- und Endknoten gleiche Morphismen in $\mathcal{C}$ bezeichnen. D. h. für je zwei Pfade

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[r, "f_2"] & \bullet \arrow[r, dotted, no head] & \bullet \arrow[r, "f_{n-1}"] & \bullet \arrow[dr, "f_n"] & \\
\bullet \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & (=) & & & \bullet \\
 & \bullet \arrow[r, "g_2"'] & \bullet \arrow[r, dotted, no head] & \bullet \arrow[r, "g_{k-1}"'] & \bullet \arrow[ur, "g_k"'] &
\end{tikzcd}$$

gilt $f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 = g_k \circ \cdots \circ g_2 \circ g_1$.

Bemerkung 4.2

Aus einer gegebenen Objektklasse lassen sich verschiedene Kategorien konstruieren, indem die Morphismenmengen verschieden gewählt werden. Darüber hinaus können bei gegebenen Objektklassen und Morphismenmengen unterschiedliche Kompositionsoperationen definiert werden, so daß wiederum verschiedene Kategorien entstehen. Sind allerdings Objekte, Morphismen und Komposition festgelegt, so besteht bei den Identitäten keine Wahl mehr, denn wenn für einen Morphismus $j : A \to A \in Mor_{\mathcal{C}}$ gilt

$$\forall h : B \to A \quad j \circ h = h \quad \wedge \quad \forall k : A \to C \quad k \circ j = k$$

dann ist $j = id_A$.

Eine Unterkategorie $\mathcal{C}'$ von $\mathcal{C}$ ist eine Kategorie, deren Objektklasse und Morphismenmengen jeweils in denen von $\mathcal{C}$ enthalten sind und deren Komposition und Identitäten mit denen von $\mathcal{C}$ übereinstimmen. (D.h. $\mathcal{C}'$ „erbt“ die Komposition und die Identitäten von $\mathcal{C}$.) Zur Unterscheidung der Komposition und Identitäten in $\mathcal{C}'$ und $\mathcal{C}$ sind in der folgenden Definition die Symbole $\circ$ und id entsprechend indiziert.

Definition 4.3 (Unterkategorie)

Eine Kategorie $\mathcal{C}' = (Ob_{\mathcal{C}'}, Mor_{\mathcal{C}'}, \circ^{\mathcal{C}'}, id^{\mathcal{C}'})$ ist eine Unterkategorie von $\mathcal{C} = (Ob_{\mathcal{C}}, Mor_{\mathcal{C}}, \circ^{\mathcal{C}}, id^{\mathcal{C}})$, wenn

- $Ob_{\mathcal{C}'} \subseteq Ob_{\mathcal{C}}$,
- $Mor_{\mathcal{C}'}(A', B') \subseteq Mor_{\mathcal{C}}(A', B')$ für alle $A', B' \in Ob_{\mathcal{C}'}$,
- $f' \circ^{\mathcal{C}'} g' = f' \circ^{\mathcal{C}} g'$ für alle $f' : B' \to C', g' : A' \to B' \in Mor_{\mathcal{C}'}$,
- $id^{\mathcal{C}'}_{A'} = id^{\mathcal{C}}_{A'}$ für alle $A' \in Ob_{\mathcal{C}'}$.

$\mathcal{C}'$ ist eine *volle Unterkategorie*, wenn $Mor_{\mathcal{C}'}(A', B') = Mor_{\mathcal{C}}(A', B')$ für alle $A', B' \in Ob_{\mathcal{C}'}$ gilt.

Die folgenden Beispiele sollen zum einen einige Standardbeispiele von Kategorien verschiedenen Typs vorstellen, zum anderen zeigen, wie man Kategorien definieren kann.

Definition 4.4 (Kategorie der Mengen)
Die Kategorie **Set** der Mengen und Funktionen ist folgendermaßen definiert.

- Die Klasse der Objekte $Ob_{\mathbf{Set}}$ ist die Klasse der Mengen.
- Für je zwei Mengen M und N ist $Mor_{\mathbf{Set}}(M, N)$ die Menge der Funktionen von M nach N.
- Die Komposition ist die Funktionskomposition, d.h. für $f : M \to N$ und $g : N \to K$ ist $g \circ f : M \to K$ definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (\forall x \in M)$.
- Die Identitäten sind die identischen Funkionen, d.h. $id_M : M \to M$ ist definiert durch $id_M(x) = x \quad (\forall x \in M)$.

Definition 4.5 (Kategorie der endlichen Mengen)
Die Kategorie **FinSet** der endlichen Mengen und Funktionen ist die volle Unterkategorie von **Set**, deren Objekte endliche Mengen sind.

Satz 4.6 (Kategorie Set, Unterkategorie FinSet)
Set ist eine Kategorie. **FinSet** ist Kategorie und volle Unterkategorie von **Set**.

Beweis:

- Die Komposition ist assoziativ, da für alle $x \in M$

  $$((h \circ g) \circ f)(x) = h(g(f(x))) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

  für beliebige Funktionen $f : M \to N, g : N \to K$ und $h : K \to L$ gilt.

- Die Identitäten sind neutral bzgl. der Komposition, da für alle $x \in M$

  $$(f \circ id_M)(x) = f(x)$$

  und

  $$(id_N \circ f)(x) = f(x)$$

  für jede Funktion $f : M \to N$ gilt.

FinSet ist volle Unterkategorie
Aus den Definitionen 4.4 und 4.5 ergeben sich unmittelbar folgende Aussagen:

- $\forall A \in Obj_{\mathbf{FinSet}} : A \in Obj_{\mathbf{Set}}$
- $\forall A, B \in Obj_{\mathbf{FinSet}},\ \forall f \in Mor_{\mathbf{FinSet}} : f \in Mor_{\mathbf{Set}}$
- $\forall f, g \in Mor_{\mathbf{FinSet}} : \ f \circ^{\mathbf{FinSet}} g = f \circ^{\mathbf{Set}} g$

- $\forall A \in Obj_{\mathbf{FinSet}} : id_A^{\mathbf{FinSet}} = id_A^{\mathbf{Set}}$

Also ist (laut Definition 4.3) **FinSet** eine Unterkategorie. Ferner wurde **FinSet** als volle Unterkategorie definiert. □

Satz 4.7 (Kategorie CMon)
CMon ist die Kategorie der kommutativen Monoide mit Monoidhomomorphismen, d. h.

- Die Objekte sind kommutative Monoide $Mon = (M, \epsilon, \bullet)$, d.h.

  1. M ist eine (bzgl. $\bullet$ geschlossene) Menge
  2. ϵ ist neutrales Element
  3. $\bullet$ ist eine zweistellige Operation auf M für alle $m_1, m_2, m_3 \in M$, so daß gilt:
     $\epsilon \bullet m_1 = m_1$
     $m_1 \bullet m_2 = m_2 \bullet m_1$
     $(m_1 \bullet m_2) \bullet m_3 = m_1 \bullet (m_2 \bullet m_3)$

- die Morphismen sind wie folgt definiert:
  $f \in Mor((M_1, \epsilon_1, \bullet_1), (M_2, \epsilon_2, \bullet_2))$ falls $f : M_1 \to M_2$ eine Abbildung ist, so daß
  a) $f(\epsilon_1) = \epsilon_2$
  b) $f(m \bullet_1 m') = f(m) \bullet_2 f(m')$ für $m, m' \in M_1$

Beweis:

- Die Komposition ist wohldefiniert
  Für zwei Morphismen $f \in Mor(Mon_1, Mon_2)$ und $g \in Mor(Mon_2, Mon_3)$, mit $Mon_i = (M_i, \epsilon_i, \bullet_i)$ für $i = 1, .., 3$ gilt:
  $g \circ f(\epsilon_1) = g(\epsilon_2) = \epsilon_3$,
  $g \circ f(m \bullet_1 m') = g(f(m) \bullet_2 f(m')) = g(f(m)) \bullet_3 g(f(m')) = g \circ f(m) \bullet_3 g \circ f(m')$

- Die Identität ist ein Morphismus
  Da $id_{(M,\epsilon,\bullet)} = id_M$ gilt:
  $id_M(\epsilon) = \epsilon$ und $\forall m, m' \in M : \; id_M(m \bullet m') = id_M(m) \bullet id_M(m')$

- Assoziativität der Komposition und Neutralität der Identität
  Die Morphismen in **CMon** sind Funktionen und Funktionenkomposition ist assoziativ. Die identischen Funktionen id_M sind neutral bezüglich der Funktionskomposition.

□

Algebren sind mathematische Modelle von Datentypen, wie sie in Programmiersprachen und Datenmodellierungen vorkommen. Wesentlich ist auch hier, die Beziehungen zwischen Algebren ausdrücken zu können. So ist z.B. die Termalgebra $\mathcal{T}_{SIG}$ zu einer Signatur SIG dadurch charakterisiert, daß es zu jeder anderen SIG–Algebra A genau einen SIG–Homomorphismus $eval : \mathcal{T}_{SIG} \to A$ gibt, d.h. die Termauswertung ist eindeutig. *(Vgl. TheGI 2.)*

Satz 4.8 (Kategorie von Algebren)
Eine algebraische Signatur $SIG = (S, OP)$ besteht aus einer Menge S von *Sortennamen* und einer Familie $OP = (OP_{w,s})_{w \in S^*, s \in S}$ von *Operationssymbolen*, geschrieben $op : w \to s$ für $op \in OP_{w,s}$. Eine *SIG–Algebra* $A = (A_S, A_{OP})$ besteht aus einer Familie $A_S = (A_s)_{s \in S}$ von *Basismengen* und einer Familie $A_{OP} = (op_A)_{op \in OP}$ von *Operationen* mit $op_A : A_w \to A_s$ für $op : w \to s \in OP$, wobei für $w = s_1 \dots s_n$ die Menge A_w das kartesische Produkt $A_w = A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n}$ ist. Für $n = 0$, d.h. $w = \lambda$ ist $A_w = \{*\}$, so daß eine Operation $op_A : A_\lambda \to A_s$ (für $op : \lambda \to s \in OP$) einer Konstanten $op_A = op_A(*) \in A_s$ entspricht.

Ein SIG–Homomorphismus $f : A \to B$ zwischen SIG–Algebren A und B ist eine Familie $f = (f_s : A_s \to B_s)_{s \in S}$ von Funktionen zwischen den Basismengen von A und B derart, daß für jedes Operationssymbol $op : w \to s \in OP$ gilt:
$f_s \circ op_A = op_B \circ f_w$, d. h. das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} A_w \arrow[r, "op_A"] \arrow[d, "f_w"'] & A_s \arrow[d, "f_s"] \\ B_w \arrow[r, "op_B"'] & B_s \end{tikzcd}$$

Hierbei sei wieder $f_w = f_{s_1} \times \cdots \times f_{s_n}$ für $w = s_1 \dots s_n$ und $f_\lambda = id_{A_\lambda} : \{*\} \to \{*\}$.

Die Kategorie $\mathbf{Alg}(SIG)$ zu einer gegebenen Signatur SIG besteht aus allen SIG–Algebren als Objekten und allen SIG–Homomorphismen als Morphismen. Die Komposition $g \circ f$ von SIG–Homomorphismen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist ebenso wie die Identitäten komponentenweise definiert, d.h. $(g \circ f)_s = g_s \circ f_s \quad (s \in S)$ und $(id_A)_s = id_{A_s} \quad (s \in S)$.

Beweis: Da die Komposition $g_s \circ f_s$ von Funktionen assoziativ ist und die identischen Funktionen id_{A_s} neutral bzgl. der Funktionskomposition sind, gelten die entsprechenden Eigenschaften auch für $\mathbf{Alg}(SIG)$, d. h. $\mathbf{Alg}(SIG)$ ist tatsächlich eine Kategorie.

□

Satz 4.9 (Kategorie der Graphen)
Ein Graph $G = (E, V, s, t)$ besteht aus einer Menge E von Kanten (edges), einer Menge V von Knoten (vertices) und zwei Funktionen $s, t : E \to V$, die jeder Kante $e \in E$ eine Quelle (source) $q = s(e) \in V$ und ein Ziel (target) $z = t(e) \in V$ zuordnen, geschrieben $q \xrightarrow{e} z$.

Ein Graphmorphismus $f : G_1 \to G_2$ zwischen Graphen $G_i = (E_i, V_i, s_i, t_i)$, $(i = 1, 2)$ ist ein Paar $f = (f_E : E_1 \to E_2, f_V : V_1 \to V_2)$ von Funktionen, für die $f_V \circ s_1 = s_2 \circ f_E$ und $f_V \circ t_1 = t_2 \circ f_E$ gilt. D. h. die beiden Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "f_E"'] & V_1 \arrow[d, "f_V"] \\ E_2 \arrow[r, "s_2"'] & V_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "t_1"] \arrow[d, "f_E"'] & V_1 \arrow[d, "f_V"] \\ E_2 \arrow[r, "t_2"'] & V_2 \end{tikzcd}$$

Die Kategorie **Graph** der Graphen und Graphmorphismen besteht aus allen Graphen als Objekten und allen Graphmorphismen als Morphismen, wobei Komposition und Identitäten wieder komponentenweise wie in Satz 4.8 definiert sind.

Beweis:

- Die Komposition von Graphmorphismen ist wohldefiniert:
  Für $G_i = (E_i, V_i, s_i, t_i)$, $i = 1,2,3$ und $f \in Mor_{\mathbf{Graph}}(G_1, G_2)$ und $g \in Mor_{\mathbf{Graph}}(G_2, G_3)$ gilt:
  $(g \circ f)_V \circ s_1 = g_V \circ f_V \circ s_1 = g_V \circ s_2 \circ f_E = s_3 \circ g_E \circ f_E =$
  $= s_3 \circ (g \circ f)_E$
  Analog gilt: $(g \circ f)_V \circ t_1 = t_3 \circ (g \circ f)_E$

- Die Identität ist ein Morphismus:
  Sei $G = (E, V, s, t) \in Ob_{\mathbf{Graph}}$ mit $id_G = (id_V, id_E)$, dann gilt:
  $\forall e \in E : id_V \circ s(e) = s(e) = s \circ id_E(e)$, also gilt: $id_V \circ s = s \circ id_E$
  und analog gilt $id_V \circ t = t \circ id_E$.

- Da die Kompositionen $g_V \circ f_V$ und $g_E \circ f_E$ von Funktionen assoziativ sind, und die identischen Funktionen id_V, id_E neutral bezüglich der Funktionenkomposition sind, gelten die entsprechenden Eigenschaften auch für **Graph**.

$\square$

Bemerkung:
Man beachte, daß für die Signatur

$$
\begin{array}{ll}
GRAPH & = \\
\underline{\text{sorts}} & \text{edges, vertices} \\
\underline{\text{opns}} & \text{source: edges} \to \text{vertices} \\
 & \text{target: edges} \to \text{vertices}
\end{array}
$$

die Kategorie $\mathbf{Alg}(GRAPH)$ der $GRAPH$–Algebren mit der Kategorie **Graph** der Graphen übereinstimmt.

Analog zu 4.8 und 4.9 lassen sich weitere *algebraische* Beispiele angeben, d. h. Kategorien, deren Objekte Familien von Mengen mit Operationen und deren Morphismen Familien von operationsverträglichen Abbildungen sind. So besteht z.B. die Kategorie $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ aus $\mathbb{R}$–Vektorräumen als Objekten, also Mengen von Vektoren mit Nullvektor, Addition und Skalarmultiplikation, und linearen Abbildungen als Morphismen, also Abbildungen, die Nullvektor, Addition und Multiplikation bewahren. Ebenso sind Kategorien von anderen klassischen algebraischen Strukturen, wie Gruppen, Ringen und Körpern definiert.

Beispiel 4.10 (Monoid-Kategorie)
Sei S eine Menge. Dann läßt sich die Menge S^* der Wörter über S als Kategorie auffassen:

- $Ob_{S^*} = \{\bullet\}$, d.h. es gibt genau ein Objekt,

- $Mor_{S^*}(\bullet, \bullet) = S^*$.

- Komposition ist die Konkatenation von Wörtern.

- Die Identität ist das leere Wort $\lambda \in S^*$.
- Die Komposition ist assoziativ und die Identität ist neutral bzgl. der Komposition gemäß der Definition der Konkatenation.

Eine Kategorie mit einem Objekt wird auch *Monoid-Kategorie* genannt.

4.3 Die Kategorie PT der S/T-Netze

Wir wollen nun die Kategorie **PT** der S/T-Netze und -Morphismen entwickeln und führen zunächst den Begriff des S/T-Netz-Morphismus ein:

Definition 4.11 (S/T-Netz-Morphismus)
Seien $N_i := (P_i, T_i, pre_i, post_i), i = 1, 2$, S/T-Netze. Dann ist ein S/T-Netz-Morphismus $f : N_1 \to N_2 := (f_P, f_T)$ ein Paar von Abbildungen $f_P : P_1 \to P_2, f_T : T_1 \to T_2$, so daß folgendes Diagramm komponentenweise kommutiert:

$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[r, shift left, "pre_1"] \arrow[r, shift right, "post_1"'] \arrow[d, "f_T"'] & P_1^{\oplus} \arrow[d, "f_P^{\oplus}"] \\ T_2 \arrow[r, shift left, "pre_2"] \arrow[r, shift right, "post_2"'] & P_2^{\oplus} \end{tikzcd}$$

Bemerkung:
Dabei ist $f_P^{\oplus}$ frei erzeugter Monoidhomomorphismus, nämlich homomorphe Fortsetzung von f_P, d. h. jedes Basiselement aus $P_1 \subseteq P_1^{\oplus}$ wird über $f_P^{\oplus}$ auf ein Basiselement aus $P_2 \subseteq P_2^{\oplus}$ abgebildet, und für $p_1, p_2 \in P_1$ gilt:

$$\begin{aligned} f_P^{\oplus}(\lambda) &= \lambda \\ f_P^{\oplus}(p_1 \oplus p_2) &= f_P(p_1) \oplus f_P(p_2) \end{aligned}$$

Wir sagen auch $f_P^{\oplus}$ ist „$\oplus$“-verträglich und monoton (siehe auch Satz 3.3.2).

In der Literatur gibt es im Unterschied zu unserer Definition S/T-Netz-Morphismen, deren Komponenten Monoidhomomorphismen, die nicht unbedingt frei erzeugt sein müssen, enthalten. Für unsere Zwecke sind frei erzeugte Monoidhomomorphismen ausreichend und erleichtern das Verständnis des Zusammenhangs zu klassischen S/T-Netzen. Wir erreichen damit auch, daß die Kategorie kovollständig wird, eine wichtige Eigenschaft, um allgemeine Netzkompositionen über Kolimiten (z. B. die Komposition von S/T-Netzen über Pushouts) bilden zu können.

Beispiel 4.12
Betrachten wir die beiden S/T-Netze N_1 und N_2 in Abbildung 4.1. Dann bilden $f_P := \{p1 \mapsto p5, p2 \mapsto p5, p3 \mapsto p6, p4 \mapsto p6\}$ und $f_T := \{t1 \mapsto t2\}$ einen S/T-Netz-Morphismus nach Definition 4.11. Der Morphismus "verklebt" hier gewissermaßen jeweils zwei Stellen

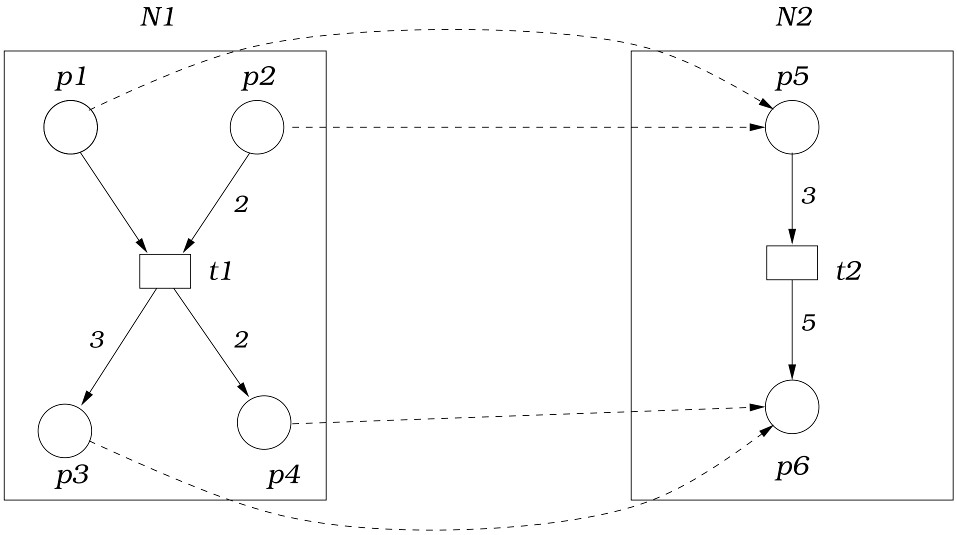


Abbildung 4.1: Beispiel eines S/T-Netz-Morphismus

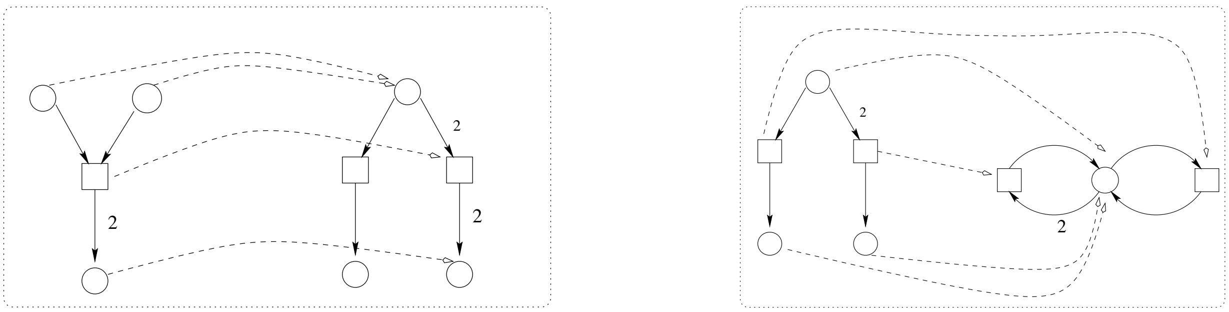


Abbildung 4.2: Weitere Beispiele von S/T-Netz-Morphismen

zu einer. Die Kantengewichte zur benachbarten Transition werden dabei addiert. Analog sind in Abbildung 4.2 zwei weitere Morphismen dargestellt.
Dagegen sind in Abbildung 4.3 jeweils zwei S/T-Netze dargestellt, zwischen denen kein Morphismus (in keine Richtung) existiert. Unabhängig davon, wie die Stellen und Transitionen abgebildet würden, wäre jeweils die Gleichheit des Bildes des Vorbereichs einer Transition und dem Vorbereich ihres Bildes verletzt, bzw. die Veträglichkeit bzgl. des Nachbereichs.

Bemerkung:
Da unsere S/T-Netz-Morphismen frei erzeugt sind, also Basiselemente auf Basiselemente abbilden, kann man z. B. nicht das ursprüngliche Netz N_1 über einen S/T-Netz-Morphismus aus N_2 zurückgewinnen. Auch ist es nicht möglich, zwei oder mehr Transitionen über einen S/T-Netz-Morphismus zu einer zu verkleben, es sei denn, die Vor- und Nachbereiche sind gleich.

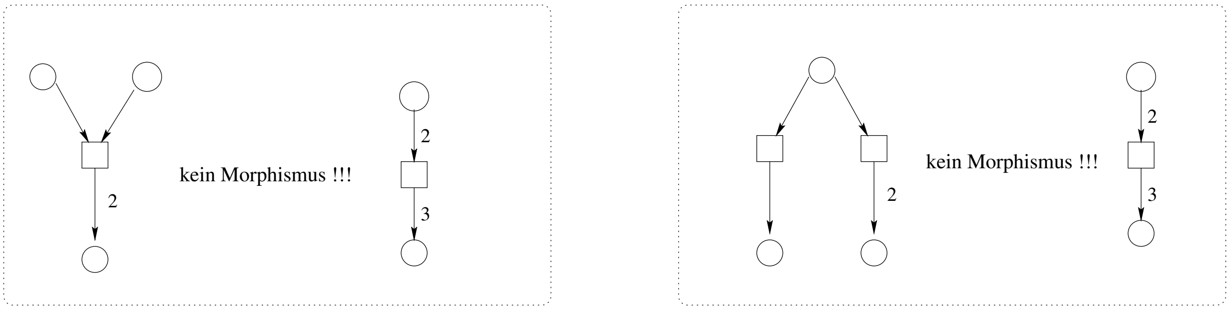


Abbildung 4.3: Keine S/T-Netz-Morphismen

Konstruieren wir nun die Kategorie **PT** der S/T-Netze.

Satz 4.13 (Kategorie PT)
Die Klasse der S/T-Netze $N := (P, T, pre, post)$ bildet zusammen mit den S/T-Netz-Morphismen die Kategorie **PT**.

Beweis: Seien N_i mit $i = 1, \ldots, 3$ S/T-Netze und $f : N_1 \to N_2$ und $g : N_2 \to N_3$ S/T-Netz-Morphismen. Wir müssen zeigen, daß $g \circ f : N_1 \to N_3$ ebenfalls S/T-Netz-Morphismus ist. Wir definieren $((g \circ f)_P, (g \circ f)_T) := (g_P \circ f_P, g_T \circ f_T)$ und zeigen, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r, shift left, "pre_1"] \arrow[r, shift right, "post_1"'] \arrow[d, "f_T"] \arrow[dd, bend right=60, "(g\circ f)_T"'] & P_1^{\oplus} \arrow[d, "f_P^{\oplus}"'] \arrow[dd, bend left=60, "(g\circ f)_P^{\oplus}"] \\
T_2 \arrow[r, shift left, "pre_2"] \arrow[r, shift right, "post_2"'] \arrow[d, "g_T"] & P_2^{\oplus} \arrow[d, "g_P^{\oplus}"'] \\
T_3 \arrow[r, shift left, "pre_3"] \arrow[r, shift right, "post_3"'] & P_3^{\oplus}
\end{tikzcd}$$

Aus unserer Definition von $((g \circ f)_P, (g \circ f)_T)$ folgt, daß die beiden Komponentendiagramme kommutieren. Also kommutiert auch das gesamte Diagramm. Wesentliches Argument ist: $g_P^{\oplus} \circ f_P^{\oplus} = (g \circ f)_P^{\oplus}$ bzw. $(g_P \circ f_P)^{\oplus}$.

Sei $N_1 := (P_1, T_1, pre_1, post_1)$ beliebiges S/T-Netz, dann definieren wir die Identität auf N_1 als $id_{N_1} := (id_P : P_1 \to P_1, id_T : T_1 \to T_1)$, so daß dieses Paar wieder S/T-Netz-Morphismus ist. Nun gilt für beliebige S/T-Netz-Morphismen $f : N_1 \to N_2$, daß $f \circ id_{N_1} = f$ und $id_{N_2} \circ f = f$, weil die Gleichungen komponentenweise für die zugrundeliegenden Abbildungen erfüllt sind, welche Morphismen in der Kategeorie **Set** der Mengen sind.

Es bleibt die Assoziativität der Komposition zu zeigen. Seien $f : N_1 \to N_2, g : N_2 \to N_3, h : N_3 \to N_4$ S/T-Netz-Morphismen, dann ist zu zeigen, daß $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$. Diese Gleichung ist wiederum trivialerweise deshalb erfüllt, weil die komponentenweise

Komposition wegen der zugrundeliegenden **Set**-Abbildungen assoziativ ist. □

Wir formalisieren das Schaltverhalten für S/T-Netze, und erweitern unsere Kategorie **PT** dabei so, daß auch paralleles Schalten von Transitionen formal ausgedrückt werden kann.

Betrachten wir zunächst die Frage, wie sich S/T-Netz-Morphismen auf das Schaltverhalten auswirken. Satz 4.14 zeigt, daß ein S/T-Netz-Morphismus $f = (f_P, f_T) : N_1 \to N_2$ das Schaltverhalten von N_1 auf N_2 überträgt, d.h. macht das Schalten einer Transition t in N_1 aus der Markierung M von N_1 die Markierung M' von N_1, dann macht das Schalten der Transition $f_T(t)$ in N_2 aus der Markierung $f_P^{\oplus}(M)$ in N_2 die Markierung $f_P^{\oplus}(M')$ in N_2.

Satz 4.14 (S/T-Netz-Morphismen bewahren Schaltverhalten)
Seien $N_i := (P_i, T_i, pre_i, post_i)$, $i = 1, 2$ S/T-Netze, $M \in P_1^{\oplus}$ Markierung zu N_1 und $f : N_1 \to N_2$ ein S/T-Netz-Morphismus. Sei $t \in T_1$ eine unter M aktivierte Transition in N_1, dann gilt:

$$M[t\rangle M' \Longrightarrow f_P^{\oplus}(M)[f_T(t)\rangle f_P^{\oplus}(M')$$

Beweis:
Wir zeigen zunächst: Genau dann, wenn t unter M aktiviert ist, ist auch $f_T(t)$ unter $f_P^{\oplus}(M)$ aktiviert:

$$\begin{array}{lll}
 & M[t\rangle & \\
\Leftrightarrow & pre_1(t) \leq M & \\
\Rightarrow & f_P^{\oplus}(pre_1(t)) \leq f_P^{\oplus}(M) & (f_P \text{ monoton}) \\
\Leftrightarrow & pre_2(f_T(t)) \leq f_P^{\oplus}(M) & (\mathbf{PT}\text{-Morphismen}) \\
\Leftrightarrow & f_P^{\oplus}(M)[f_T(t)\rangle &
\end{array}$$

Wir betrachten den Schaltschritt $M[t\rangle M'$ von N_1 und zeigen, daß ihm genau ein Schaltschritt $f_P^{\oplus}(M)[f_T(t)\rangle f_P^{\oplus}(M')$ von N_2 entspricht.

$$\begin{array}{lll}
 & M[t\rangle M' & \\
\Leftrightarrow & M' = M \ominus pre_1(t) \oplus post_1(t) & \\
\Rightarrow & f_P^{\oplus}(M') = f_P^{\oplus}(M \ominus pre_1(t) \oplus post_1(t)) & \\
\Leftrightarrow & f_P^{\oplus}(M') = f_P^{\oplus}(M) \ominus f_P^{\oplus}(pre_1(t)) \oplus f_P^{\oplus}(post_1(t)) & (\text{ Monotonie } f_P^{\oplus}\ ) \\
\Leftrightarrow & f_P^{\oplus}(M') = f_P^{\oplus}(M) \ominus pre_2(f_T(t)) \oplus post_2(f_T(t)) & (\ \mathbf{PT}\text{-Morphismen}) \\
\Leftrightarrow & f_P^{\oplus}(M)[f_T(t)\rangle f_P^{\oplus}(M') &
\end{array}$$

Kapitel 5

Strukturierung mit Kolimes-Konstruktionen

Bedarf an geeigneter Abstraktion von Problembeschreibungen besteht immer dann, wenn klar wird, daß Arbeit beim Definieren und Beweisen von Konzepten doppelt geleistet wird. Kategorientheorie bietet eine angemessene Abstraktionsebene und eine solide Grundlage an Konzepten, die es gestatten, die gemeinsame Essenz verschiedener Beschreibungen zu formulieren. So beschreibt zum Beispiel das kategorielle Koprodukt die Konzepte Disjunkte Vereinigung und Disjunktion von Propositionen. Eine angemessene kategorielle Problembeschreibung bietet zwei Vorteile: Zum einen liefert eine kategorielle Beschreibung von Ergebnissen und Beweisen eine klare Abgrenzung von allgemeinen und speziellen Problemeigenschaften. Hier bietet sich die Gelegenheit zur „horizontalen Verallgemeinerung“, d.h. wir können ähnliche Probleme lösen, indem wir deren allgemeine Eigenschaften beibehalten und beweisen, daß die speziellen Eigenschaften in den neuen Problemen ebenfalls auftreten.

Insbesondere, was die Komposition von Objekten einer Kategorie angeht (also zum Beispiel die Verbindung mehrerer kleiner S/T-Netze zu einem großen), sind Kolimiten von Interesse. Kolimiten repräsentieren eine kategorielle Sichtweise der Komposition: gemeinsame Teile treten im komponierten Objekt nur einmal auf, verschiedenartige Teile werden ohne Identifikation nebeneinandergesetzt.

Wir werden in Kapitel 7.1 das Konzept der freien Konstruktion einführen, um eine kompositionelle Semantik für S/T-Netze zu definieren, denn freie Funktoren bewahren Kolimiten, also Koprodukte, Koegalisatoren und Pushouts. Die Semantik des komponierten Netzes läßt sich somit aus der Semantik der Teilnetze komponieren.

Im Folgenden werden wir diese Konstruktionen kategoriell beschreiben:

- Disjunkte Vereinigung
  - Koprodukt
- Union, d.h. Vereinigung bezüglich einer gemeinsamen Schnittstelle
  -Pushout
- Fusion, d.h. Verklebung
  - Koegalisator

Diese Konstruktionen stellen spezielle Kolimiten dar. Kolimiten sind allgemein über beliebige Diagramme formuliert. Hier werden wir uns nur mit den obengenannten Konstruktionen beschäftigen.

Beispiel 5.1 (Disjunkte Vereinigung in Set)
Für zwei Mengen A und B in **Set** ist eine disjunkte Vereinigung gegeben durch:

$$A \uplus B := A \times \{1\} \cup B \times \{2\}$$

Definition 5.2 (Koprodukt)
Ein Objekt A zusammen mit einer Familie $(u_i : A_i \to A)_{i\in I}$ von Morphismen, genannt *Injektionen*, in $\mathcal{C}$ heißt *Koprodukt* von $(A_i)_{i\in I}$, geschr. $A = \coprod\limits_{i\in I} A_i$, wenn folgendes gilt:
Für jedes Objekt B und jede Familie $(f_i : A_i \to B)_{i\in I}$ von Morphismen in $\mathcal{C}$ existiert genau ein Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{C}$, derart daß $f \circ u_i = f_i$ für alle $i \in I$ gilt.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "u_i"'] & & B \\ & A \arrow[ur, dotted, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Wenn für alle Familien $(A_i)_{i\in I}$ ein Koprodukt existiert, dann hat die Kategorie $\mathcal{C}$ Koprodukte.

Bemerkung:
Für $I = \{1, 2\}$ wird das Koprodukt mit $A_1 + A_2$ bezeichnet, wobei in dieser Notation die Reihenfolge wesentlich ist. Es gilt im allgemeinen nicht die Gleichheit $A_1 + A_2$ mit $A_2 + A_1$ sondern nur die Isomorphie der entsprechenden Objekte. Entsprechendes gilt für endliche und unendliche Indexmengen I.

Satz 5.3 (Koprodukt in Set)
Die Kategorie **Set** hat Koprodukte, die durch die disjunkte Vereinigung gegeben sind, d.h. gegeben $(A_i)_{i\in I}$, dann ist $A = \coprod\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{i\in I} A_i \times \{i\}$ Koprodukt, wobei $u_i : A_i \to A$ für alle $i \in I$ und $a \in A_i$ definiert ist durch $u_i(a) = (a, i)$.

Beweis: Zu zeigen ist die universelle Eigenschaft:

(a) Existenz von f:
Es sei $B \in Ob_{\mathbf{Set}}$ eine Menge und $(f_i : A_i \to B)_{i\in I}$ eine Familie von Funktionen.

Wir definieren $f : A \to B$ so daß $f \circ u_i = f_i$. Für $a \in A_i$ und $i \in I$ sei

$$f((a,i)) := f_i(a)$$

Die Menge A besteht laut Konstruktion nur aus Elementen (a,i), für die gilt $i \in I$ und $a \in A_i$ also ist f vollständig definiert. Es gilt $\forall i \in I, \forall a \in A_i : f((a,i)) = f(u_i(a)) = f_i(a)$, also

$$f \circ u_i = f_i \qquad (1)$$

(b) Eindeutigkeit von f:
Es sei $f' : A \to B$, so daß $\forall i \in I: \; f' \circ u_i = f_i$ (2)
dann gilt: $\forall (a,i) \in A$ folgende Gleichung: $f'((a,i)) = f'(u_i(a)) \overset{(2)}{=} f_i(a) \overset{(1)}{=} f((a,i))$
Daraus folgt $f' = f$ und somit ist die universelle Eigenschaft gezeigt.

$\square$

Analog zu den Mengen läßt sich die disjunkte Vereinigung auch für S/T-Netze definieren.

Definition 5.4 (Disjunkte Vereinigung von S/T-Netzen)
Gegeben zwei S/T-Netze $N_1 = (P_1, T_1, pre_1, post_1)$ und $N_2 = (P_2, T_2, pre_2, post_2)$, dann ist die disjunkte Vereinigung komponentenweise definiert:

$$N = (P_1 \uplus P_2, T_1 \uplus T_2, pre, post)$$

mit $pre, post : T_1 \uplus T_2 \to (P_1 \uplus P_2)^\oplus$, wobei

$$pre((t,i)) = \begin{cases} pre_1(t) & ; i = 1 \text{ (und damit } t \in T_1) \\ pre_2(t) & ; i = 2 \end{cases}$$

$$post((t,i)) = \begin{cases} post_1(t) & ; i = 1 \\ post_2(t) & ; i = 2 \end{cases}$$

Beispiel 5.5
Abbildung 5.1 zeigt ein Beispiel eines Koproduktes zweier S/T-Netze N_1 and N_2. Es wird deutlich, daß das Koprodukt $N_1 + N_2$ zweier S/T-Netze das Ergebnis einer Kompositionsoperation ohne jede Synchronisation ist. Beide Netze werden einfach ohne Kooperation nebeneinandergesetzt.

Satz 5.6 (Die Kategorie PT hat Koprodukte)
Gegeben eine Familie von S/T-Netzen $N_i = (P_i, T_i, pre_i, post_i)$ für $i \in I$, dann ist
$N = \coprod_{i \in I} N_i = (P, T, pre, post)$ mit

$P = \coprod_{i \in I} P_i$

$T = \coprod_{i \in I} T_i$ (vgl. Satz 5.3)

$pre : T \to P^\oplus$ mit $pre((t,i)) = u_{iP}^\oplus \circ pre_i(t)$

$post : T \to P^\oplus$ mit $post((t,i)) = u_{iP}^\oplus \circ post_i(t)$

Koprodukt der S/T-Netze N_i, zusammen mit der Familie der Injektionen
$u_i : N_i \to N$ für $i \in I$, die gegeben ist durch:

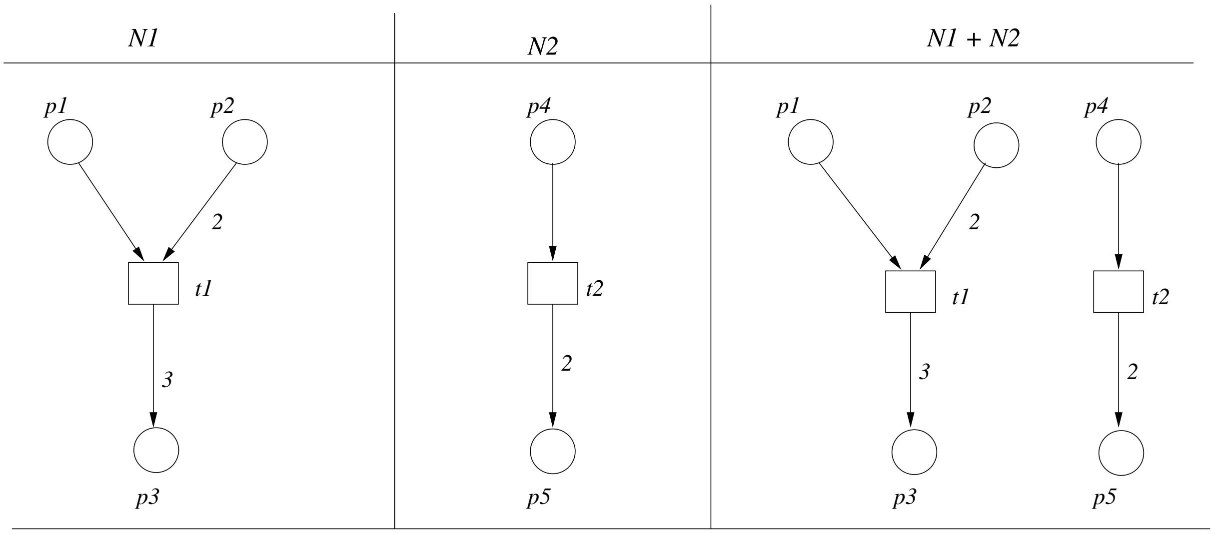


Abbildung 5.1: Ein Koprodukt von zwei S/T-Netzen

$u_i = (u_{iP}, u_{iT})$ mit $u_{iP} : P_i \to P$ und $u_{iT} : T_i \to T$,
den Injektionen der Koprodukte P und T bezüglich der Mengenfamilien P_i und T_i in **Set**.

Beweis: Zu zeigen ist die universelle Eigenschaft von $(N, (u_i)_{i \in I})$.

1. **Existenz von f mit $f \circ u_i = f_i$:**
   Gegeben seien ein S/T-Netz $M = (P_M, T_M, pre_M, post_M)$, $f_i : N_i \to M$ für alle $i \in I$ (siehe Abbildung 5.2). Dann existiert $f : N \to M$, $f = (f_P, f_T)$, mit
   $f_P : P \to P_M$, mit $f_P \circ u_{iP} = f_{iP}$ (1)
   (das bedeutet $f_P(p) = f_{iP}(p')$ für $p' \in P_i$ und $u_{iP}(p') = p$)
   $f_T : T \to T_M$, mit $f_T \circ u_{iT} = f_{iT}$, (2)
   wobei f_P und f_T die Koproduktmorphismen bezüglich P_M und T_M in **Set** sind.
   $f = (f_P, f_T)$ ist **wohldefiniert**, denn für alle $i \in I$:

$$\begin{aligned} pre_M \circ f_T \circ u_{iT} &\overset{(2)}{=} pre_M \circ f_{iT} \\ &= f_{iP}^{\oplus} \circ pre_i && \text{da } f_i \text{ Morphismus} \\ &\overset{(1)}{=} f_P^{\oplus} \circ u_{iP}^{\oplus} \circ pre_i \\ &= f_P^{\oplus} \circ pre \circ u_{iT} && \text{da } u_i \text{ Morphismus} \end{aligned}$$

   Da (u_{iT}) surjektive Familie von Injektionen ist, kann man u_{iT} kürzen, also gilt:
$$pre_M \circ f_T = f_P^{\oplus} \circ pre$$
und analog gilt $post_M \circ f_T = f_P^{\oplus} \circ post$

   Kommutativität $f \circ u_i = f_i$:
   für alle $i \in I$:

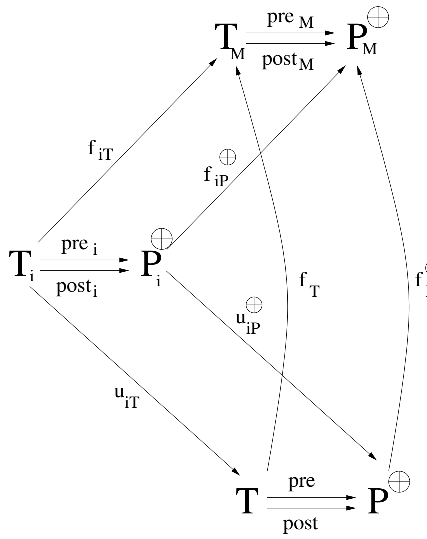


Abbildung 5.2: Universelle Eigenschaft

$$\begin{aligned} f \circ u_i &= (f_p \circ u_{iP}, f_T \circ u_{iT}) \\ &= (f_{iP}, f_{iT}) \\ &= f_i \end{aligned}$$

2. **Eindeutigkeit von $\boldsymbol{f}$:**
   Sei $\hat{f} = (\hat{f}_T, \hat{f}_P)$ ein weiterer Morphismus, so daß für alle $i \in I$ gilt $\hat{f} \circ u_i = f_i$.
   Dann ist für alle $i \in I$:
   $\hat{f}_P \circ u_{iP} = f_{iP}$ und
   $\hat{f}_T \circ u_{iT} = f_{iT}$
   Da P und T Koprodukte in **Set** sind, gilt $\hat{f}_P = f_P$ und $\hat{f}_T = f_T$ und damit

$$\hat{f} = (\hat{f}_P, \hat{f}_T) = (f_P, f_T) = f$$

□

Bemerkung:
Die disjunkte Vereinigung von S/T-Netzen (vgl. Def. 5.4) ist das Koprodukt bzgl. einer zweielementigen Indexmenge.

Definition 5.7 (Initiales Objekt)
Ein Objekt I einer Kategorie $\mathcal{C}$ heißt *initial* (oder auch *Anfangsobjekt*), falls für jedes Objekt A aus $\mathcal{C}$ genau ein Morphismus $f : I \to A$ in $\mathcal{C}$ existiert.

Beispiel 5.8 (Initiales Objekt)

- In der Kategorie **Set** der Mengen ist die leere Menge $\emptyset$ initiales Objekt, denn die leere Abbildung $\emptyset : \emptyset \to M$ existiert für alle Mengen $M \in Ob_{\mathbf{Set}}$ und ist die einzige Abbildung, die als Quelle die leere Menge und als Wertebereich die Menge M hat.

- In der Kategorie **Alg**(SIG) der SIG–Algebren ist die Termalgebra $\mathcal{T}_{SIG}$ initiales Objekt, da für jede beliebige SIG–Algebra A der Termauswertungshomomorphismus $eval_A : \mathcal{T}_{SIG} \to A$, der einzige SIG–Homomorphismus von $\mathcal{T}_{SIG}$ nach A ist.
- In der Kategorie **Graph** der Graphen und Graphmorphismen ist der leere Graph initiales Objekt.

Bemerkung:
Falls die Indexmenge $I = \emptyset$, dann ist das Koprodukt initiales Objekt.

Satz 5.9 (Initiales Objekt in PT)
Das Netz $N_\emptyset = (\emptyset, \emptyset, pre_\emptyset, post_\emptyset)$ mit $pre_\emptyset, post_\emptyset : \emptyset \to \emptyset^\oplus$ den leeren Abbildungen ist initial in **PT**.

Beweis: Es sei $N = (P, T, pre, post) \in Ob_{\mathbf{PT}}$ beliebig.
Wir zeigen, daß $\exists! f = (f_P : \emptyset \to P, f_T : \emptyset \to T) \in Mor_{\mathbf{PT}}(N_\emptyset, N)$.
Da der Definitionsbereich der Funktionen f_P und f_T die leere Menge ist, können f_P und f_T nur die leeren Abbildungen sein (damit wäre die Eindeutigkeit gezeigt). Es bleibt zu zeigen, daß $f = (f_P, f_T)$ mit $f_P = \emptyset$ und $f_T = \emptyset$ als Morphismus wohldefiniert ist. Dieses gilt, weil: $f_P^\oplus \circ pre_\emptyset = \emptyset = pre \circ f_T$ und $f_P^\oplus \circ post_\emptyset = \emptyset = post \circ f_T$. □

5.1 Strukturierung von S/T-Netzen durch Union

Nun kommen wir zur Union, einer Kontruktion, die im Allgemeinen zwei Objekte bzgl. einer gemeinsamen Schnittstelle (Interface) vereinigt. Für Mengen bedeutet dies, im Gegensatz zur normalen Vereinigung, daß nur die als Schnittstelle ausgezeichnete Teilmenge in beiden Mengen identifiziert wird. Der Rest (die Komplemente) werden dagegen disjunkt vereinigt. Die kategorielle Konstruktion, die die Union beschreibt, ist das Pushout.

Definition 5.10 (Pushout)
Ein *Pushout* von zwei Morphismen $f_1 : A_0 \to A_1$ und $f_2 : A_0 \to A_2$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ ist ein Objekt A_3, genannt *Pushout-Objekt*, zusammen mit zwei Morphismen $g_1 : A_1 \to A_3$ und $g_2 : A_2 \to A_3$ in $\mathcal{C}$, derart daß das Diagramm (PO) kommutiert und die folgende *universelle Eigenschaft* hat:
Für alle Objekte A und Morphismen $g_1' : A_1 \to A$ und $g_2' : A_2 \to A$ in $\mathcal{C}$ mit $g_1' \circ f_1 = g_2' \circ f_2$ existiert genau ein Morphismus $g : A_3 \to A$ in $\mathcal{C}$, derart daß die folgenden Diagramme (1) und (2) kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
& A_1 \arrow[dr, "g_1"] \arrow[drr, bend left, "g_1'"] \arrow[drr, phantom, "(1)"] & & \\
A_0 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] \arrow[rr, phantom, "(PO)"] & & A_3 \arrow[r, dotted, "g"] & A \\
& A_2 \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[urr, bend right, "g_2'"'] \arrow[urr, phantom, "(2)"] & &
\end{tikzcd}$$

Das Diagramm (PO) heißt in diesem Fall Pushout-Diagramm. Wenn für alle $A_1 \overset{f_1}{\leftarrow} A_0 \overset{f_2}{\rightarrow} A_2$ das Pushout $A_1 \overset{g_1}{\rightarrow} A_3 \overset{g_2}{\leftarrow} A_2$ existiert, dann hat die Kategorie $\mathcal{C}$ Pushouts. Wir schreiben:

$$A_3 = A_1 +_{A_0} A_2$$

A_0 nennen wir Interface.

Satz 5.11 (Pushouts in Set)
Gegeben seien die Mengen A, B, C und die Funktionen $f_1 : A \to B$, $f_2 : A \to C$, dann ist $D = (B \uplus C)_{/E^*}$ der Quotient über die durch $E = \{((f_1(a), 1), (f_2(a), 2)) | a \in A\}$ erzeugte Äquivalenzrelation E^*, zusammen mit $g_2 : C \to D$ und $g_1 : B \to D$ mit

$$g_1(b) = \begin{cases} [(b,1)] & ;\text{falls } b \notin f_1(A) \\ [(f_1(a),1)] & ;\text{sonst} \end{cases} \qquad g_2(c) = \begin{cases} [(c,2)] & ;\text{falls } c \notin f_2(A) \\ [(f_2(a),2)] & ;\text{sonst} \end{cases}$$

Pushout für f_1 undf_2. Wir notieren $D = B +_A C$ als Pushout-Objekt.

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g_1"] \arrow[rr, bend left, "g_1'"] \arrow[rr, phantom, "(1)"] & & D' \\
A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] \arrow[rr, phantom, "(PO)"] & & D \arrow[r, dotted, "h"] & D' \\
 & C \arrow[ur, "g_2"'] \arrow[ur, phantom] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, "g_1"] \arrow[ddrr, phantom] & & \\
A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] \arrow[rr, phantom, "(PO)"] & & D \arrow[r, dotted, "h"] & D' \\
 & C \arrow[ur, "g_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

1. Kommutativität von (PO)
   $\forall x \in A : g_1(f_1(a)) = [(f_1(a), 1)] = [(f_2(a), 2)] = g_2(f_2(a))$

2. Universelle Eigenschaft:
   Es sei $D' \in Ob_{\mathbf{Set}}$ und die Funktionen $g_1' : B \to D'$ und $g_2' : C \to D'$, so daß:
   $$g_1' \circ f_1 = g_2' \circ f_2 \tag{3}$$
   Zu zeigen ist, daß
   $$\exists! h : D \to D' \in Mor_{\mathbf{Set}} : h \circ g_1 = g_1' \text{ und } h \circ g_2 = g_2'$$
   Wir definieren den Morphismus $h : D \to D'$.
   $$h(d) := \begin{cases} g_1'(b) & ; falls\ d = [(b,1)] \\ g_2'(c) & ; falls\ d = [(c,2)] \end{cases}$$

   - h ist wohldefiniert:

     Da $D = (B \uplus C)_{/E^*}$ gilt:
     $\forall [(b,1)] \in D : b \in B \Rightarrow \exists g_1'(b)$ und
     $\forall [(c,2)] \in D : c \in C \Rightarrow \exists g_2'(c)$.

Für $d \in D$ mit der Eigenschaft $d = [(b,1)] = [(c,2)]$ zeigen wir, daß $g_1'(b) = g_2'(c)$:
Da $(c,1) \neq (b,2)$, aber $[(b,1)] = [(c,2)]$ folgt $((b,1),(c,2)) \in E^*$, und laut Definition der Äquivalenzrelation E^* gilt: $\exists a \in A$ mit $b = f_1(a)$ und $c = f_2(a)$.
Also:
$g_1'(b) = g_1'(f_1(a)) \overset{(3)}{=} g_2'(f_2(a)) = g_2'(c)$

- Kommutativität der Diagramme (1) und (2):
$\forall b \in B : h \circ g_1(b) = h([(b,1)]) = g_1'(b)$ und analog gilt $h \circ g_2 = g_2'$.

- Eindeutigkeit von h:
Es sei $h' : D \to D'$ mit $h' \circ g_1 = g_1'$ und (4)
$h' \circ g_2 = g_2'$ (5)
- für $d = [(b,1)]$ gilt $h'(d) = h'(g_1(b)) \overset{(4)}{=} g_1'(b) = h(g_1(b)) = h(d)$
- für $d = [(c,2)]$ gilt $h'(d) = h'(g_2(c)) \overset{(5)}{=} g_1'(c) = h(g_2(c)) = h(d)$
$\Rightarrow \forall d \in D : h'(d) = h(d) \Rightarrow h' = h$

$\square$

Definition 5.12 (Union von S/T-Netzen)
Die Union von S/T-Netzen N_1, N_2 über einem Interface I mit $N_1 \leftarrow I \rightarrow N_2$ ist durch ein Pushout $N_1 \rightarrow N \leftarrow N_2$ gegeben und wird $N_1, N_2 \overset{I}{\rightarrowtail} N$ bezeichnet.

Beispiel 5.13
Abbildung 5.3 zeigt das Prinzip der Verklebung zweier P/T-Netze N_1 und N_2 über einem gemeinsamen Interface. Die beiden Netze N_1 und N_2 werden in N an der Stelle verklebt, die durch das Interface ausgezeichnet ist. Genauer werden die f_1, f_2 Bilder des Interfacenetzes miteinander identifiziert. Die unterschiedlichen Grautöne illustrieren dabei den Ursprung der Netzelemente.

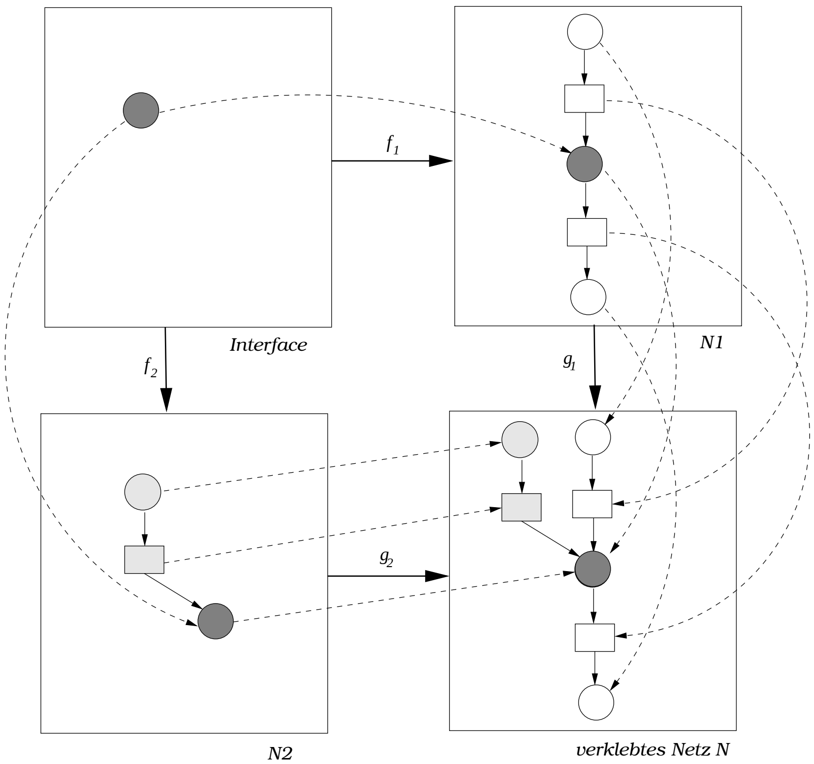


Abbildung 5.3: Beispiel einer Pushout-Konstruktion in **PT**

Abbildung 5.4 zeigt ein konkretes Beispiel zur Komposition des Leser-Schreiber-Systems aus den beiden Teilnetzen *Leser* und *Schreiber*.

Satz 5.14 (Pushouts in PT)
Die Kategorie **PT** hat Pushouts.

Beweis: Gegeben seien $f_1 : N_0 \to N_1$ und $f_2 : N_0 \to N_2$ mit $N_i = (P_i, T_i, pre_i, post_i)$ für $i = 0, 1, 2$ und $f_i = (f_{iT}, f_{iP})$ für $i = 1, 2$.

$$\begin{tikzcd} N_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & N_1 \arrow[d, "g_1"] \\ N_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_3 \end{tikzcd}$$

- **Konstruktion**
Dann läßt sich das Pushout N_3 mit $g_1 : N_1 \to N_3$ und $g_2 : N_2 \to N_3$ komponentenweise konstruieren. D. h. $N_3 = (P_3, T_3, pre_3, post_3)$, wobei $T_3 = T_1 +_{T_0} T_2$ mit g_{1T} und g_{2T} und $P_3 = P_1 +_{P_0} P_2$ mit g_{1P} und g_{2P} Pushouts in **Set** sind.
Die Pushoutmorphismen $g_1 : N_1 \to N_3$ und $g_2 : N_2 \to N_3$ sind durch die Pushoutmorphismen in **Set** gegeben: $g_1 = (g_{1T}, g_{1P})$ und $g_2 = (g_{2T}, g_{2P})$.
Im Folgenden definieren wir die Abbildungen pre_3 und $post_3$.

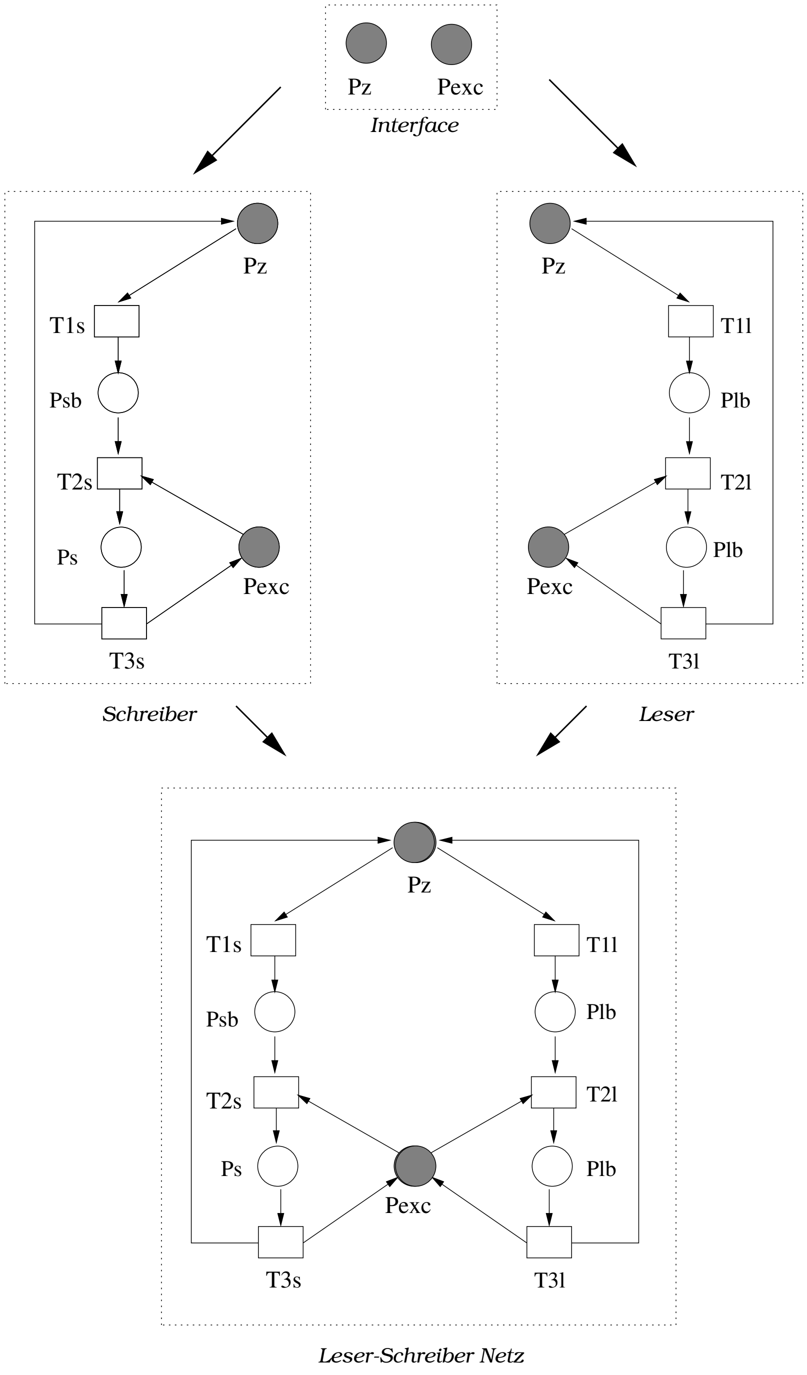


Abbildung 5.4: Das Leser-Schreiber-System als Pushout

Dafür zeigen wir zuerst, daß für die Abbildungen $l_1 := g_{1P}^{\oplus} \circ pre_1$ und $l_2 := g_{2P}^{\oplus} \circ pre_2$ gilt $l_2 \circ f_{2T} = l_1 \circ f_{1T}$, um die universelle Eigenschaft des Pushouts T_3 anwenden zu können.

$$
\begin{aligned}
l_1 \circ f_{1T} &= g_{1P}^{\oplus} \circ pre_1 \circ f_{1T} \\
&= g_{1P}^{\oplus} \circ f_{1P}^{\oplus} \circ pre_0 && \text{da } f_1 \text{ Morphismus} \\
&= g_{2P}^{\oplus} \circ f_{2P}^{\oplus} \circ pre_0 && \text{da } (P_3, g_{1P}, g_{2P}) \text{ Pushout} \\
&= g_{2P}^{\oplus} \circ pre_2 \circ f_{2T} && \text{da } f_2 \text{Morphismus} \\
&= l_2 \circ f_{2T}
\end{aligned}
$$

Wegen der universellen Eigenschaft des Pushouts (T_3, g_{1T}, g_{2T}) bezüglich $P_3^{\oplus}$ und den Morphismen l_1 und l_2 können wir $pre_3 : T_3 \to P_3^{\oplus}$ als den eindeutig bestimmten Morphismus definieren, für den gilt

$$pre_3 \circ g_{1T} = l_1 \tag{4}$$

$$pre_3 \circ g_{2T} = l_2 \tag{5}$$

Wir verfahren analog und definieren $post_3$ als den eindeutig bestimmten Morphismus für den gilt

$$post_3 \circ g_{1T} = g_{1P}^{\oplus} \circ post_1 \tag{6}$$

$$post_3 \circ g_{2T} = g_{2P}^{\oplus} \circ post_2 \tag{7}$$

g_1 und g_2 sind als S/T-Netz-Morphismen wohldefiniert:
folgt aus den Gleichungen (4) und (6) für g_1 und aus den Gleichungen (5) und (7) für g_2.

$$
\begin{tikzcd}
 & T_0 \arrow[rr, shift left, "pre_0"] \arrow[rr, shift right, "post_0"'] \arrow[dr, "f_{1T}"] \arrow[ddl, "f_{2T}"'] & & P_0^{\oplus} \arrow[dr, "f_{1P}^{\oplus}"] \arrow[ddl, "f_{2P}^{\oplus}"'] & \\
 & & T_1 \arrow[rr, shift left, "pre_1"] \arrow[rr, shift right, "post_1"'] \arrow[ddl, "g_{1T}"'] & & P_1^{\oplus} \arrow[ddl, "g_{1P}^{\oplus}"] \\
T_2 \arrow[rr, shift left, "pre_2"] \arrow[rr, shift right, "post_2"'] \arrow[dr, "g_{2T}"'] & & P_2^{\oplus} \arrow[dr, "g_{2P}^{\oplus}"] & & \\
 & T_3 \arrow[rr, shift left, "pre_3"] \arrow[rr, shift right, "post_3"'] & & P_3^{\oplus} &
\end{tikzcd}
$$

- **(N_3, g_1, g_2) ist ein Pushout:**

  1. Kommutativität: $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$ (das Diagramm (1) kommutiert)
     Infolge der Kommutativität der Pushoutdiagramme $(1T)$ und $(1P)$ gilt:

     $$
     \begin{aligned}
     (g_{1P}^{\oplus} \circ f_{1P}^{\oplus}, g_{1T} \circ f_{1T}) &= (g_{2P}^{\oplus} \circ f_{2P}^{\oplus}, g_{2T} \circ f_{2T}) \\
     \Rightarrow \quad g_1 \circ f_1 &= g_2 \circ f_2
     \end{aligned}
     $$

  2. Universelle Eigenschaft:
     Gegeben sei $N = (P, T, pre, post)$ mit $g_1' : N_1 \to N$ und $g_2' : N_2 \to N$ so daß

$g_1' \circ f_1 = g_2' \circ f_2$, also

$$\begin{tikzcd}
N_0 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & N_1 \arrow[d, "g_1"] \arrow[dr, bend left, "g_1'"] & \\
N_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[drr, bend right, "g_2'"'] & N_3 \arrow[dr, "g"] \arrow[r, phantom, "(2)"] \arrow[d, phantom, "(3)"] & \\
 & & N
\end{tikzcd}$$

dann gibt es die eindeutigen Morphismen g_T und g_P wegen der universellen Eigenschaft der Pushouts (T_3, g_{1T}, g_{2T}) und (P_3, g_{1P}, g_{2P}) in **Set**.

$$\begin{tikzcd}
T_0 \arrow[r] \arrow[d] & T_1 \arrow[d, "g_{1T}"] \arrow[dr, bend left, "g_{1T}'"] \arrow[dl, phantom, "(1T)"] & \\
T_2 \arrow[r, "g_{2T}"] \arrow[drr, bend right, "g_{2T}'"'] & T_3 \arrow[dr, "g_T"] \arrow[r, phantom, "(2T)"] \arrow[d, phantom, "(3T)"] & \\
 & & T
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
P_0 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[d, "g_{1P}"] \arrow[dr, bend left, "g_{1P}'"] \arrow[dl, phantom, "(1P)"] & \\
P_2 \arrow[r, "g_{2P}"] \arrow[drr, bend right, "g_{2P}'"'] & P_3 \arrow[dr, "g_P"] \arrow[r, phantom, "(2P)"] \arrow[d, phantom, "(3P)"] & \\
 & & P
\end{tikzcd}$$

g_T ist dabei eindeutiger Morphismus, der die Diagramme $(2T)$ und $(3T)$ zu kommutieren bringt. Analoges gilt für g_P.
Wir definieren $g := (g_P, g_T)$. Es gilt

$$g \circ g_1 = (g_P \circ g_{1P}, g_T \circ g_{1T}) = (g_{1P}', g_{1T}') = g_1',$$

also die Kommutativität des Diagramms (2). Analog gilt $g \circ g_2 = g_2'$.
Also kommutiert (3).
Es bleibt die Wohldefiniertheit von g zu zeigen, d. h.

$$g_P^{\oplus} \circ pre_3 = pre \circ g_T \text{ und } g_P^{\oplus} \circ post_3 = post \circ g_T:$$

Laut Konstruktion von T_3 als Pushout in **Set** (vgl. Satz 5.11) gilt für alle $t_x \in T_3$:

$$\exists t \in T_1 : t_x = [(t,1)] \text{ oder } \exists t \in T_2 : t_x = [(t,2)]$$

Für alle $[(t,1)] \in T_3$ gilt:

$$\begin{array}{lll}
pre \circ g_T([(t,1)]) & = pre \circ g_T \circ g_{1T}(t) & \text{wg. Konstruktion von } T_3 \\
 & = pre \circ g_{1T}'(t) & \text{wg. Kommutativität von } (2T) \\
 & = g_{1P}^{\oplus} \circ pre_1(t) & \text{da } g_1 \text{ Morphismus} \\
 & = g_P^{\oplus} \circ g_{1P}^{\oplus} \circ pre_1(t) & \text{wg. Kommutativität von } (2P) \\
 & = g_P^{\oplus} \circ pre_3 \circ g_{1T}(t) & \text{da } g_1 \text{ Morphismus} \\
 & = g_P^{\oplus} \circ pre_3([(t,1)]) & \text{wg. Konstruktion von } T_3
\end{array}$$

Analog kann man zeigen, daß $\forall [(t,2)] \in T_3 : pre \circ g_T([(t,2)]) = g_P^{\oplus} \circ pre_3([(t,2)])$
Also gilt insgesamt $g_T \circ pre_3 = pre \circ g_T$.
Analog gilt für den Nachbereich $g_T \circ post_3 = post \circ g_T$. Das heißt, daß $g = (g_P, g_T)$ ein **PT**-Morphismus ist. Seine Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit von g_P

und g_T in **Set**.

$\square$

Im Satz 5.11 haben wir eine explizite Kontruktion für Pushouts in **Set** angegeben, die in den Beweis des obigen Satzes einging. Daß die Konstruktion allerdings nicht wesentlich ist, sagt der folgende Satz. Beachte, daß die folgenden Aussagen in beliebigen Kategorien gelten, d. h. nicht nur in **Set** und **PT**.

Satz 5.15 (Isomorphie von Pushouts)

1. Es seien (P, f, g) und (P', f', g') zwei Pushouts von $C \overset{m}{\leftarrow} A \overset{l}{\rightarrow} B$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$. Dann gilt: $P \cong P'$ und:

2. Sei (P, f, g) Pushout von $B \overset{l}{\leftarrow} A \overset{m}{\rightarrow} C$ und $P \cong P'$, dann ist P' auch Pushout-Objekt von A.

Beweis:

1.
$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "l"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "(PO)"] & B \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, bend left, "f'"] & \\
C \arrow[r, "g"'] \arrow[drr, bend right, "g'"'] & P \arrow[dr, dotted, bend left, "h"] & \\
& & P' \arrow[ul, dotted, bend left, "h'"]
\end{tikzcd}
$$

   Da $f \circ l = g \circ m$ und (P', f', g') Pushout, gibt es einen eindeutigen Morphismus $h' : P' \to P$, so daß $h' \circ f' = f$ und $h' \circ g' = g$. Ebenso $\exists! h : P \to P'$, so daß $h \circ f = f'$ und $h \circ g = g'$.
$$h \circ h' \circ g' = h \circ g = g' \tag{1}$$
$$h' \circ h \circ g = h' \circ g' = g \tag{2}$$
   Wir wenden die universelle Eigenschaft des Pushouts (P, f, g) bezüglich sich selber an und erhalten $\exists! i : P \to P \in Mor_C$ mit der Eigenschaft: $i \circ g = g$ und $i \circ f = f$. Da die Identität id_P und der Morphismus $h' \circ h$ (siehe Gleichung (1)) diese Eigenschaft erfüllen, folgt daraus $h' \circ h = id_P$. Analog erhält man: $h \circ h' = id_{P'}$. Also sind h und h' Isomorphismen und P und P' sind isomorph zueinander.

2. Es sei P' ein zum Pushoutobjekt P isomorphes Objekt. Dann gibt es zwei Isomorphismen $h : P \to P'$ und $h^{-1} : P' \to P$, so daß $h \circ h^{-1} = id_{P'}$ und $h^{-1} \circ h = id_P$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "l"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "(PO)"] & B \arrow[d, "f"] \arrow[ddr, "f'"] \arrow[dddrr, bend left, "f''"] & & \\
C \arrow[r, "g"] \arrow[drr, "g'"] \arrow[ddrrr, bend right, "g''"'] & P \arrow[dr, dotted, bend left, "h"] & & \\
& & P' \arrow[ul, dotted, bend left, "h^{-1}"] & \\
& & & P''
\end{tikzcd}$$

Es seien $f' = h \circ f$ und $g' = h \circ g$. Wir zeigen nun daß (P', f', g') Pushout der Morphismen m und l ist.

Kommutativität: $f' \circ l = h \circ f \circ l = h \circ g \circ m = g' \circ m$.

Universelle Eigenschaft: Es seien P'', $f'' : B \to P''$, $g'' : C \to P''$, so daß $f'' \circ l = g'' \circ m$. Zu zeigen ist, daß es genau einen Morphismus $x : P' \to P''$ gibt, für den gilt: $x \circ f' = f''$ und $x \circ g' = g''$

Infolge der Pushout-Eigenschaft von P gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $h'' : P \to P''$, so daß $h'' \circ f = f''$ und $h'' \circ g = g''$.

Es sei $x : P' \to P''$ so daß $x := h'' \circ h^{-1}$. Nun gilt:

$$x \circ f' = x \circ h \circ f = h'' \circ f = f'' \text{ und}$$
$$x \circ g' = x \circ h \circ g = h'' \circ g = g'',$$

Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit von x. Es sei x' mit der Eigenschaft $x' \circ f' = f''$ und $x' \circ g' = g''$. Dann gilt: $x' \circ h \circ f = f''$ und $x' \circ h \circ g = g''$.

Infolge der Pushout-Eigenschaft von (P, f, g) gilt: $x' \circ h = h'' = x \circ h$. Also:

$$x' = x' \circ id_{P'} = x' \circ h \circ h^{-1} = x \circ h \circ h^{-1} = x \circ id_{P'} = x$$

□

Satz 5.16 (Komposition und Dekomposition von Pushouts)

Gegeben seien die folgenden Diagramme (1) und (2) in $\mathcal{C}$, dann gilt:

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & A_3 \arrow[d, "h_3"] \\
B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3
\end{tikzcd}$$

1. Falls (1) und (2) Pushout-Diagramme sind, dann ist auch das zusammengesetzte Diagramm $(1) + (2)$ Pushout-Diagramm.
2. Falls $(1) + (2)$ und (1) Pushout-Diagramme sind und (2) kommutiert, dann ist auch (2) Pushout-Diagramm.

Beweis:

1. Es ist zu zeigen, daß B_3 mit Morphismen $g_2 \circ g_1$ und h_3 Pushout von $f_2 \circ f_1$ und h_1 ist. Die Kommutativität folgt unmittelbar:
   $$h_3 \circ (f_2 \circ f_1) \overset{(2)}{=} g_2 \circ h_2 \circ f_1 \overset{(1)}{=} g_2 \circ g_1 \circ h_1$$
   Die universelle Eigenschaft kann man folgendermaßen zeigen. Seien B_3', $k_1 : B_1 \to B_3'$ und $f_3 : A_3 \to B_3'$ mit $f_3 \circ f_2 \circ f_1 = k_1 \circ h_1$ gegeben. Dann existiert wegen Pushouteigenschaft von (1) genau ein $k_2 : B_2 \to B_3'$ mit $k_2 \circ g_1 = k_1$ und $k_2 \circ h_2 = f_3 \circ f_2$. Damit folgt aus der Pushouteigenschaft von (2) genau ein $k_3 : B_3 \to B_3'$ mit $k_3 \circ h_3 = f_3$ und $k_3 \circ g_2 = k_2$. Damit gilt auch $k_3 \circ g_2 \circ g_1 = k_2 \circ g_1 = k_1$ und $k_3 \circ h_3 = f_3$. Die Eindeutigkeit von k_3 mit dieser Eigenschaft folgt aus der Eindeutigkeit von k_3 bzgl. Diagramm (2) und der Eindeutigkeit von k_2 bzgl. (1)

2. Wir zeigen, daß B_3 mit den Morphismen g_2 und h_3 Pushout von f_2 und h_2 ist. Die Kommutativität des Diagramms (2) gilt laut Voraussetzung. Gegeben seien B_3', $k_1 : A_3 \to B_3'$ und $k_2 : B_2 \to B_3'$ mit
   $$k_1 \circ f_2 = k_2 \circ h_2 \tag{3}$$
   Es gilt
   $$k_2 \circ g_1 \circ h_1 \overset{(1)}{=} k_2 \circ h_2 \circ f_1 \overset{(3)}{=} k_1 \circ f_2 \circ f_1 \tag{4}$$
   Dann existiert wegen der Pushouteigenschaft von (1) + (2) genau ein Morphismus $k_3 : B_3 \to B_3'$ mit
   $$k_3 \circ g_2 \circ g_1 = k_2 \circ g_1 \tag{5}$$
   $$\text{und } k_3 \circ h_3 = k_1 \tag{6}$$
   Ferner folgt aus (4) wegen der universellen Eigenschaft des Pushouts (1), daß
   $$\exists! k_{2x} : B_2 \to B_3' \text{ mit } k_{2x} \circ g_1 = k_2 \circ g_1 \text{ und } k_{2x} \circ h_2 = k_1 \circ f_2.$$
   Aus der Eindeutigkeit von k_{2x} folgt dann $k_{2x} = k_2$.
   Infolge von Gleichung (4) und da $k_3 \circ g_2 \circ h_2 \overset{(2)}{=} k_3 \circ h_3 \circ f_2 \overset{(3)}{=} k_1 \circ f_2$, erfüllt auch $k_3 \circ g_2$ die Eigenschaften von k_{2x}, und damit gilt: $k_3 \circ g_2 = k_2 (= k_{2x})$ und $k_1 = k_3 \circ h_3$ (laut (6)). Die Eindeutigkeit von k_3 mit dieser Eigenschaft folgt aus der Eindeutigkeit von k_3 bzgl. Diagramm (1) + (2). (da für alle $k_3' : B_3 \to B_3'$ mit $k_3' \circ h_3 = k_1$ und $k_3' \circ g_2 = k_2$ gilt $k_3' \circ h_3 = k_1$ und $k_3' \circ g_2 \circ g_1 = k_2 \circ g_1$)

□

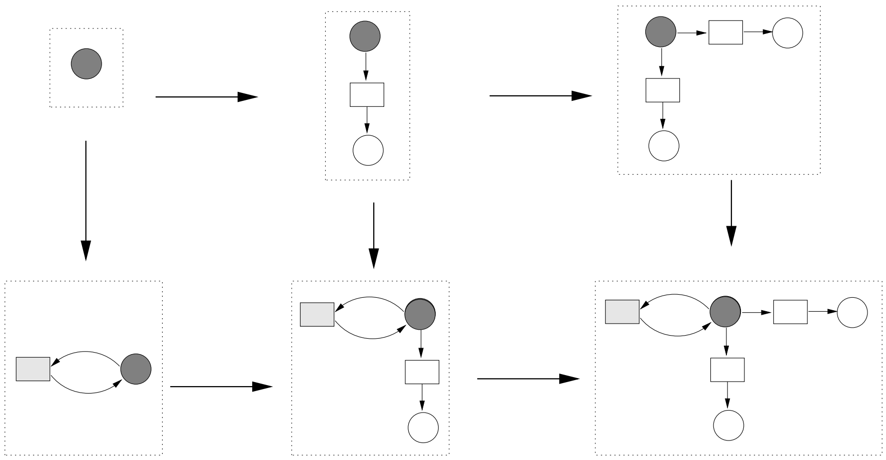


Abbildung 5.5: Beispiel: Kompositionalität von Union

Abbildung 5.5 zeigt das Prinzip zweier komponierter Union-Operationen auf S/T-Netzen über Pushout-Komposition.

5.2 Strukturierung von S/T-Netzen durch Fusion

Als letzte Konstruktion wenden wir uns der Fusion zu, d. h. dem Verkleben innerhalb eines Netzes. Die kategorielle Konstruktion für die Fusion ist der Koegalisator.

Definition 5.17 (Koegalisator)
Ein Objekt $C \in Ob_{\mathcal{C}}$ zusammen mit einem Morphismus $c : B \to C$ heißt *Koegalisator* von $f, g : A \to B$, falls $c \circ f = c \circ g$ gilt, und für alle $\mathcal{C}$ – Morphismen $d : B \to D$ mit $d \circ f = d \circ g$ genau ein $\mathcal{C}$ – Morphismus $h : C \to D$ mit $h \circ c = d$ existiert.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[rr, "d"] \arrow[dr, "c"'] & & D \\ & & C \arrow[ur, dotted, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Satz 5.18 (Koegalisator in Set)
Den Koegalisator (C, c) von $f, g : A \to B$ erhält man als Quotienten

$$C = B/_{E^*}$$

mit natürlicher Abbildung $c : B \to C$, wobei die Relation $E = \{(f(a), g(a)) \mid a \in A\}$ die Äquivalenzrelation E^* erzeugt.

Beweis: Wir haben

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & A_2 \arrow[r, "c"] & A_3/_{E^*} \end{tikzcd}$$

mit $E = \{(f(a), g(a)) | a \in A_1\}$,und $E^* = t(s(r(E)))$ dem transitiven, symmetrischen und reflexiven Abschluß.
Es ist $c : A_2 \to A_3$ mit $c(a) = [a]_{E^*}$ dann gilt für alle $a \in A_1$
$c \circ f(a) = [f(a)]_{E^*} = [g(a)]_{E^*} = c \circ g(a)$
Sei $h : A_2 \to A$ gegeben mit $h \circ f = h \circ g$ (1)
Sei $k : A_3 \to A$ mit $k([a]) = h(a)$ ($a \in A_2$ laut Def. von h)

- Wohldefiniertheit
  $[a_1]_{E^*} = [a_2]_{E^*}$ (z.Z. $h(a_1) = h(a_2)$)
  Strukturelle Induktion über $E^* = t(s(r(E)))$ dem transitiven, symmetrischen und reflexiven Abschluß:

  1. $(a_1, a_2) \in E$ (bzw. $(a_2, a_1) \in E$ analog) $\Leftrightarrow$
     $\exists a \in A_1 : f(a) = a_1$ und $g(a) = a_2 \Rightarrow$
     $h(a_1) = h(f(a)) \overset{(1)}{=} h(g(a)) = h(a_2)$
  2. $(a_1, a_2) \in r(E) \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in E$ (siehe 1.)
     oder $a_1 = a_2 \Rightarrow h(a_1) = h(a_2)$
  3. $(a_1, a_2) \in s(r(E)) \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in r(E)$ (siehe 2.)
     oder $\exists (a_1, a_2) \in r(E)$ siehe 2.
  4. Induktion über transitiven Abschluß[1]
     Induktionsverankerung: $n = 1 : (a_1, a_2) \in s(r(E))^1 = s(r(E))$ (siehe 3.)
     Induktionsannahme: Für $(a_1, a_2) \in S^n$ sei gezeigt $h(a_1) = h(a_2)$
     Induktionsschritt: Sei $(a_1, a_2) \in S^{n+1} \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in S^n$
     Aus der Induktionsannahme folgt $h(a_1) = h(a_2)$
     oder $\exists (a_1, a_2), (a_2, a_3) \in S^n \Rightarrow h(a_1) = h(a_3) = h(a_2)$

- Kommutativität
  $k \circ c(a) = k([a]_{E^*}) = h(a)$

- Eindeutigkeit
  Sei $k' : A_3 \to A$ mit $k' \circ c = h$, $\forall [a]_{R^*} \in A$ gilt:
  $k'([a]_{E^*}) = k'(c(a)) = h(a) = k([a]_{E^*})$
  $\Rightarrow k' = k$

□

Satz 5.19 (Koegalisator in PT)
Die Kategorie **PT** hat Koegalisatoren.

[1]definiert durch $t(S) = \bigcup_{i \in I} S^i$ mit $S^i = S^{i-1} \cup \{(x, y) | \exists (x, z), (z, y) \in S^{i-1}\}$ und $S^1 = S$

Beweis: Gegeben seien $f, g : N_1 \to N_2$, $N_i = (P_i, T_i, pre_i, post_i)$ für $i = 1, 2$.

$$\begin{tikzcd} N_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & N_2 \arrow[r, "c"] & N_3 \end{tikzcd}$$

- Konstruktion: Dann lassen sich das Netz $N_3 = (P_3, T_3, pre_3, post_3)$ und der Koegalisator $c : N_2 \to N_3$ folgendermaßen (analog zu dem Koegalisator in **Set**) definieren:
  $P_3 := P_2/_{E_P}$ und $T_3 := T_2/_{E_T}$, wobei
  $E_P = \{(f_P(p), g_P(p)) | p \in P_1\}, E_T = \{(f_T(t), g_T(t)) | t \in T_1\}$,
  $c_T(t) := [t]_{E_T}$ $c_P(p) := [p]_{E_P}$
  $pre_3([t]) := c_P^{\oplus}(pre_2(t))$ und $post_3([t]) := c_P^{\oplus}(pre_2(t))$
  c ist wohldefiniert infolge der Definitionen von pre_3 und $post_3$.
  $c \circ f = (c_P \circ f_P, c_T \circ f_T) = (c_P \circ g_P, c_T \circ g_T) = c \circ g$, da c_P und c_T Koegalisatoren von g_P, f_P und g_T, f_T in **Set** sind.

- Universelle Eigenschaft:
  Es seien das Netz N_4 und $d : N_2 \to N_4$ mit $d \circ f = d \circ g$. Dann existiert (da c_T und c_P Koegalisatoren in **Set** sind) genau ein Morphismus $h_T : T_3 \to T_4$ mit $h_T \circ c_T = d_T$ und genau ein Morphismus $h_P : P_3 \to P_4$ mit $h_P \circ c_P = d_P$. $h := (h_P, h_T) \in Mor_{\mathbf{PT}}$, da
  $h_P^{\oplus} \circ pre_3([t]) \overset{def.pre_3}{=} h_P^{\oplus} \circ c_P^{\oplus} \circ pre_2(t) = d_P^{\oplus}(pre_2(t)) \overset{d \in Mor_{\mathbf{PT}}}{=} pre_4(d_T(t))$
  $= pre_4 \circ h_T \circ c_T(t) = pre_4 \circ h_T([t])$ und analog für *post*. Es gilt $h \circ c = d$. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Morphismen h_P und h_T in **Set**. ($\forall h' = (h'_T, h'_P) \in Mor_{\mathbf{PT}}$ mit $h' \circ c = d$ gilt $h'_T \circ c_T = d_T$ und $h'_P \circ c_P = d_P$).

$\square$

Definition 5.20 (Fusion)
Die Fusion eines Netzes N bezüglich eines Netzes F, das über zwei Morphismen in N eingebettet ist ($f, g : F \to N$), ist durch den Koegalisator $c : N \to N'$ gegeben, und wird mit $N \overset{F}{\circ\!\!\longrightarrow} N'$ bezeichnet.

Beispiel 5.21
Ein Beispiel von Fusion ist in Abbildung 5.6 gezeigt. Von dem linken Netz N_1 gehen zwei **PT**-Morphismen f und g in das Netz N_2. Der **PT**- Morphismus f (genauer die f_P-Komponente) ist durchgezogen dargestellt, g gestrichelt. Die f_T und g_T-Komponenten sind jeweils durch die leere Abbildung gegeben, da N_1 keine Transitionen enthält.
N_1 wird durch f und g verschieden in N_2 eingebettet. Die Fusion identifiziert die beiden unterschiedlichen Bilder, indem die Stellen miteinander verklebt werden in N_3.

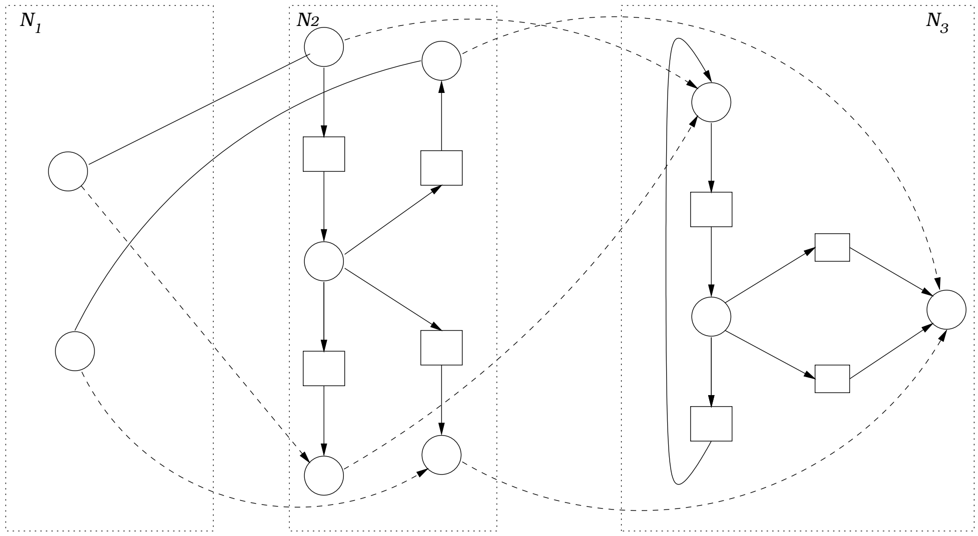


Abbildung 5.6: Beispiel: Fusion

Satz 5.22 (Kompositionalität von Union und Fusion)
Gegeben sei die Union $N_1, N_2 \overset{N_0}{\rightarrowtail} N_3$ und die Fusion $N_i \circ\!\xrightarrow{F_i} N_i'$, $i = 0, 1, 2$, so daß in der folgenden Abbildung die Diagramme (1) und (2) kommutieren.

$$
\begin{tikzcd}
 & F_1 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & & N_1 \\
F_0 \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & N_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & F_2 \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] \arrow[ur, phantom, "(2)"] & & N_2
\end{tikzcd}
$$

Dann gilt

$$N_3 \circ\!\xrightarrow{F_3} N_3' \cong N_1' +_{N_0'} N_2',$$

wobei $F_3 = F_1 +_{F_0} F_2$ und $N_i \circ\!\xrightarrow{F_i} N_i'$ für $i = 0, 1, 2, 3$.

Beweis:
Wir bezeichnen im Folgenden das Ergebnis N' der Fusion $N \circ\!\xrightarrow{F} N'$ auch mit $F \div N$.
Zu zeigen ist

$$(F_1 \div N_1) +_{(F_0 \div N_0)} (F_2 \div N_2) \cong (F_1 +_{F_0} F_2) \div (N_1 +_{N_0} N_2)$$

Dazu führen wir folgende Schritte durch:

1. Konstruktion von $(F_1 \div N_1) +_{(F_0 \div N_0)} (F_2 \div N_2) = N_3$

2. Konstruktion des Koegalisator-Diagramms K_3 $(N_3 \circ\!\xrightarrow{F_3} N_3')$

   (a) Konstruktion von $F_3 = F_1 +_{F_0} F_2$
   $N_3 = N_1 +_{N_0} N_2$

   (b) Konstruktion $F_3 \overset{f_3}{\underset{f_3'}{\rightrightarrows}} N_3$

3. N_3' ist Koegalisator von K_3

   (a) Konstruktion vom Koegalisator-Morphismus $N_3 \overset{f_3'}{\to} N_3''$

   (b) Kommutativität

   (c) Universeller Morphismus N_3' bzgl. K_3, $\hat{f}_3 : N_3' \to N_3''$
   (3ci) Universelle Morphismen für K_1, K_2
   (3cii) Konstrukion von $\hat{f}_3$ als universellem PO-Morphismus

   (d) Kommutativität universeller Morphismen

   (e) Eindeutigkeit

4. Isomorphie von Kolimiten

$$
\begin{tikzcd}
 & & F_1 \arrow[rr, shift left, "f_1"] \arrow[rr, shift right, "f_1'"'] \arrow[drrr, "h_1"] & & N_1 \arrow[rr, "f_1''"] \arrow[drrr, "h_1'"] & & N_1' \arrow[drr, "h_1''"] & & \\
F_0 \arrow[urr, "g_1"] \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_0'"'] \arrow[drr, "g_2"'] \arrow[ur, phantom, "(=)"] \arrow[dr, phantom, "(=)"] & N_0 \arrow[urrr, "g_1'"] \arrow[rr, "f_0''"] \arrow[drrr, "g_2'"'] & & N_0' \arrow[urrr, "g_1''"] \arrow[drrr, "g_2''"'] & & F_3 \arrow[rr, shift left, "f_3"] \arrow[rr, shift right, "f_3'"'] & & N_3 \arrow[r, "f_3''"] & N_3' \\
 & & F_2 \arrow[urrr, "h_2"] \arrow[rr, shift left, "f_2"] \arrow[rr, shift right, "f_2'"'] & & N_2 \arrow[urrr, "h_2'"] \arrow[rr, "f_2''"'] & & N_2' \arrow[urr, "h_2''"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Wir führen nun die Schritte 1-4 aus:

Gegeben:

$$
\begin{tikzcd}
 & & F_1 \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_1'"'] & N_1 \\
F_0 \arrow[urr, "g_1"] \arrow[drr, "g_2"'] \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_0'"'] & N_0 \arrow[urr, "g_1'"'] \arrow[drr, "g_2'"] \arrow[u, phantom, "(=)"] \arrow[d, phantom, "(=)"] & & \\
 & & F_2 \arrow[r, shift left, "f_2"] \arrow[r, shift right, "f_2'"'] & N_2
\end{tikzcd}
$$

1. Dann ist wegen Koegalisator $K_0 - K_2$ (mit $K_i := F_i \div N_i$)

$$
\begin{tikzcd}
 & & F_1 \arrow[rr, shift left, "f_1"] \arrow[rr, shift right, "f_1'"'] & & N_1 \arrow[r, "f_1''"] & N_1' \arrow[dr, "h_1''"] & \\
F_0 \arrow[urr, "g_1"] \arrow[drr, "g_2"'] \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_0'"'] & N_0 \arrow[urrr, "g_1'"] \arrow[drrr, "g_2'"'] \arrow[rr, "f_0''"] \arrow[ur, phantom, "(1)"] \arrow[dr, phantom, "(2)"'] & & N_0' \arrow[urr, "g_1''"] \arrow[drr, "g_2''"'] \arrow[u, phantom, "(3)"] \arrow[d, phantom, "(4)"] & & (PO') & N_3' \\
 & & F_2 \arrow[rr, shift left, "f_2"] \arrow[rr, shift right, "f_2'"'] & & N_2 \arrow[r, "f_2''"'] & N_2' \arrow[ur, "h_2''"'] &
\end{tikzcd}
$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
f_1'' \circ g_1' \circ f_0 &= f_1'' \circ f_1 \circ g_1 && \text{wegen (1)} \\
&= f_1'' \circ f_1' \circ g_1 && \text{wegen Koegalisator } K_1 \\
&= f_1'' \circ g_1' \circ f_0' && \text{wegen (1)}
\end{aligned}
$$

Also gibt es einen universellen Morphismus $g_1'' : N_0' \to N_1'$ zu K_0 so daß (3) kommutiert. Analog gibt es einen universellen Morphismus $g_2'' : N_0' \to N_2'$ zu K_0 so daß Diagramm (4) kommutiert. Nun können wir das Pushout (PO') bilden. Also:
$N_3' = (F_1 \div N_1) +_{(F_0 \div N_0)} (F_2 \div N_2)$

2. Andererseits gilt PO_F ist $F_3 = F_1 +_{F_0} F_2$ und PO_N ist $N_3 = N_1 +_{N_0} N_2$

(a)

$$\begin{tikzcd}
 & & F_1 \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_1'"'] \arrow[drr, "h_1" near end] & N_1 \arrow[drr, "h_1'"] & & \\
F_0 \arrow[urr, "g_1"] \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_0'"'] \arrow[drr, "g_2"'] & N_0 \arrow[urr, "g_1'" near start] \arrow[drr, "g_2'"' near start] \arrow[u, phantom, "(1)"] \arrow[d, phantom, "(2)"] & & & F_3 & N_3 \\
 & & F_2 \arrow[r, shift left, "f_2"] \arrow[r, shift right, "f_2'"'] \arrow[urr, "h_2" near end] & N_2 \arrow[urr, "h_2'"] & &
\end{tikzcd}$$

(b) dann gilt

$$\begin{aligned}
h_1' \circ (f_1 \circ g_1) &= h_1' \circ g_1' \circ f_0 && \text{wegen (1)}\\
&= h_2' \circ g_2' \circ f_0 && \text{wegen } PO_N\\
&= h_2' \circ (f_2 \circ g_2) && \text{wegen (2)}
\end{aligned}$$

also existiert bezüglich PO_F ein universeller Morphismus $f_3 : F_3 \to N_3$ mit $f_3 \circ h_1 = h_1' \circ f_1$ $(3a)$ $f_3 \circ h_2 = h_2' \circ f_1$ $(4a)$, analog existiert $f_3' : F_3 \to N_3$ mit $f_3' \circ h_1 = h_1' \circ f_1'$ $(3b)$, $f_3' \circ h_2 = h_2' \circ f_2'$ $(4b)$

$$\begin{tikzcd}
 & & F_1 \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_1'"'] \arrow[drr, "h_1" near end] & N_1 \arrow[rr, "f_1''"] \arrow[drr, "h_1'"] & & N_1' \arrow[dr, "h_1''"] & \\
F_0 \arrow[urr, "g_1"] \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_0'"'] \arrow[drr, "g_2"'] & N_0 \arrow[urr, "g_1'" near start] \arrow[drr, "g_2'"' near start] & & & F_3 \arrow[rr, shift left, "f_3"] \arrow[rr, shift right, "f_3'"'] & & N_3 \arrow[r, "f_3''"] \arrow[u, phantom, "(5)"] \arrow[d, phantom, "(6)"] & N_3' \\
 & & F_2 \arrow[r, shift left, "f_2"] \arrow[r, shift right, "f_2'"'] \arrow[urr, "h_2" near end] & N_2 \arrow[rr, "f_2''"'] \arrow[urrr, "h_2'"] & & N_2' \arrow[ur, "h_2''"'] &
\end{tikzcd}$$

3. Z.z. N_3' ist Koegalisator K_3 von $F_3 \rightrightarrows N_3$

(a) Wegen

$$\begin{aligned}
(h_1'' \circ f_1'') \circ g_1' &= h_1'' \circ g_1'' \circ f_0'' && \text{wegen (3)}\\
&= h_2'' \circ g_2'' \circ f_0'' && \text{wegen } PO'\\
&= h_2'' \circ f_2'' \circ g_2' && \text{wegen (4)}
\end{aligned}$$

Also existiert ein universeller Morphismus $f_3'' : N_3 \to N_3'$ so daß die Diagramme (5) und (6) kommutieren.

(b) Kommutativität von $f_3'' \circ f_3 = f_3'' \circ f_3'$

$$\begin{aligned}
(h_2'' \circ f_2'' \circ f_2) \circ g_2 &= h_2'' \circ f_2'' \circ g_2' \circ f_0 && \text{wegen (2)}\\
&= h_2'' \circ g_2'' \circ f_0'' \circ f_0 && \text{wegen (4)}\\
&= h_1'' \circ g_1'' \circ f_0'' \circ f_0 && \text{wegen } PO'\\
&= h_1'' \circ f_1'' \circ g_1' \circ f_0 && \text{wegen (3)}\\
&= (h_1'' \circ f_1'' \circ f_1) \circ g_1 && \text{wegen (1)}
\end{aligned}$$

Also wegen PO_F existiert ein universeller Morphismus
$k : F_3 \to N_3'$ mit $h_2'' \circ f_2'' \circ f_2 = k \circ h_2$
und $h_1'' \circ f_1'' \circ f_1 = k \circ h_1$

Aber auch

$$\left.\begin{aligned}
h_2'' \circ f_2'' \circ f_2 &= f_3'' \circ h_2' \circ f_2 && \text{wegen (6)}\\
&= f_3'' \circ f_3 \circ h_2 && \text{wegen } (4a)\\
\text{und } h_1'' \circ f_1'' \circ f_1 &= f_3'' \circ h_1' \circ f_1 && \text{wegen (5)}\\
&= f_3'' \circ f_3 \circ h_1 && \text{wegen } (3a)
\end{aligned}\right\} \text{wegen Eindeutigkeit } k = f_3'' \circ f_3$$

Und auch:

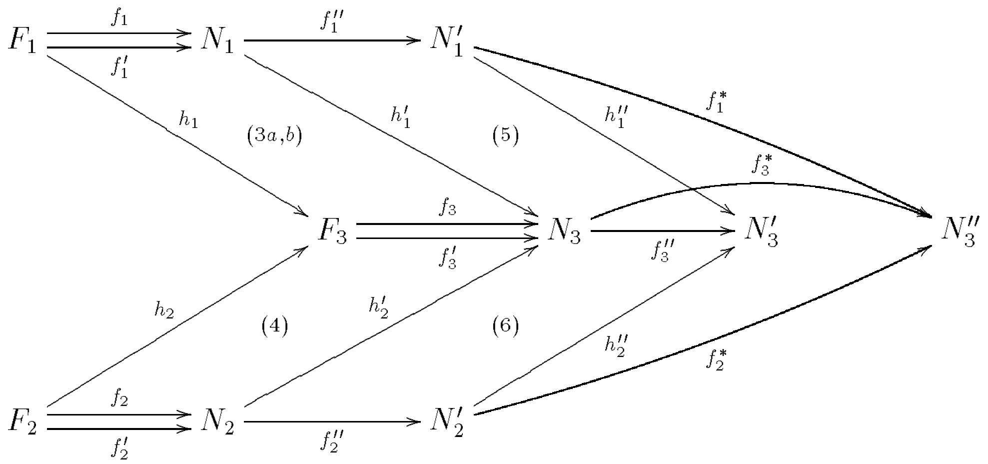
$$\begin{aligned}
h_2'' \circ f_2'' \circ f_2 &= h_2'' \circ f_2'' \circ f_2' && \text{wegen } K_2\\
&= f_3'' \circ h_2' \circ f_2' && \text{wegen (6)}\\
&= f_3'' \circ f_3' \circ h_2 && \text{wegen (4b)}\\
\text{und } h_1'' \circ f_1'' \circ f_1 &= h_1'' \circ f_1'' \circ f_1' && \text{wegen } K_1\\
&= f_3'' \circ h_1' \circ f_1' && \text{wegen (5)}\\
&= f_3'' \circ f_3' \circ h_1 && \text{wegen (3b)}
\end{aligned}$$

Infolge der Eindeutigkeit gilt:

$$f_3'' \circ f_3' = k = f_3'' \circ f_3$$

(c) Universelle Eigenschaft K_3: N_3'
Gegeben sei $f_3^* : N_3 \to N_3''$ mit $f_3^* \circ f_3' = f_3^* \circ f_3$ (7)

Dann ist :



(3ci) mit

$$\begin{aligned}
(f_3^* \circ h_1') \circ f_1 &= f_3^* \circ f_3 \circ h_1 && \text{wegen (3)}\\
&= f_3^* \circ f_3' \circ h_1 && \text{wegen (7)}\\
&= (f_3^* \circ h_1') \circ f_1' && \text{wegen (3)}
\end{aligned}$$

Also wegen K_1 universeller Morphismus existiert eindeutig $f_1^* : N_1' \to N_3''$ mit

$$f_1^* \circ f_1'' = f_3^* \circ h_1' \tag{8}$$

Analog $f_2^* : N_2' \to N_3''$ mit

$$f_2^* \circ f_2'' = f_3^* \circ h_2' \tag{9}$$

(3cii) Nun führen wir die Konstruktion von $\hat{f}_3 : N_3' \to N_3''$ über PO' durch Also:

$$\begin{tikzcd}
 & N_1' \arrow[dr, "h_1''"] \arrow[drr, bend left, "f_1^*"] & & \\
N_0' \arrow[ur, "g_1''"] \arrow[dr, "g_2''"'] & & N_3' & N_3'' \\
 & N_2' \arrow[ur, "h_2''"] \arrow[urr, bend right, "f_2^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & F_1 \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_1'"'] \arrow[dr, "h_1"] & N_1 \arrow[dr, "h_1'"] & & \\
F_0 \arrow[urr, "g_1"] \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_0'"'] & N_0 \arrow[urr, "g_1'"] \arrow[r, "f_0''"] & N_0' \arrow[rrr, bend right, "k"'] & F_3 \arrow[r, shift left, "f_3"] \arrow[r, shift right, "f_3'"'] & N_3 \arrow[r, "f_3^*"] & N_3''
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
(f_3^* \circ h_1' \circ g_1') \circ f_0 &= f_3^* \circ h_1' \circ f_1 \circ g_1 && \text{wegen (1)}\\
&= f_3^* \circ f_3 \circ h_1 \circ g_1 && \text{wegen (3a)}\\
&= f_3^* \circ f_3' \circ h_1 \circ g_1 && \text{wegen (7)}\\
&= f_3^* \circ h_1' \circ f_1' \circ g_1 && \text{wegen (3b)}\\
&= f_3^* \circ h_1' \circ f_1 \circ g_1 && \text{wegen (3ci)}\\
&= (f_3^* \circ h_1' \circ g_1') \circ f_o' && \text{wegen (1)}
\end{aligned}$$

Also $k : N_0' \to N_3''$ universeller Morphismus zu K_0 mit
$k \circ f_0'' = f_3^* \circ h_1' \circ g_1'$

Ferner gilt:

$$\begin{tikzcd}
& & N_1 \arrow[r, "f_1''"] \arrow[drr, "h_1'"] & N_1' \arrow[drr, "f_1^*"] & & \\
N_0 \arrow[urr, "g_1'"] \arrow[r, "f_0''"] \arrow[drr, "g_2'"'] & N_0' \arrow[urr, "g_1''"] \arrow[drr, "g_2''"] & & & N_3 \arrow[r, "f_3^*"] & N_3'' \\
& & N_2 \arrow[r, "f_2''"'] \arrow[urr, "h_2'"] & N_2' \arrow[urr, "f_2^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
f_3^* \circ h_1' \circ g_1' &= f_1^* \circ f_1'' \circ g_1' && \text{wegen } (8) \\
&= f_1^* \circ g_1'' \circ f_0'' && \text{wegen } (3)
\end{aligned}$$

Also $k = f_1^* \circ g_1''$ wegen Eindeutigkeit von k und :

$$\begin{aligned}
f_3^* \circ h_1' \circ g_1' &= f_3^* \circ h_2' \circ g_2' && \text{wegen } PO_N \\
&= f_2^* \circ f_2'' \circ g_2' && \text{wegen } (9) \\
&= f_2^* \circ g_2'' \circ f_0'' && \text{wegen } (4)
\end{aligned}$$

Also $k = f_2^* \circ g_2''$ wegen Eindeutiglkeit von k mit

$$\begin{tikzcd}
F_0 \arrow[r, shift left, "f_0"] \arrow[r, shift right, "f_0'"'] & N_0 \arrow[r, "f_0''"] \arrow[rr, bend left, "f_3^* \circ h_1' \circ g_1'"] & N_0' \arrow[r, "k"] \arrow[r, bend right, "f_1^* \circ g_1''"'] \arrow[r, bend right=70, "f_2^* \circ g_2''"'] & N_3''
\end{tikzcd}$$

Also

$$f_1^* \circ g_1'' = f_2^* \circ g_2'' \tag{10}$$

Wegen (10) und PO': $\exists \hat{f}_3 : N_3' \to N_3''$ mit Kommtativität von (11) und (12):

$$
\begin{tikzcd}
 & & N_1 \arrow[rr, "f_1''"] \arrow[drrr, "h_1'"] & & N_1' \arrow[drr, "h_1''"'] \arrow[drrr, "f_1^*"] \arrow[drrr, phantom, "(11)"'] & & & \\
N_0 \arrow[urr, "g_1'"] \arrow[r, "f_0''"] \arrow[drr, "g_2'"'] & N_0' \arrow[urrr, "g_1''"] \arrow[drrr, "g_2''"'] & & F_3 \arrow[rr, shift left, "f_3"] \arrow[rr, shift right, "f_3'"'] & & N_3 \arrow[r, "f_3''"] \arrow[rr, bend right, "f_3^*"'] & N_3' \arrow[r, "\hat{f}_3"] & N_3'' \\
 & & N_2 \arrow[rr, "f_2''"'] \arrow[urrr, "h_2'"] & & N_2' \arrow[urr, "h_2''"] \arrow[urrr, "f_2^*"'] \arrow[urrr, phantom, "(12)"] & & &
\end{tikzcd}
$$

(d) Z.z. $\hat{f}_3 \circ f_3'' = f_3^*$ und $\hat{f}_3$ eindeutig.

Wegen $f_1^* \circ f_1'' \circ g_1' \;= f_3^* \circ h_1' \circ g_1'$ wegen (8)
$\;= f_3^* \circ h_2' \circ g_2'$ wegen PO_N
$\;= f_2^* \circ f_2'' \circ g_2'$ wegen (9)

ist f_3^* universeller Morphismus zu PO_N
wegen $f_3{}^* \circ h_1' = f_1^* \circ f_1''$ also (8)
und $f_3^* \circ h_2' = f_2^* \circ f_2''$ also (9)

Aber auch:
$(\hat{f}_3 \circ f_3'') \circ h_1' \;= \hat{f}_3 \circ h_1'' \circ f_1''$ wegen (5)
$\;= f_1^* \circ f_1''$ wegen (11)
und $\hat{f}_3 \circ f_3'' \circ h_2' \;= \hat{f}_3 \circ h_2'' \circ f_2''$ wegen (6)
$\;= f_2^* \circ f_2''$ wegen (12)

Also wegen der Eindeutigkeit $\hat{f}_3 \circ f_3'' = f_3^*$

(e) Eindeutigkeit von $\hat{f}_3$ zu K_3

Gegeben $\overline{f}_3 : N_3' \to N_3''$ mit

$$\overline{f}_3 \circ f_3'' = f_3^* \tag{13}$$

$$\begin{tikzcd}
& F_1 \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[r, shift right, "f_1'"'] & N_1 \arrow[r, "f_1''"] \arrow[drr, "h_1'"] & N_1' \arrow[drr, "h_1''"'] \arrow[drrr, "f_1^*"] & & & \\
N_0 \arrow[urr, "g_1'"] \arrow[drr, "g_2'"'] & & & & N_3 \arrow[r, "f_3''"] \arrow[rr, bend right, "f_3^*"'] & N_3' \arrow[r, "\hat{f}_3"] & N_3'' \\
& F_2 \arrow[r, shift left, "f_2"] \arrow[r, shift right, "f_2'"'] & N_2 \arrow[r, "f_2''"'] \arrow[urr, "h_2'"] & N_2' \arrow[urr, "h_2''"] \arrow[urrr, "f_2^*"'] & & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\text{Wegen} \quad f_1^* \circ f_1'' &= f_3^* \circ h_1' && \text{wegen (8)} \\
&= \overline{f}_3 \circ f_3'' \circ h_1' && \text{wegen (13)} \\
&= \overline{f}_3 \circ h_2'' \circ f_1'' && \text{wegen (5)}
\end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit von f_1^* gilt $f_1^* = \overline{f}_3 \circ h_1''$ (14)

Analog mit f_2^* gilt $f_2^* = \overline{f}_3 \circ h_2''$ (15)

Also:

$$\begin{tikzcd}
& N_1' \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "f_1^*"] \arrow[dr, phantom, "(11)"'] & & \\
N_0' \arrow[ur] \arrow[dr] & (PO') & N_3' \arrow[r, shift left, "\hat{f}_3"] \arrow[r, shift right, "\overline{f}_3"'] & N_3'' \\
& N_2' \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "f_2^*"'] \arrow[ur, phantom, "(12)"] & &
\end{tikzcd}$$

Infolge der Eindeutigkeit von PO' und Kommutativität von (11), (12) und der Gleichungen (14), (15), gilt $\overline{f}_3 = \hat{f}_3$, also ist K_3 ein Koegalisator.

$\square$

Kapitel 6

Kategorielle Transitions-Invarianten in Stellen/Transitions-Netzen

In diesem Kapitel führen wir die kategorielle Darstellung von S/T-Netz-Invarianten ein und zeigen, daß diese Charakterisierug den Definitionen von Invarianten für klassische S/T-Netze nach [Rei85a] entspricht. Zunächst werden wir die algebraische Definition von S/T-Netzen erweitern, um paralleles Schalten von Transitionen formalisieren zu können. Es werden dann die T-Invarianten als Egalisator der Vor- und Nachbereichsmorphismen in der Kategorie **CMon** der kommutativen Monoide charakterisiert.
Der Vorteil der kategoriellen Charakterisierung von Invarianten liegt zum einen in der Verallgemeinerung ihrer Konstruktion, bei der die Berechnung über Matrizenmultiplikation nur einer der möglichen Wege ist. Zum anderen wird bei der kategoriell beschriebenen Transformation und Komposition von Netzen eine entsprechende Transformation bzw. Komposition der Invarianten ermöglicht.

6.1 Paralleles Schalten von Transitionen in S/T-Netzen

Als Formalisierung paralleler Schaltschritte in S/T-Netzen bieten sich lineare Summen über der Menge der Transitionen an, wobei der Koeffizient einer Transition angibt, wie oft diese Transition innerhalb des Schaltschritts schaltet. Sowohl der Vorbereich als auch der Nachbereich eines parallelen Schaltschritts kann dann, wie bei einzelnen Transitionen, als Element des kommutativen Monoids $P^{\oplus}$ über der Stellenmenge formalisiert werden, indem die Vor-(Nach-)bereiche der einzelnen Transitionen des Schaltschritts addiert werden. Es wird daher eine Monoidstruktur sowohl für die Stellen als auch für die Transitionen eines S/T-Netzes definiert, wobei Schaltschritte als $v_T \in T^{\oplus}$ formalisiert werden. Die Vor- und Nachbereichsmorphismen $pre^{\oplus}, post^{\oplus} : T^{\oplus} \to P^{\oplus}$ sind die linearen Erweiterungen der S/T-Netz-Morphismen $pre, post : T \to P^{\oplus}$ aus Definition 4.11.

Definition 6.1 (Lineare Erweiterung von *pre* und *post*)
Seien $pre, post : T \to P^{\oplus}$ gegeben. Dann sind die linearen Erweiterungen $pre^{\oplus} : T^{\oplus} \to P^{\oplus}$ und $post^{\oplus} : T^{\oplus} \to P^{\oplus}$ definiert als $pre^{\oplus}(\sum_{t \in T} \lambda t) = \sum_{t \in T} \lambda * pre(t)$, und analog $post^{\oplus}(\sum_{t \in T} \lambda t) = \sum_{t \in T} \lambda * post(t)$.

Bemerkung:
Diese Erweiterung ist aufgrund der freien Konstruktion $(\_)^{\oplus}$ (siehe Abschnitt 7.2 *Kategorielle Konstruktion des Markierungsgraphen*) gegeben.

Kommen wir nun zum Schaltverhalten parallel schaltender S/T-Netze:

Definition 6.2 (Paralleler Schaltschritt)
Sei N ein S/T-Netz und $M \in P^{\oplus}$ eine Markierung von N. Seien $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ Transitionen in N. Die Transitionen t_i for $i \in \{1, \ldots, n\}$ heißen **unabhängig aktiviert**, wenn $pre^{\oplus}(t_1 \oplus t_2 \oplus \ldots \oplus t_n) \leq M$. Das parallele Schalten von unabhängig aktivierten Transitionen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ definiert den **Schaltschritt** $v_T = t_1 \oplus t_2 \oplus \cdots \oplus t_n \in T^{\oplus}$.

Korollar 6.3 (Aktivierung paralleler Schaltschritte)
Ist $v_T = t_1 \oplus t_2 \oplus \cdots \oplus t_n$ ein paralleler Schaltschritt, gilt also $pre^{\oplus}(v_T) \leq M$, so sind die Transitionen $t_1, t_2, \ldots, t_n$ alle unter M aktiviert:

$$\begin{aligned} & pre^{\oplus}(v_T) \leq M \\ \Leftrightarrow\ & pre^{\oplus}(t_1 \oplus t_2 \oplus \cdots \oplus t_n) \leq M \\ \Leftrightarrow\ & pre(t_1) \oplus pre(t_2) \oplus \cdots \oplus pre(t_n) \leq M \end{aligned}$$

Zur Charakterisierung des Schaltverhaltens benötigen wir die zu '$\oplus$' inverse Operation '$\ominus$'. Wir führen diese Operation als komponentenweise Subtraktion auf linearen Summen ein:

$$\sum_{i=1}^{n} k_i p_i \ominus \sum_{i=1}^{n} l_i p_i = \sum_{i=1}^{n} (k_i - l_i) p_i \quad \text{with } k_i, l_i \in \mathbb{N}, p_i \in P, k_i \geq l_i$$

Analog sind die Operationen $=, \leq, \geq, \ldots$ koeffizientenweise für zwei lineare Summen $M_1 = \sum_{i=1}^{n} k_i p_i$ und $M_2 = \sum_{i=1}^{n} l_i p_i$ definiert, also z. B. $M_1 \leq M_2$ gdw. für alle Koeffizienten gilt $k_i \leq l_i$ (für $i \leq n$). Die Operation $M_1 \ominus M_2$ ist partiell definiert, wenn $M_1 \geq M_2$.

Definition 6.4 (Paralleles Schaltverhalten von S/T-Netzen)
Sei $v_T = t1 \oplus t1 \oplus t3 \oplus \cdots \oplus tn$ ein unter M aktivierter Schaltschritt. Durch das parallele Schalten von v_T wird die Folgemarkierung M' erzeugt (abgekürzt $M[v_T\rangle M'$). M' ist folgendermaßen definiert:

$$M' = (M \ominus pre^{\oplus}(v_T)) \oplus post^{\oplus}(v_T)$$

Satz 6.5 (Paralleles und Sequentielles Schaltverhalten)
Die durch den unter M aktivierten parallelen Schaltschritt v_T erzeugte Folgemarkierung M' entspricht der Folgemarkierung einer beliebigen Schaltsequenz von einzelnen Transitionen aus v_T.

Beweis: Sei $v_T = t_1 \oplus t_2 \oplus \cdots \oplus t_n$ ein Schaltschritt. (Wir erlauben $t_i = t_j$ mit $i \neq j$, um Transitionen auszudrücken, die mehr als einmal schalten.) Wir wissen, daß für alle Permutationen $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ über den Indizes von t gilt: $v_\sigma = t_{\sigma(1)} \oplus t_{\sigma(2)} \oplus \cdots \oplus t_{\sigma(n)} = v_T$, da die Addition von Transitionen kommutativ ist. Sei nun $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine beliebige Permutation. Wir wollen zeigen, daß $M[v_T\rangle M' \Longleftrightarrow M[t_{\sigma(1)}\rangle M_{\sigma(1)}[t_{\sigma(2)}\rangle M_{\sigma(2)} \ldots [t_{\sigma(n)}\rangle M'$. Dazu führen wir eine Induktion über der Länge der Schaltsequenz durch:

Induktionsverankerung: Sei $n = 1$, also $v_T = t_1$ und $\sigma(1) = 1$. Dann gilt: $M[v_T\rangle M' \Longleftrightarrow M[t_1\rangle M' \Longleftrightarrow M[t_{\sigma(1)}\rangle M'$.

Induktionsschritt: Es gelte für alle $v_T = t_1 \oplus \cdots \oplus t_{n-1}$, daß $M[v_T\rangle M' \Longleftrightarrow M[t_{\sigma(1)}\rangle \ldots [t_{\sigma(n-1)}\rangle M'$ für alle Permutationen $\sigma : \{1, \ldots, (n-1)\} \to \{1, \ldots, (n-1)\}$. Wir zeigen, daß dann für $v_T = t_1 \oplus \cdots \oplus t_{n-1} \oplus t_n$ gilt: $M[v_T\rangle M' \Longleftrightarrow M[t_{\sigma(1)}\rangle \ldots [t_{\sigma(n)}\rangle M'$ für alle Permutationen $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Es gilt $v_T = t_1 \oplus \cdots \oplus t_{n-1} \oplus t_n = v'_T \oplus t_{\sigma(n)}$. Damit ergibt sich die Äquivalenz

$$\begin{aligned}
M[v_T\rangle M' &\Longleftrightarrow M' = M \ominus pre^{\oplus}(v_T) \oplus post^{\oplus}(v_T) \\
&\Longleftrightarrow M' = M \ominus pre^{\oplus}(v'_T \oplus t_{\sigma(n)}) \oplus post^{\oplus}(v'_T \oplus t_{\sigma(n)}) \\
&\Longleftrightarrow M' = (M \ominus pre^{\oplus}(v'_T) \oplus post^{\oplus}(v'_T)) \ominus pre(t_{\sigma(n)}) \oplus post(t_{\sigma(n)}) \\
&\Longleftrightarrow M[v'_T\rangle M_{\sigma(n-1)}[t_{\sigma(n)}\rangle M' \\
&\Longleftrightarrow M[t_{\sigma(1)}\rangle M_{\sigma(1)}[t_{\sigma(2)}\rangle \ldots M_{\sigma(n)}[t_{\sigma(n)}\rangle M'
\end{aligned}$$

□

Satz 6.6 (S/T-Netz-Morphismen bewahren paralleles Schaltverhalten)
Sei $f : N_1 \to N_2$ ein S/T-Netz-Morphismus und $v_T = t_1 \oplus t_2 \oplus \cdots \oplus t_n$ ein unter M aktivierter Schaltschritt. Dann bewahrt f das Schaltverhalten von v_T, d. h.

$$M[v_T\rangle M' \Longrightarrow f_P^{\oplus}(M)[f_T^{\oplus}(v_T)\rangle f_P^{\oplus}(M')$$

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß f die Aktivierung bewahrt, d. h. v_T aktiviert unter M impliziert, daß $f_T^{\oplus}(v_T)$ unter $f_P^{\oplus}(M)$ aktiviert ist:

$$\begin{aligned}
pre_1^{\oplus}(v_T) \leq M &\Longrightarrow f_P^{\oplus}(M) \geq f_P^{\oplus}(pre_1^{\oplus}(v_T)) \quad \text{wg. } f_P^{\oplus} \text{ monoton} \\
&\Longleftrightarrow f_P^{\oplus}(M) \geq pre_2^{\oplus}(f_T^{\oplus}(v_T))
\end{aligned}$$

Nun können wir zeigen, daß $M[v_T\rangle M' \Longrightarrow f_P^{\oplus}(M)[f_T^{\oplus}(v_T)\rangle f_P^{\oplus}(M')$:

$$\begin{aligned}
M[v_T\rangle M' &\Longleftrightarrow M' = M \ominus pre_1^{\oplus}(v_T) \oplus post_1^{\oplus}(v_T) \quad \text{(wg. Def. 6.4)} \\
&\Longrightarrow f_P^{\oplus}(M') = f_P^{\oplus}(M) \ominus f_P^{\oplus}(pre_1^{\oplus}(v_T)) \oplus f_P^{\oplus}(post_1^{\oplus}(v_T)) \\
&\Longleftrightarrow f_P^{\oplus}(M') = f_P^{\oplus}(M) \ominus pre_2^{\oplus}(f_T^{\oplus}(v_T)) \oplus post_2^{\oplus}(f_T^{\oplus}(v_T)) \\
&\Longleftrightarrow f_P^{\oplus}(M)[f_T^{\oplus}(v_T)\rangle f_P^{\oplus}(M')
\end{aligned}$$

□

6.2 Universell Algebraische Charakterisierung von T-Invarianten

Wir geben nun eine algebraische Charakterisierung von Transitions-Invarianten in S/T-Netzen an. Wir betrachten hier nur positive Invarianten im Sinne von [Rei85a].

Üblicherweise wird die Definition von T-Invarianten von S/T-Netzen in Matrix-Notation angegeben. Diese Notation gestattet die Invariantenberechnung mit Mitteln der linearen Algebra (siehe Satz 2.6).

Wir werden nun den Begriff der T-Invariante als parallelen Schaltschritt charakterisieren (siehe Definition 6.2) und zeigen, daß diese Charakterisierung zur üblichen Definition in Matrix-Notation (siehe Satz 2.6) äquivalent ist.

Satz 6.7 (T-Invariante als paralleler Schaltschritt)
Parallele Schaltschritte $v_T \in T^{\oplus}$ mit $M[v_T\rangle M$ (für M beliebig) sind genau die positiven T-Invarianten, d. h. es gilt:

$$M[v_T\rangle M \Longleftrightarrow \underline{I} * \underline{v_T} = \underline{0} \wedge \underline{v_T} \geq \underline{0}$$

Die Menge $TInv^{+}$ aller positiven T-Invarianten eines Netzes ist dann gegeben durch $TInv^{+} = \{v_T \in T^{\oplus} | M[v_T\rangle M\}$.

Beweis: Für den Schaltschritt $v_T = \sum_{t_i \in T} \lambda_i * t_i$ ist der entsprechende Transitionsvektor $\underline{v_T} : T \to \mathbb{N}$ gegeben durch $\underline{v_T}(t_i) = \lambda_i$. Seien $\underline{pre}, \underline{post} : P \times T \to \mathbb{N}$ die Vor- und Nachbereichsmatrizen (siehe auch Satz 3.6 über die Äquivalenz der Darstellungen). Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl}
M[v_T\rangle M & \Longleftrightarrow & M = M \ominus pre^{\oplus}(v_T) \oplus post^{\oplus}(v_T) \\
& \Longleftrightarrow & post^{\oplus}(v_T) \ominus pre^{\oplus}(v_T) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \underline{post} * \underline{v_T} - \underline{pre} * \underline{v_T} = \underline{0} \quad \text{für } \underline{v_T} \geq \underline{0} \\
& \Longleftrightarrow & (\underline{post} - \underline{pre}) * \underline{v_T} = \underline{0} \quad \text{für } \underline{v_T} \geq \underline{0} \\
& \Longleftrightarrow & \underline{I} * \underline{v_T} = \underline{0} \quad \text{für } \underline{v_T} \geq \underline{0}
\end{array}$$

□

Korollar 6.8 (Realisierbarkeit von T-Invarianten)
Eine T-Invariante v_T ist realisierbar genau dann, wenn es eine erreichbare Markierung $M \in P^{\oplus}$ gibt, unter der v_T aktiviert ist:
$TInv_{realizable} = \{v_T \in T^{\oplus} | \exists M \in [M_0\rangle : pre^{\oplus}(v_T) \leq M \Longrightarrow M[v_T\rangle M\}$

Beispiel 6.9 (T-Invarianten in S/T-Netzen)
Betrachten wir unser Leser-Schreiber-Netz in Abbildung 3.1.

Es ist leicht zu sehen, daß $v_T = T1s \oplus T2s \oplus T3s$ eine T-Invariante ist, da die Markierung reproduziert wird. Wir wollen sehen, ob unsere Charakterisierung von T-Invarianten als Schaltschritt (Satz 6.7) diese Intuition bestätigt:
Sei M eine beliebige Markierung unseres Netzes, die v_T aktiviert, also $pre^{\oplus}(v_T) \leq M$. Dann ist die Folgemarkierung M' mit $M[v_T\rangle M'$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} M' &= M \ominus pre^{\oplus}(T1s \oplus T2s \oplus T3s) \oplus post^{\oplus}(T1s \oplus T2s \oplus T3s) \\ &= M \ominus (\mathsf{Pz} \oplus \mathsf{Psb} \oplus 3\mathsf{Pexc} \oplus \mathsf{Ps}) \oplus (\mathsf{Pz} \oplus \mathsf{Psb} \oplus 3\mathsf{Pexc} \oplus \mathsf{Ps}) \\ &= M \end{aligned}$$

Daher ist, nach Satz 6.7, $v_T = T1s \oplus T2s \oplus T3s$ T-Invariante unseres Netzes.

6.3 T-Invarianten als Limiten in CMon

Wir wollen nun kategorielle Charakterisierungen für T-Invarianten von S/T-Netzen einführen, und zwar basierend auf der Kategorie **CMon** kommutativer Monoide. Wir charakterisieren T-Invarianten als Egalisator der Vor- und Nachbereichsmorphismen und zeigen, daß die kategorielle Charakterisierung der algebraischen Charakterisierung aus Satz 2.6 entspricht.

Unserer algebraischen Charakterisierung von T-Invarianten $v_T \in T^{\oplus}$ zufolge (siehe Satz 6.7), läßt das Schalten von v_T die aktuelle Markierung M unverändert ($M[v_T\rangle M$). Das bedeutet, daß alle Token, die sich im Vorbereich $pre^{\oplus}(v_T)$ des Schaltschritts befinden, durch das Schalten von v_T reproduziert werden, sich also auch im Nachbereich $post^{\oplus}(v_T)$ befinden. Darüberhinaus dürfen von v_T keine zusätzlichen Token im Nachbereich $post^{\oplus}(v_T)$ erzeugt werden, das sonst die Markierungen vor und nach dem Schalten von v_T unterschiedlich wären.
Für die kategorielle Charakterisierung von T-Invarianten brauchen wir daher ein Konzept, daß uns ein Submonoid von $T^{\oplus}$ liefert, dessen Elemente die gleichen Vor- und Nachbereiche haben.

Der Begriff des Egalisators liefert genau diese kategorielle Abstraktion. Allgemein charakterisiert ein Egalisator eine „Einbettung von Substrukturen“, in unserem Fall eine Einbettung von Monoiden.

Wir wollen zunächst die allgemeine kategorielle Konstruktion eines Egalisators definieren, die wir dann anwenden, um T-Invarianten zu formalisieren.

Definition 6.10 (Egalisator)
Seien $A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ ein Paar von Morphismen. Ein Tupel $(E,\ E \xrightarrow{e} A)$ ist ein *Egalisator von f und g*, wenn folgende Bedingungen gelten:

1. (Egalisierende Eigenschaft) $f \circ e = g \circ e$,

2. (Universelle Eigenschaft) Für jeden Morphismus $e' : E' \to A$ mit $f \circ e' = g \circ e'$ gibt es einen eindeutigen Morphismus $\overline{e} : E' \to E$, so daß $e' = e \circ \overline{e}$, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[dr, dashed, "\overline{e}"'] \arrow[drr, bend left, "e'"] & & & \\ & E \arrow[r, "e"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Dies bedeutet, der Egalisator enthält genau die Elemente aus A, die über die Morphismen f und g gleich abgebildet (egalisiert) werden. Darüberhinaus ist E das maximale Objekt mit dieser Eigenschaft (universelle Eigenschaft).

Satz 6.11 (Egalisator in Set)
In der Kategorie **Set** von Mengen läßt sich der Egalisator $(E,\ E \xrightarrow{e} A)$ der Funktionen $A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$ konstruieren durch $E = \{a \in A | f(a) = g(a)\}$ mit $e : E \to A$ Inklusion.

Beweis:

- E und e sind wohldefiniert:
  E ist Menge und e ist Abbildung (folgt aus der Definition von E und e).
- Egalisierende Eigenschaft $f \circ e = g \circ e$:
  folgt aus der Definition von E und e.
- Universelle Eigenschaft:
  Sei $e' : E' \to M_1$, so daß $f \circ e' = g \circ e'$ in

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[dr, dashed, "\overline{e}"'] \arrow[drr, bend left, "e'"] & & & \\ & E \arrow[r, "e"'] & M_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & M_2 \end{tikzcd}$$

  Wir definieren $\overline{e} : E' \to E$ durch $\overline{e}(x) = e'(x)$ für alle $x \in E'$.

  - $\overline{e}$ ist wohldefiniert: $\forall x \in E' : f(e'(x)) = g(e'(x)) \Longrightarrow e'(x) \in E \Longrightarrow \overline{e}(x) \in E$
  - $\overline{e}$ ist Abbildung, da e' Abbildung ist.
  - $e' = e \circ \overline{e}$ wegen e Inklusion und der Definition von $\overline{e}$.
  - $\overline{e}$ ist eindeutig:
    Sei $\overline{e}' : E' \to E$, so daß $e \circ \overline{e}' = e'$. Dann gilt $e \circ \overline{e}' = e \circ \overline{e}$ und, da e Monomorphismus ist, erhalten wir $\overline{e}' = \overline{e}$.

$\square$

Kommutative Monoide können als Mengen linearer Summen aufgefaßt werden, auf denen die Operation $\oplus$ definiert ist und die ein neutrales Element ϵ bzgl. $\oplus$ enthalten. Wir konstruieren daher den Egalisator in **CMon** wie folgt:

Satz 6.12 (Konstruktion des Egalisators in CMon)
Die Konstruktion $E \xhookrightarrow{incl} M_1 \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} M_2$ mit
$E = \{m \in M_1 | f(m) = g(m)\}$ und *incl* Inklusionsmorphismus ist ein Egalisator in der Kategorie kommutativer Monoide **CMon**.

Beweis:

- E ist ein Monoid:
  - Neutrales Element:
    $\epsilon \in E$, da $f(\epsilon) = \epsilon_{M_2} = g(\epsilon)$, und f und g Monoidhomomorphismen sind.
  - Operation $\oplus$:
    $m_1, m_2 \in E$
    $\Longrightarrow f(m_1) = g(m_1) \wedge f(m_2) = g(m_2)$
    $\Longrightarrow f(m_1) \oplus f(m_2) = g(m_1) \oplus g(m_2)$
    $\Longleftrightarrow f(m_1 \oplus m_2) = g(m_1 \oplus m_2)$
    $\Longrightarrow (m_1 \oplus m_2) \in E$
  - Kommutativität der Operation $\oplus$:
    $(m_1 \oplus m_2) \in E \Longrightarrow (m_2 \oplus m_1) \in E$, da $f(m_1 \oplus m_2) = f(m_2 \oplus m_1)$ und $g(m_1 \oplus m_2) = g(m_2 \oplus m_1)$.
  - Assoziativität der Operation $\oplus$:
    analog
- $f \circ incl = g \circ incl$: wg. der Definition von E.
- Universelle Eigenschaft:
  Sei $e' : E' \to M_1$, so daß $f \circ e' = g \circ e'$ in

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[dr, dashed, "\overline{e}"'] \arrow[drr, bend left, "e'"] & & & \\
& E \arrow[r, "incl"'] & M_1 \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & M_2
\end{tikzcd}$$

  Wir definieren $\overline{e} : E' \to E$ durch $\overline{e}(x) = e'(x)$ für alle $x \in E'$.
  - $\overline{e}$ ist wohldefiniert: $\forall x \in E' : f(e'(x)) = g(e'(x)) \Longrightarrow e'(x) \in E \Longrightarrow \overline{e}(x) \in E$
  - $\overline{e}$ ist Monoidhomomorphismus, da e' Monoidhomomorphismus ist.
  - $e' = e \circ \overline{e}$, da e Inklusion und wegen der Definition von $\overline{e}$.
  - $\overline{e}$ ist eindeutig:
    Sei $\overline{e}' : E' \to E$, so daß $incl \circ \overline{e}' = e'$. Dann gilt $incl \circ \overline{e}' = incl \circ \overline{e}$ und, da *incl* Monomorphismus ist, erhalten wir $\overline{e}' = \overline{e}$.

$\square$

Es bleibt zu zeigen, daß die durch den Egalisator ausgezeichneten Objekte $v_T \in incl(E)$ wirklich T-Invarianten im Sinne von Satz 6.7 sind.

Satz 6.13 (Kategorielle Charakterisierung positiver T-Invarianten)
Die Menge der positiven T-Invarianten $TInv^+ \subseteq T^\oplus$ eines S/T-Netzes wird charakterisiert durch den Egalisator $E \overset{incl}{\hookrightarrow} T^\oplus \underset{post^\oplus}{\overset{pre^\oplus}{\rightrightarrows}} P^\oplus$ in der Kategorie **CMon** der kommutativen Monoide. Es gilt also für alle $v_T \in T^\oplus$ und $M \in P^\oplus$ beliebig:

$$M[v_T\rangle M \iff v_T \in incl(E)$$

Beweis: Wir zeigen, daß gilt: $v_T \in incl(E) \iff \forall M \in P^\oplus$ mit $pre^\oplus(v_T) \leq M : M[v_T\rangle M$:

$$\begin{aligned}
v_T \in incl(E) &\iff pre^\oplus(v_T) = post^\oplus(v_T) \\
&\iff M = M \ominus pre^\oplus(v_T) \oplus post^\oplus(v_T) \quad \text{für } M \in P^\oplus \text{ mit } pre^\oplus(v_T) \leq M \\
&\iff M[v_T\rangle M \quad \text{für } M \in P^\oplus \text{ mit } pre^\oplus(v_T) \leq M
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel 6.14 (T-Invarianten als Egalisator in CMon)
Betrachten wir das S/T-Netz in Abbildung 6.1. Wir skizzieren die kommutativen Monoide als (unendliche) Mengen, indem wir einige ihrer Elemente angeben. Das Submonoid E wird konstruiert, indem alle die Elemente $v_T \in T^\oplus$ in E eingefügt werden, die dasselbe Bild unter den Morphismen $pre^\oplus(v_T)$ und $post^\oplus(v_T)$ in $P^\oplus$ haben. Diese Konstruktion wird in Abbildung 6.1 nachvollzogen. Betrachten wir zum Beispiel die T-Invariante $v_T = t1 \oplus t2$. Der Vorbereich des Schaltschritts v_T wird berechnet zu $pre^\oplus(v_T) = pre^\oplus(t1 \oplus t2) = pre(t1) \oplus pre(t2) = \mathbf{p1}$, und sein Nachbereich $post^\oplus(v_T) = post^\oplus(t1 \oplus t2) = post(t1) \oplus post(t2) = \mathbf{p1}$. Da Vor- und Nachbereich von v_T gleich sind, ist v_T nach Satz 6.13 eine T-Invariante unseres Netzes.

Wir zeigen im folgenden, daß T-Invarianten bei Netz-Transformationen über S/T-Netz-Morphismen bewahrt werden.

Satz 6.15 (T-Invarianten und S/T-Netz-Morphismen)
Seien N_1 und N_2 S/T-Netze und $f = (f_P, f_T) : N_1 \to N_2$ ein S/T-Netz-Morphismus. Seien weiterhin E_{T_1} der Egalisator von $pre_1^\oplus$ und $post_1^\oplus$ und E_{T_2} der Egalisator von $pre_2^\oplus$ und $post_2^\oplus$, wie folgendes Diagramm zeigt:

$$\begin{tikzcd}
E_{T_1} \arrow[r, hook, "incl_{T_1}"] & T_1^\oplus \arrow[r, shift left, "pre_1^\oplus"] \arrow[r, shift right, "post_1^\oplus"'] \arrow[d, "f_T^\oplus"'] \arrow[dr, phantom, "(=)"] & P_1^\oplus \arrow[d, "f_P^\oplus"] \\
E_{T_2} \arrow[r, hook, "incl_{T_2}"] & T_2^\oplus \arrow[r, shift left, "pre_2^\oplus"] \arrow[r, shift right, "post_2^\oplus"'] & P_2^\oplus
\end{tikzcd}$$

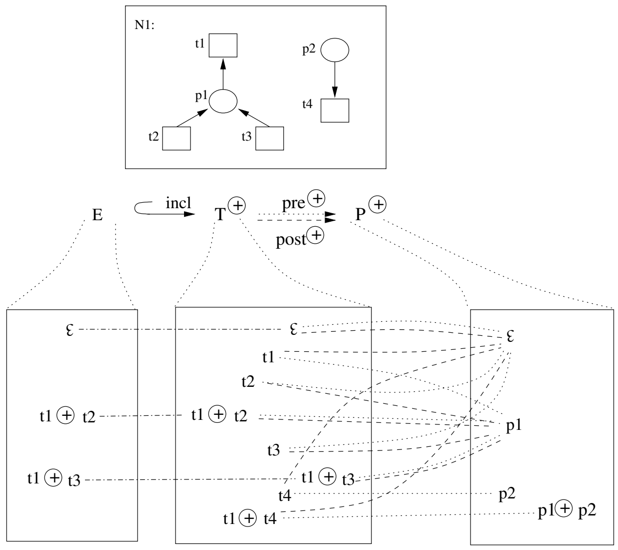


Abbildung 6.1: Konstruktion von T-Invarianten als Egalisator in **CMon**

Dann werden die T-Invarianten des Netzes N_1 von S/T-Netz-Morphismen bewahrt, d. h. es gilt:

$$\forall v_T \in incl_{T_1}(E_{T_1}) : f_T^{\oplus}(v_T) \in incl_{T_2}(E_{T_2})$$

Beweis: Wir zeigen mit Hilfe der universellen Eigenschaft des Egalisators E_{T_2}, daß es genau einen Morphismus $\overline{e} : E_{T_1} \to E_{T_2}$ gibt, über den die T-Invarianten von Netz N_1 auf T-Invarianten von N_2 abgebildet werden:
Sei $e' : E_{T_1} \to T_2^{\oplus}$ gegeben durch $e' = f_T^{\oplus} \circ incl_{T_1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} pre_2^{\oplus} \circ f_T^{\oplus} \circ incl_{T_1} &= f_P^{\oplus} \circ pre_1^{\oplus} \circ incl_{T_1} \\ &= f_P^{\oplus} \circ post_1^{\oplus} \circ incl_{T_1} \\ &= post_2^{\oplus} \circ f_T^{\oplus} \circ incl_{T_1} \end{aligned}$$

Also existiert genau ein $\overline{e} : E_{T_1} \to E_{T_2}$ mit der Eigenschaft, daß $f_T^{\oplus} \circ incl_{T_1} = incl_{T_2} \circ \overline{e}$.
Sei nun v_T T-Invariante von Netz N_1, d. h. es existiert ein $x \in E_{T_1}$ mit $v_T = incl_{T_1}(x)$, so ist $f_T^{\oplus}(v_T) = f_T^{\oplus}(incl_{T_1}(x)) = incl_{T_2}(\overline{e}(x))$. Damit ist dann $f_T^{\oplus}(v_T) \in incl_{T_2}(E_{T_2})$. $\square$

Kapitel 7

Kompositionale Semantik von S/T-Netzen

In diesem Kapitel werden wir uns mit einer Semantik von S/T-Netzen — dem Markierungsgraphen — noch einmal beschäftigen und zeigen, wie sich diese Konstruktion kategoriell darstellt. Dabei werden wir sehen, daß wir durch die kategorielle Darstellung universelle Eigenschaften für den Markierungsgraph (kurz MG) erhalten. Diese führen zu der Verträglichkeit mit den Strukturierungstechniken des vorherigen Kapitels. Das heißt, wenn wir Netze mit Hilfe von disjunkter Vereinigung, Union und Fusion zusammensetzen, dann läßt sich der Markierungsgraph des komponierten Netzes in gleicher Weise durch die Markierungsgraphen der einzelnen Netze zusammensetzen.

Diese Eigenschaften sind insbesondere für den Einsatz von S/T-Netzen zur Modellierung großer und komplexer Systeme wesentlich.

Die Konstruktion des Markierungsgraphen basiert auf den Eigenschaften eines freien kommutativen Monoids, vgl. auch Definition 3.1 und Satz 4.7. Dies ist eine freie Konstruktion, die wir in diesem Kapitel formal einführen werden. Danach wenden wir uns dem MG zu.

Während in den bisherigen Abschnitten Begriffe und Konstruktionen innerhalb einer festen Kategorie $\mathcal{C}$ definiert und analysiert worden sind, sollen nun Konstruktionen und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Kategorien betrachtet werden. Der Begriff des *Funktors* ist dafür von zentraler Bedeutung.

Definition 7.1 (Funktor)
Seien $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ Kategorien. Ein *Funktor* F von $\mathcal{C}_1$ nach $\mathcal{C}_2$, geschrieben $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$,

- ordnet jedem $\mathcal{C}_1$ – Objekt A_1 ein $\mathcal{C}_2$ – Objekt $F(A_1)$ zu.
- und jedem $\mathcal{C}_1$ – Morphismus $f : A_1 \to B_1$ einen $\mathcal{C}_2$ – Morphismus $F(f) : F(A_1) \to F(A_2)$, so daß die beiden folgenden Axiome gelten:

  Komposition Für $\mathcal{C}_1$ – Morphismen f, g und für die Komposition $g \circ f$, gilt:

– $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Identität Für alle $\mathcal{C}_1$ – Objekte A gilt:

– $F(id_A) = id_{F(A)}$

Satz 7.2 (Funktor T_{SIG})
Sei $SIG = (S, OP)$ eine einsortige Signatur, d.h. S besteht nur aus einem Element, X sei eine Menge von Variablen und $T_{SIG}(X)$ die SIG– Termalgebra über X. Diese Konstruktion kann man als Objektzuordnung eines Funktors

$$T_{SIG} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Alg}(SIG),$$

der zu einer gegebenen Variablenmenge die Termalgebra bzgl. dieser Variablen bildet, genannt *Termalgebra-Funktor*, auffassen. Für jede Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen Variablenmengen X und Y ist

$$T_{SIG}(f) : T_{SIG}(X) \rightarrow T_{SIG}(Y)$$

die eindeutig bestimmte homomorphe Fortsetzung von f

Beweis:

1. Komposition
   Es seien $f : X \rightarrow Y,\ g : Y \rightarrow Z$. Es sei $s \in S$ (die einzige Sorte der Signatur SIG).

   $$T_{SIG}(f),\ T_{SIG}(g),\ T_{SIG}(g \circ f) \text{ und } T_{SIG}(g) \circ T_{SIG}(f) \text{ sind Homomorphismen} \quad (1)$$

   Wir werden im Folgenden die Algebren $T_{SIG}(X), T_{SIG}(Y)$ und $T_{SIG}(Z)$ kurz mit $Tx,\ Ty,\ Tz$ bezeichnen.
   Wir zeigen durch strukturelle Induktion, daß $T_{SIG}(g \circ f) = T_{SIG}(g) \circ T_{SIG}(f)$.

   Induktionsverankerung: $\forall c :\rightarrow\ s$ gilt: $T_{SIG}(g \circ f)(c_{Tx}) \overset{(1)}{=} T_{SIG}(g)(c_{Ty}) \overset{(1)}{=} T_{SIG}(g) \circ T_{SIG}(f)(c_{Tx})$.
   $\forall x \in X :\ T_{SIG}(g \circ f)(x) \overset{Def\_T_{SIG}}{=} T_{SIG}(g(T_{SIG}(f)(x))) = T_{SIG}(g) \circ T_{SIG}(f)(x)$.

   Induktionsschritt: Es seien $t_1,\ t_2, ...,\ t_n \in Tx_s$ mit der Eigenschaft $T_{SIG}(g \circ f)(t_i) = T_{SIG}(g) \circ T_{SIG}(f)(t_i)$ und eine Operation $op : s_1...s_n \rightarrow s \in OP$ ($s_i = s$ für $i = 1, ..., n$).
   $$\begin{aligned} T_{SIG}(g \circ f)(op_{Tx}(t_1, ..., t_n)) &\overset{(1)}{=} (op_{Tz}(T_{SIG}(g \circ f)(t_1), ..., T_{SIG}(g \circ f)(t_n)) \\ &\overset{IVs}{=} (op_{Tz}(T_{SIG}(g) \circ T_{SIG}(f)(t_1), ..., T_{SIG}(g) \circ T_{SIG}(f)(t_n)) \\ &\overset{(1)}{=} T_{SIG}(g) \circ T_{SIG}(f)(op_{Tx}(t_1, ..., t_n)). \end{aligned}$$

2. Identität
   Zu zeigen ist, daß $\forall t \in Tx_s$: $T_{SIG}(id_X)(t) = id(T_{SIG}(X))(t)$ (2). Da $T_{SIG}(id_X)$ Homomorphismus, gilt: $T_{SIG}(id_X)(c_{Tx}) = c_{Tx}$ für $c :\to s \in OP$. Für $x \in X$: $T_{SIG}(id_X)(x) \overset{Def\_T_{SIG}}{=} x$.
   Infolge der Homomorphie-Eigenschaft von $T_{SIG}(id_X)$ kommt man durch Weiterführung der strukturellen Induktion zu einem Beweis von Eigenschaft (2).

□

Satz 7.3 (Potenzmengen-Funktor)
Die Potenzmengenkonstruktion $\mathcal{P}(A)$ über einer Menge A, die als Menge aller Teilmengen von A definiert ist, läßt sich auf zweierlei Art zu einem Funktor fortsetzen: Der Potenzmengenfunktor

$$\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$$

ist für jede Abbildung $f : A \to B$ und Teilmenge A' von A definiert durch $\mathcal{P}(f)(A') = f(A')$

Beweis:
Komposition: Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$.
$\forall A' \subseteq A : \mathcal{P}(g \circ f)(A') = g(f(A')) = \mathcal{P}(g)(f(A')) = \mathcal{P}(g) \circ \mathcal{P}(f)(A')$.
Identität: $\mathcal{P}(id_A)(A') = id_A(A') = A' = id_{\mathcal{P}(A)}(A')$. □

Satz 7.4 (Funktoren bewahren Isomorphismen)
Für jeden Morphismus $f : A \to B$ in $\mathcal{C}_1$ für den Morphismus $F(f) : F(A) \to F(B)$ in $\mathcal{C}_2$ gilt: f Isomorphismus impliziert daß $F(f)$ Isomorphismus ist.

Beweis: Es sei $f : A \to B$ ein Isomorphismus in $\mathcal{C}_1$. Dann gibt es $g : B \to A$ mit der Eigenschaft: $f \circ g = id_B$ und $g \circ f = id_A$. Also gilt: $F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(id_B) = id_{F(B)}$ und $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(id_A) = id_{F(A)}$ und damit ist $F(f)$ ein Isomorphismus. □

7.1 Freie Funktoren

Viele Funktoren, die in Mathematik und Informatik von zentraler Bedeutung sind, lassen sich nicht nur explizit als mengentheoretische Konstruktionen beschreiben, sondern auch über bestimmte Eigenschaften universell charakterisieren. Von besonderem Interesse dabei sind verschiedene Arten von freien Konstruktionen, wie etwa die Konstruktion des freien Monoids A^* über einer Menge A, die man als Lösung eines universellen Problems gewinnen kann. Die Lösbarkeit des entsprechenden universellen Problems gestattet es darüber hinaus, die freie Konstruktion in eindeutiger Weise zu einem *freien Funktor* fortzusetzen. Während Funktoren im allgemeinen nur Identitäten und Isomorphismen bewahren, haben freie Funktoren die zusätzliche Eigenschaft, daß sie Koegalisatoren, Koprodukte und damit auch Pushouts bewahren. Dies ist für die Kompositionalität von vielen Konstruktionen in der Informatik von zentraler Bedeutung.

Definition 7.5 (Freie Konstruktion)
Sei $V : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ ein Funktor und A ein $\mathcal{C}_1$–Objekt, dann heißt ein

- $\mathcal{C}_2$–Objekt $F(A)$ zusammen mit einem
- $\mathcal{C}_1$–Morphismus $u(A) : A \to V(F(A))$

freie Konstruktion über A bzgl. V, falls für jeden

- $\mathcal{C}_1$–Morphismus $f_1 : A \to V(B)$ mit $\mathcal{C}_2$–Objekt B genau ein
- $\mathcal{C}_2$–Morphismus $f_2 : F(A) \to B$ existiert, so daß gilt:
- $f_1 = V(f_2) \circ u(A)$

Dies bedeutet, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u(A)"'] & V(B) \\
V(F(A)) \arrow[ur, dotted, "V(f_2:F(A)\to B)"'] &
\end{tikzcd}$$

f_2 wird auch Fortsetzung von f_1 genannt und der Funktor V wird häufig auch Vergißfunktor genannt.

Satz 7.6 (Vergißfunktor zwischen CMon und Set)
Der Vergißfunktor $V : \mathbf{CMon} \to \mathbf{Set}$ ist gegeben durch $V(M, \epsilon, \bullet) = M$ und
$V(f : (M_1, \epsilon_1, \bullet_1) \to (M_2, \epsilon_2, \bullet_2)) = f : M_1 \to M_2$

Beweis der Funktoraxiome
Komposition: $V(f \circ g)(M) = f \circ g(M) = V(f) \circ V(g)(M)$
Identität: $V(id_{(M,\epsilon,\bullet)}) = id_M = id_{V(M,\epsilon,\bullet)}$

Satz 7.7 (Freie Konstruktion $((\_)^{\oplus}, \lambda, \oplus)$)
Die Konstruktion des freien kommutativen Monoids $(M^{\oplus}, \lambda, \oplus)$ über eine Menge M ist frei bzgl. des Vergißfunktors V.

Beweis: Zu zeigen ist, daß es $\forall A \in \mathbf{Set}$, $\forall B = (M_B, \epsilon, \bullet) \in \mathbf{CMon}$ und $\forall f_1 : A \to V(B)$ genau einen Morphismus $f_2 : (A^{\oplus}, \lambda, \oplus) \to B \in Mor_{\mathbf{CMon}}$ gibt mit $V(f_2) \circ u(A) = f_1$. In unserem Fall gilt $V((A^{\oplus}, \lambda, \oplus)) = A^{\oplus}$ und $u(A) = A$. Wir definieren $f_2 : (A^{\oplus}, \lambda, \oplus) \to (M_B, e, \bullet)$ für alle Summen $w \in A^{\oplus}$:

- $f_2(\lambda) := \epsilon$
- $f_2(w) = f_1(a_1) \bullet f_1(a_2) \bullet \ldots \bullet f_1(a_n)$ für $w = a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in A$

f_2 ist infolge seiner Definition als Morphismus wohldefiniert und es gilt für alle $a \in A$: $V(f_2) \circ u(A)(a) = f_1(a)$. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit von f_2. Es sei $f' : (A^{\oplus}, \lambda, \oplus) \to B$ mit $V(f') = f_1$. Dann gilt $f'(\lambda) = \epsilon = f_2(\lambda)$, $f'(a) = f_1(a) = f_2(a)$ und da f' operationsverträglich ist, gilt für mehrstellige Wörter $w = a_1 \oplus a_2 \oplus \ldots \oplus a_n$ mit $a_1, \ldots, a_n \in A$ $f'(w) = f'(a_1) \bullet f'(a_2) \bullet \ldots \bullet f'(a_n) = f_1(a_1) \bullet f_1(a_2) \bullet \ldots \bullet f_1(a_n) = f_2(a_1) \bullet f_2(a_2) \bullet \ldots \bullet f_2(a_n) = f_2(w)$. $\square$

Satz 7.8 (Freier Funktor)
Sei $V : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ ein Funktor. Für jedes $\mathcal{C}_1$–Objekt A_1 existiere eine freie Konstruktion $(F(A_1), u(A_1))$ über A_1 bzgl. V. Dann läßt sich die freie Konstruktion eindeutig zu einem Funktor

$$F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2,$$

genannt *freier Funktor bzgl. V*, fortsetzen.

Beweisidee:
Die Fortsetzung der freien Konstruktionen zu einem freien Funktor $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ wird dadurch definiert, daß für jeden $\mathcal{C}_1$–Morphismus $f : A \to B$ der $\mathcal{C}_2$–Morphismus $F(f) : F(A) \to F(B)$ als eindeutige kommutative Ergänzung im folgenden Diagramm (1) definiert wird:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u(A)"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & B \arrow[d, "u(B)"] \\ V(F(A)) \arrow[r, "V(F(f))"'] & V(F(B)) \end{tikzcd}$$

Die Funktoreigenschaften von F folgen aus der Eindeutigkeit von $F(f)$ in Diagramm (1): Für $f = id_A$ in (1) machen $F(id_A)$ und $id_{F(A)}$ das Diagramm kommutativ, also gilt wegen der Eindeutigkeit $F(id_A) = id_{F(A)}$. Analog kann man die Kompositionseigenschaft $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ zeigen.

Satz 7.9 (Eigenschaften freier Funktoren)

1. Die Komposition $F_2 \circ F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_3$ von freien Funktoren $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ und $F_2 : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ ist ein freier Funktor.

2. Freie Funktoren bewahren initiale Objekte, Koegalisatoren, Koprodukte und Pushouts.

3. Freie Funktoren sind eindeutig bis auf Isomorphie, d.h. zwei unterschiedliche freie Funktoren bilden ein Objekt aus der Ursprungskategorie auf zwei isomorphe Objekte aus der Zielkategorie ab.

Beweisidee:

1. Falls $F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ freier Funktor bzgl. $V_1 : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ und $F_2 : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_3$ freier Funktor bzgl. $V_2 : \mathcal{C}_3 \to \mathcal{C}_2$ ist, dann ist auch $F_2 \circ F_1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_3$ freier Funktor bzgl. $V_1 \circ V_2 : \mathcal{C}_3 \to \mathcal{C}_1$, wobei u_3 durch u_1 und u_2 definiert ist:

   $$u_3(A_1) = V_1(u_2(F_1(A_1))) \circ u_1(A_1)$$

   Dies folgt unmittelbar aus dem folgenden Diagramm, wobei für $f_1 : A_1 \to V_1 \circ V_2(A_3)$ zunächst genau ein $f_2 : F_1(A_1) \to V_2(A_3)$ existiert, so daß das obere Diagramm kommutiert. Danach existiert genau ein $f_3 : F_2 \circ F_1(A_1) \to A_3$, derart daß es ein unteres Diagramm gibt, das dem Diagramm der freien Konstruktion F_2 vor der Anwendung von V_1 entspricht.

   $$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u_1(A_1)"'] & V_1 \circ V_2(A_3) \\
V_1 \circ F_1(A_1) \arrow[ur, dotted, "V_1(f_2)"] \arrow[d, "V_1(u_2(F_1(A_1)))"'] & \\
V_1 \circ V_2 \circ F_2 \circ F_1(A_1) \arrow[uur, dotted, "V_1 \circ V_2(f_3)"'] &
\end{tikzcd}$$

2. Wir beschränken uns darauf zu zeigen, daß ein freier Funktor $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ bzgl. $V : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ initiale Objekte bewahrt. Sei A_1 initiales Objekt in $\mathcal{C}_1$, dann ist auch $F(A_1)$ initiales Objekt in $\mathcal{C}_2$: Denn für jedes $\mathcal{C}_2$–Objekt A_2 existiert genau ein $\mathcal{C}_2$–Morphismus $f_2 : F(A_1) \to A_2$, weil A_1 initiales Objekt in $\mathcal{C}_1$ ist, daher zunächst genau ein $\mathcal{C}_1$–Morphismus $f_1 : A_1 \to V(A_2)$ existiert. Danach liefert die universelle Eigenschaft von F genau ein $f_2 : F(A_1) \to A_2$, derart daß $f_2 \circ u(A_1) = f_1$ für den universellen Morphismus $u(A_1)$ gilt. Falls $g_2 : F(A_1) \to A_2$ ein weiterer $\mathcal{C}_2$–Morphismus ist, so gilt auch $g_2 \circ u(A_1) = f_1$, weil A_1 initiales Objekt in $\mathcal{C}_1$ ist, und dann $f_2 = g_2$ wegen der Eindeutigkeit von f_2 im Rahmen der freien Konstruktion. Damit ist $F(A_1)$ initiales Objekt in $\mathcal{C}_2$. Die anderen Eigenschaften lassen sich analog zeigen.

3. Folgt aus den Eindeutigkeitseigenschaften freier Konstruktionen.

Nun haben wir die Voraussetzungen um den Markierungsgraphen zu konstruieren, dann zu zeigen, daß es sich um eine freie Konstruktion handelt und damit wegen Satz 7.9 die Kompositionalität erhalten bleibt.

7.2 Kategorielle Konstruktion des Markierungsgraphen

Wir wollen die Möglichkeit parallelen Schaltens mehrerer Transitionen durch Addieren der jeweiligen Vor- und Nachbereiche sowie der Transitionen selber über die „$\oplus$“-Operation darstellen. Definieren wir also auch Transitionen als freie, kommutative Monoide:

Definition 7.10 (Freies S/T-Monoid)
Ein freies S/T-Monoid $N^{\oplus} = (P, T, pre^{\oplus}, post^{\oplus} : T^{\oplus} \to P^{\oplus})$ besteht aus einem S/T-Netz $N = (P, T, pre, post)$, so daß die Menge $T^{\oplus}$ der Transitionen das freie kommutative Monoid über T ist, und $pre^{\oplus}, post^{\oplus} : T^{\oplus} \to P^{\oplus}$ die Fortsetzungen von $pre, post : T \to P^{\oplus}$ sind, denn

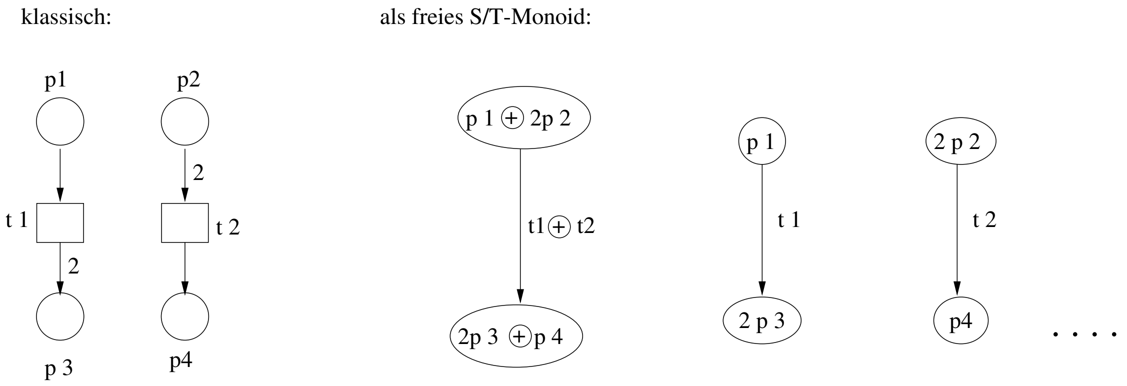
$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, hook] \arrow[dd, "pre"'] & \\ & T^{\oplus} \arrow[dl, "V(pre^{\oplus})"] \\ P^{\oplus} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (T^{\oplus}, \lambda, \oplus) \arrow[d, "pre^{\oplus}"] \\ (P^{\oplus}, \lambda, \oplus) \end{tikzcd}$$

Bemerkung: Wir sprechen vom (nicht freien) S/T- Monoid, wenn die Menge der Transitionen $(T, \epsilon, \bullet)$ beliebige, nicht unbedingt freie Monoide über T umfaßt. Die Vor- und Nachbereichsfunktionen pre und $post : (T, \epsilon, \bullet) \to P^{\oplus}$ sind dann beliebige Monoidhomomorphismen (siehe auch [MM90]).

Definition 7.11 (Freier S/T-Monoid-Morphismus)
Seien $N_1^{\oplus} = (P_1, T_1, pre_1^{\oplus}, post_1^{\oplus} : T_1^{\oplus} \to P_1^{\oplus})$ und $N_2^{\oplus} = (P_2, T_2, pre_2^{\oplus}, post_2^{\oplus} : T_2^{\oplus} \to P_2^{\oplus})$ freie S/T-Monoide. Ein freier S/T-Monoid-Morphismus ist ein S/T-Netz-Morphismus $f = (f_P, f_T)$ mit $f_P : P_1 \to P_2$, $f_T : T_1 \to T_2$, wobei $(f_P^{\oplus}, f_T^{\oplus})$ freie Monoid-Homomorphismen (Fortsetzungen von f_P und f_T) sind, und folgendes Diagramm komponentenweise kommutiert:

$$\begin{tikzcd} T_1^{\oplus} \arrow[r, shift left, "pre_1^{\oplus}"] \arrow[r, shift right, "post_1^{\oplus}"'] \arrow[d, "f_T^{\oplus}"'] \arrow[dr, phantom, "(=)"] & P_1^{\oplus} \arrow[d, "f_P^{\oplus}"] \\ T_2^{\oplus} \arrow[r, shift left, "pre_2^{\oplus}"] \arrow[r, shift right, "post_2^{\oplus}"'] & P_2^{\oplus} \end{tikzcd}$$

Beispiel 7.12
Sei N_1 folgendes S/T-Netz mit parallel schaltenden Transitionen:



wir sehen deutlich, daß man nur an den freien S/T-Monoiden (nicht an den entsprechenden klassischen S/T-Netzen) erkennen kann, welche Transitionen parallel schalten.

Satz 7.13 (Kategorie FM-Graph)
Die Menge der freien S/T-Monoide (Definition 7.10) bildet zusammen mit den freien S/T-Monoid-Morphismen (Definition 7.11) die Kategorie **FM-Graph** parallel schaltender S/T-Netze.

Beweis: Die Komposition $g \circ f$ zweier freier S/T-Monoid-Morphismen ist die komponentenweise Komposition von Monoidhomomorphismen und daher assoziativ. Die Identität ist ebenfalls komponentenweise auf die Identität von freien Monoiden zurückzuführen. Die Neutralität der Identität gilt also. □

Der Markierungsgraph als reflexives S/T-Monoid

Im Hinblick auf die Erzeugung des Markierungsgraphen zu einem gegebenen S/T-Netz untersuchen wir jetzt das S/T-Monoid, das um reflexive Transitionen erweitert wird, damit es alle möglichen Markierungen und Schaltschritte enthält und dem klassischen Markierungsgraphen entspricht. Wir erweitern formal das S/T-Monoid um reflexive Transitionen:

Definition 7.14 (Reflexives S/T-Monoid)
Ein reflexives S/T-Monoid $R = (P, T, pre, post : (T, \epsilon, \bullet) \to (P^{\oplus}, \lambda, \oplus), idle : (P^{\oplus}, \lambda, \oplus) \to (T, \epsilon, \bullet))$ ist ein S/T-Monoid zusammen mit einer Funktion $idle : P^{\oplus} \to (T, \epsilon, \bullet)$, die jedem Knoten eine sogenannte Identitätskante vom Knoten zu sich selbst zuordnet, so daß $pre \circ idle = post \circ idle = id_{P^{\oplus}}$. Diese Bedingung sichert die Existenz einer zu $P^{\oplus}$ isomorphen Teilmenge von T, die im Folgenden reflexive Transitionen darstellen wird.

Definition 7.15 (Reflexiver S/T-Monoid-Morphismus)
Seien R_1 und R_2 mit $R_i = (P_i, T_i, pre_i, post_i : (T_i, \epsilon_i, \bullet_i) \to P_i^{\oplus}, idle_i : P_i^{\oplus} \to (T_i, \epsilon_i, \bullet_i))$ für $i = 1, 2$ reflexive S/T-Monoide. $f = (f_P, f_T)$ ist ein reflexiver S/T-Monoid-Morphismus, wobei $f_P : P_1 \to P_2$ eine Abbildung und $f_T : (T_1, \epsilon_1, \bullet_1) \to (T_2, \epsilon_2, \bullet_2)$ ein Monoidhomomorphismus ist, und folgendes Diagramm komponentenweise kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
(T_1, \epsilon_1, \bullet_1) \arrow[rr, shift left, "pre_1"] \arrow[rr, shift right, "post_1"'] \arrow[dd, "f_T"'] & & (P_1^{\oplus}, \lambda, \oplus) \arrow[ll, bend right, "idle_1"'] \arrow[dd, "f_P^{\oplus}"] \\
& (=) & \\
(T_2, \epsilon_2, \bullet_2) \arrow[rr, shift left, "pre_2"] \arrow[rr, shift right, "post_2"'] & & (P_2^{\oplus}, \lambda, \oplus) \arrow[ll, bend left, "idle_2"]
\end{tikzcd}
$$

Dabei bewahrt f also die reflexiven Transitionen: $f_T \circ idle_1 = idle_2 \circ f_P^{\oplus}$.

Satz 7.16
Die Menge der reflexiven S/T-Monoide (Definition 7.14) bildet zusammen mit den reflexiven S/T-Monoid-Morphismen (Definition 7.15) die Kategorie **RMGraph** der Markierungsgraphen.

Beweis: Die Komposition $g \circ f$ zweier reflexiver S/T-Monoid-Morphismen ist die komponentenweise Komposition von Monoidhomomorphismen und daher assoziativ.
Die Identität ist ebenfalls komponentenweise auf die Identität von Monoiden zurückzuführen. Die Neutralität der Identität gilt also. $\square$

Wir können nun zu einem gegebenen S/T-Netz den Markierungsgraphen innerhalb der Kategorie **RMGraph** konstruieren.

Definition 7.17 (Markierungsgraph)
Für ein S/T-Netz $N = (P, T, pre, post)$ ist der entsprechende Markierungsgraph $M[N]$ gegeben durch:
$M[N] = (P, (T \uplus P)^{\oplus}, s, t : (T \uplus P)^{\oplus} \to P^{\oplus}, idle : P^{\oplus} \to (T \uplus P)^{\oplus})$ mit $s := [pre^{\oplus}, id_{P^{\oplus}}]$ und $t := [post^{\oplus}, id_{P^{\oplus}}]$. Dabei ist $id_{P^{\oplus}}$ die Identität auf $P^{\oplus}$ in und $idle$ die Einbettung von $P^{\oplus}$ in $(T \uplus P)^{\oplus}$.

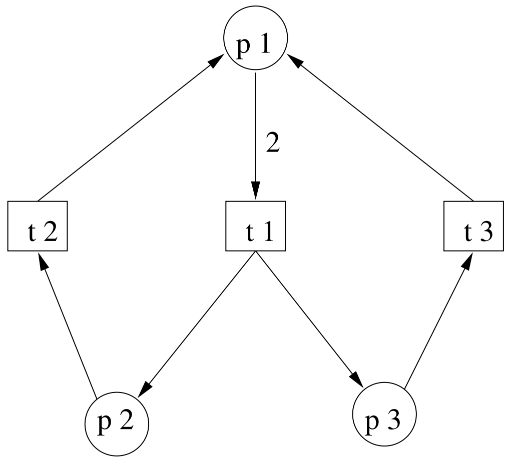
Die Menge der Transitionen $(T \uplus P)^{\oplus}$ (die Schaltschritte des Netzes N darstellen) setzt sich dabei zusammen aus den ursprünglichen Transitionen $T^{\oplus}$, des (nichtreflexiven) freien S/T-Monoids R, disjunkt vereinigt mit den reflexiven Transitionen, die $P^{\oplus}$ aus R entsprechen. Sie ist also das Koprodukt von $T^{\oplus}$ und $P^{\oplus}$ in der Kategorie **CMon**. $[pre^{\oplus}, id_{P^{\oplus}}]$ und $[post^{\oplus}, id_{P^{\oplus}}]$ bilden jede normale Transition (aus $T^{\oplus}$) auf ihren Quell- bzw. Zielknoten ab und jede reflexive Transition p (aus $P^{\oplus}$) auf den dazugehörigen Identitätsknoten p. Die eckigen Klammern zeigen, daß je nach abgebildetem Objekt aus $T \uplus P$ eine der zwei angegebenen Abbildungen genommen wird, z.B. $t_1 \overset{[pre^{\oplus}, id_{P^{\oplus}}]}{\mapsto} pre(t_1)$, $p_1 \overset{[pre^{\oplus}, id_{P^{\oplus}}]}{\mapsto} p_1$ und $t_1 \oplus p_1 \overset{[pre^{\oplus}, id_{P^{\oplus}}]}{\mapsto} pre(t_1) \oplus p_1$.

Satz 7.18
$((T \uplus P)^{\oplus}, \lambda, \oplus)$ ist Koprodukt von $(T^{\oplus}, \lambda, \oplus)$ und $(P^{\oplus}, \lambda, \oplus)$ in **CMon**.

Beweis: Weil Koprodukte von freien Funktoren bewahrt werden, siehe Satz 7.9. □

Der Markierungsgraph hat also die gleiche Knotenmenge wie das S/T-Netz. Seine Kantenmenge setzt sich zusammen aus einfachen, reflexiven und parallelen Transitionen. Eine Kante hat die Form: $(t_1, 1) \oplus (t_2, 1) \oplus ... \oplus (t_n, 1) \oplus (p_1, 2) \oplus (p_2, 2) \oplus ... \oplus (p_m, 2)$ mit $p_i \in P,\ t_i \in T$. Wenn T und P keine gemeinsamen(gleichnamigen) Elemente enthalten, dann ist die disjunkte Vereinigung bis auf Umbenennung gleich mit (isomorph zu) der Vereinigung der Mengen P und T. Der Einfachheit halber wollen wir diesen Fall annehmen. Dann haben wir Kanten der Form: $t_1 \oplus t_2 \oplus ... \oplus t_n \oplus p_1 \oplus p_2 \oplus ... \oplus p_m$ mit $p_i \in P,\ t_i \in T$.

Beispiel 7.19 (Konstruktion von $MG(N)$)
Sei N:



also

P = { p 1, p 2, p 3}
T= { t 1, t 2, t 3 }

pre : t 1 $\longrightarrow$ 2 p 1
t 2 $\longrightarrow$ p 2
t 3 $\longrightarrow$ p 3

post : t 1 $\longrightarrow$ p 2 + p 3
t 2 $\longrightarrow$ p 1
t 3 $\longrightarrow$ p 1

Dann ist $MG(N)$: $(T \uplus P)^{\oplus} = \{\lambda, t_1, t_2, t_3, p_1, p_2, p_3, t_1 \oplus t_2, t_1 \oplus p_1, 2t_1 \oplus t_2 \oplus p_2, ...\}$

$$
\begin{array}{ll}
s: & t_1 \mapsto 2p_1 \\
 & 2t_1 \mapsto 4p_1 \\
 & ... \\
 & 2t_1 \oplus p_2 \mapsto 4p_1 \oplus p_2 \\
 & ... \\
 & t_2 \mapsto p_2 \\
 & t_1 \oplus t_2 \mapsto 2p_1 \oplus p_2 \\
 & t_1 \oplus 2t_2 \oplus p_3 \mapsto 2p_1 \oplus 2p_2 \oplus p_3 \\
 & ...
\end{array}
$$

und t analog.

Graphisch darstellen läßt sich der Markierungsgraph nur als Ausschnitt, da $(T \uplus P)^{\oplus}$ unendlich ist (siehe Abb. 7.1)

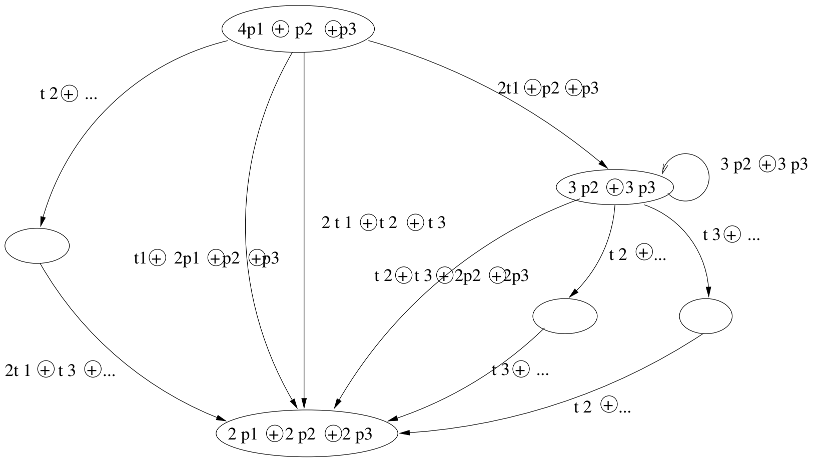
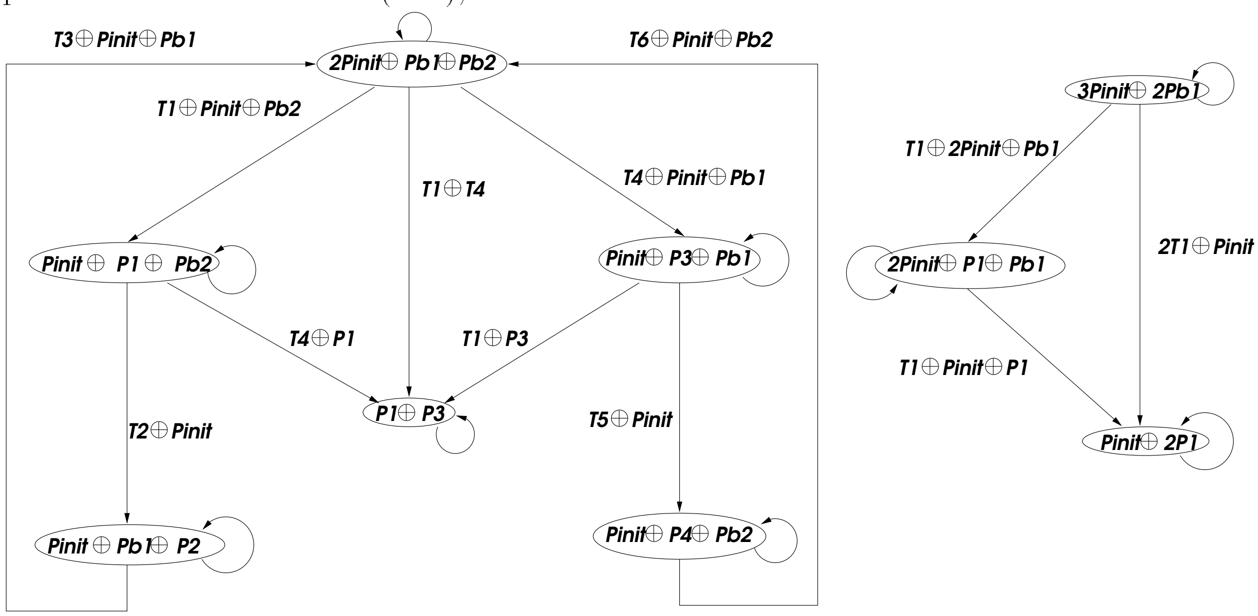


Abbildung 7.1: Ausschnitt des Markierungsgraphen

Beispiel 7.20
Wir erweitern den sequentiellen Erreichbarkeitsgraphen aus Abbildung 1.6 auf Seite 16 des Deadlock-Netzes aus Abbildung 1.5 von Seite 16, der ja Teilgraph des Markierungsgraphen ist, um parallele Transitionen und erhalten damit zunächst den parallelen Erreichbarkeitsgraphen (ebenfalls Teilgraph des Markierungsgraphen). Der vollständige (unendliche) Markierungsgraph enthält zusätzlich noch unendlich viele ähnliche „parallele Erreichbarkeitsgraphen", die sämtlichen anderen möglichen Anfangsmarkierungen entsprechen. Wir geben beispielhaft zwei „parallele Erreichbarkeitsgraphen" an: den zur Markierung M_0 und den zur Markierung $M = 3Pinit \oplus 2Pbl$, der zwar paralleles Schalten zuläßt (2T1), aber dann sofort in einer Deadlock-Situation endet:



Der Markierungsgraph als Funktor

Die Konstruktion des Markierungsgraphen läßt sich auch funktoriell beschreiben. Wir zeigen, daß der Funktor $F : \mathbf{PT} \to \mathbf{RMGraph}$ mit $F(N) = M[N]$ freie Konstruktion ist bezüglich eines Vergißfunktors $V : \mathbf{RMGraph} \to \mathbf{PT}$, der reflexive Transitionen und parallele Komposition von Transitionen „vergißt" und somit zu jedem reflexiven S/T-Monoid ein S/T-Netz liefert.

Der freie Funktor $F : \mathbf{PT} \to \mathbf{RMGraph}$ liefert für jedes S/T-Netz den entsprechenden Markierungsgraphen. Er wird als *kompositionale Semantik* von S/T-Netzen bezeichnet, da freie Funktoren Kolimiten wie Koprodukte, Koegalisatoren und Pushouts bewahren. Das bedeutet, daß S/T-Netze, die über Kolimiten in der Kategorie **PT** komponiert werden, denselben Markierungsgraphen haben wie die Komposition der Markierungsgraphen der Komponenten-S/T-Netze in **RMGraph**.

Definition 7.21 (Vergißfunktor $V : \mathbf{RMGraph} \to \mathbf{PT}$)
Der Vergißfunktor $V : \mathbf{RMGraph} \to \mathbf{PT}$ ist gegeben durch:

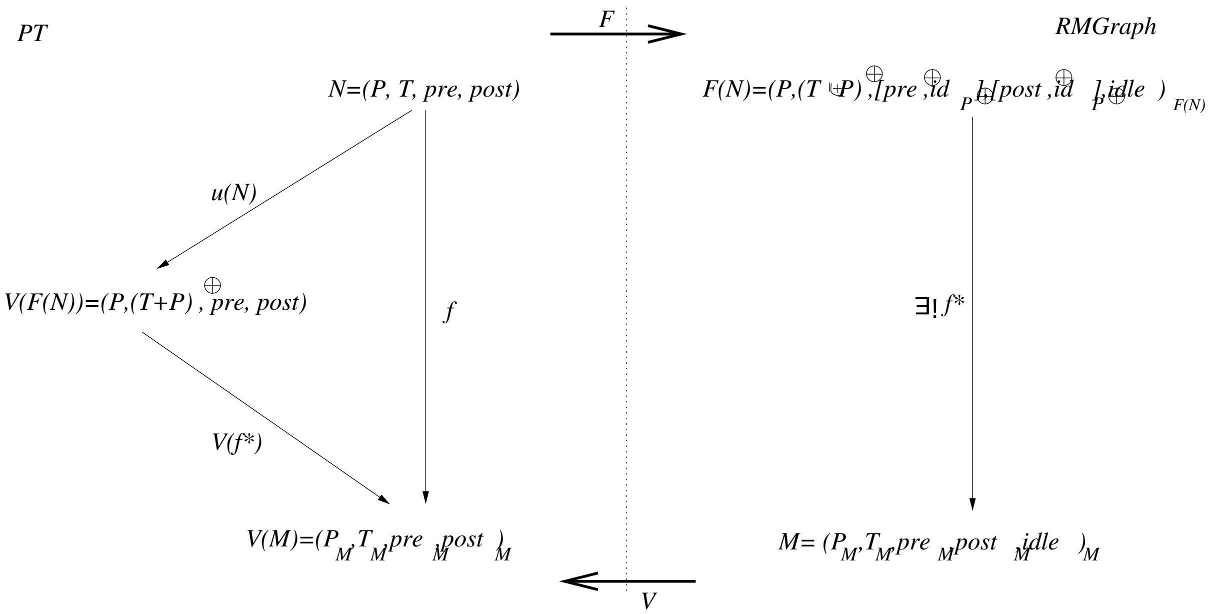
$$V(P, T, pre, post : (T, \epsilon, \bullet) \to (P^{\oplus}, \lambda, \oplus), idle : (P^{\oplus}, \lambda, \oplus) \to (T, \epsilon, \bullet)) := (P, T, pre, post : T \to P^{\oplus})$$

und $V((f_P, f_T)) := (f_P, f_T)$
Funktoreigenschaften sind offensichtlich erfüllt.

Satz 7.22 (Freie Konstruktion über PT)
Es gibt einen freien Funktor $F : \mathbf{PT} \to \mathbf{RMGraph}$, der für jedes S/T-Netz seinen Markierungsgraphen liefert, also $F(N) = M[N]$ ist frei, bezüglich des Vergißfunktors $V : \mathbf{RMGraph} \to \mathbf{PT}$.

Beweis: Zu zeigen ist, daß die Konstruktion $(F(N), u(N))$ frei bezüglich des Vergißfunktors V ist, wobei $u(N) : N \to V(F(N))$, $u(N) = (id_P, inj_T)$ mit der Identität $id_P : P \to P$ und die Injektion $inj_T : T \to (T \uplus P)^{\oplus}$ Dabei ist $inj_T(t) = (t, 1) \in (T \uplus P)^{\oplus}$ wenn $T \uplus P$ das kanonische Koprodukt ist, also die disjunkte Vereinigung.

Und zwar ist zu zeigen, daß für alle $N \in \mathbf{PT}$ und für alle $M \in \mathbf{RMGraph}$ mit $f : N \to V(M)$ gilt: $\exists! f^* : F(N) \to M$, so daß $V(f^*) \circ u = f$.



- **Definition von $f^* = (f_P^*, f_T^*)$:$F(N) \to M$**
  Wir haben
  $F(N) = (P, (T \uplus P)^\oplus, [pre^\oplus, id_P^\oplus], [post^\oplus, id_P^\oplus], idle_{F(N)})$
  $M = (P_M, T_M, pre_M, post_M, idle_M)$ und
  $f : N = (P, T, pre, post) \to V(M) = (P_M, T_M, pre_M, post_M)$
  Es sei $f_P^* := f_P$.
  Dann gilt die gewünschte Eigenschaft für die P-Komponenten der Morphismen:
  $V(f^*)_P \circ u(N)_P \overset{Def\ V,u(N)}{=} f_P^* \circ id_P = f_P^* = f_P$ (1)
  Wir definieren f_T^* als den Koproduktmorphismus in **CMon** des Koproduktes $((T \uplus P)^\oplus, \lambda, \oplus)$ (mit den Morphismen $inj_{P^\oplus}$,$inj_{T^\oplus}$) der Monoide $(P^\oplus, \lambda, \oplus)$ und $(T^\oplus, \lambda, \oplus)$ bezüglich des Monoids $(T_M, \epsilon, \bullet)$ und den Morphismen $idle_M \circ f_P^\oplus$ und $f_T^\oplus$.

$$\begin{tikzcd}
(P^\oplus, \lambda, \oplus) \arrow[r, "inj_{P^\oplus}"] \arrow[dr, "idle_M \circ f_P^\oplus"'] & ((T \uplus P)^\oplus, \lambda, \oplus) \arrow[d, "f_T^*"] & (T^\oplus, \lambda, \oplus) \arrow[l, "inj_{T^\oplus}"'] \arrow[dl, "f_T^\oplus"] \\
 & (T_M, \epsilon, \bullet) &
\end{tikzcd}$$

  Dann gilt in **CMon**: $f_T^* \circ inj_T = f_T^\oplus$ und $f_T^* \circ inj_{P^\oplus} = idle_M \circ f_P^\oplus$

  ***f** ist wohldefiniert in RMGraph**:
  $pre_M \circ f_T^* \overset{Def.\ f_T^*}{=} [pre_M \circ f_T^\oplus, pre_M \circ idle_M \circ f_P^\oplus] \overset{Def\ 7.14}{=} [pre_M \circ f_T^\oplus, id_{P^\oplus} \circ f_P^\oplus]$
  $\overset{f\ \mathbf{PT}-Morphismus}{=} [f_P^\oplus \circ pre^\oplus, f_P^\oplus] = f_P^\oplus \circ [pre^\oplus, id_{P^\oplus}]$
  Analog gilt für *post*: $post_M \circ f_T^* = f_P^\oplus \circ [post^\oplus, id_{P^\oplus}]$

- ***V(f*) ∘u(N)=f***
  $V(f^*) = f^*$, da die zugrundeliegenden Mengen sich durch V nicht ändern.
  $(V(f^*) \circ u(N))_P = f_P$ laut (1).
  Außerdem gilt:
  $(V(f^*) \circ u(N))_T = V(f^*)_T \circ u(N)_T \overset{Def\ V}{=} f_T^* \circ u(N)_T \overset{Def\ f_T^*}{=} f_T$.

- **Eindeutigkeit von *f****
  Sei $(g_P, g_T) : F(N) \to M$ mit der Fortsetzung $g_P^\oplus : P^\oplus \to P_M^\oplus$ und dem Monoidhomomorphismus $g_T : (T \uplus P)^\oplus \to (T_M, \epsilon, \bullet)$ ein weiterer Morphismus in **RMGraph**, für den gilt:
  $V((g_P, g_T)) \circ u(N) = f$. Das bedeutet:
  $V((g_P, g_T)) \circ (id_{P^\oplus}, inj_T) = (g_P, g_T) \circ (id_{P^\oplus}, inj_T) = (f_P, f_T)$
  und also gilt: $g_P \circ id_{P^\oplus} = g_P = f_P$ (2)
  und $\quad g_T \circ inj_T = f_T = f_T^* \circ inj_T$
  Außerdem ist $g_T \circ inj_P^\oplus \overset{Def.7.14}{=} g_T \circ idle_{F(N)} = idle_M \circ g_P^\oplus$, da g Morphismus in **RMGraph**. Damit können wir aus der Eindeutigkeit von f_T^* (als Koproduktmorphismus) die Gleichheit $g_T = f_T^*$ schließen. Mit (2) gilt $g = f^*$.

□

Kapitel 8

Algebraische High-Level-Netze

Einleitung

Petrinetze wurden im Laufe der Zeit in verschiedenen Richtungen erweitert. Der Mangel, daß Daten nur als ununterscheidbare Token dargestellt werden können hat zum Entstehen komplexerer Netztypen geführt, wie Coloured Petri Nets (siehe [Jen81],[Jen92]) und Algebraische High-Level-Netze. Diese Netze, auch High-level Petrinetze genannt, sind eine Integration von Datentypbeschreibungen (durch die funktionale Sprache ML bzw. algebraische Spezifikationen) und Petrinetzen.

In der folgenden Tabelle ist eine Übersicht von High-Level-Netzen angegeben, in der verschiedene Eigenschaften des Netzes andeutungsweise erörtert werden.

	Coloured PN 81	Pred/Trans N	Coloured PN 92	AHL-Netze
Daten	indiz. Mengen	Pred.Logik	ML	Alg. Spez
Netz	S/T	elementare Netze	S/T	S/T
Komm. Tools	-	-	Design CPN	-
Schaltbed.	Colour Set	Formeln	Boolsche Terme	Gleichungen
Strukturierung	-	-	Hierarchie	Union, Fusion
Verfeinerung	-	-	-	Regelbasierte Mod.
Ziel	Auffaltung	Auffaltung	Spezifikation	Spezifikation
Einsatz	Theorie	Theorie	SW-Engineering	Theorie/SWE

Wir werden im Folgenden den Ansatz auf die algebraischen High-Level-Netze näher eingehen.

In dieser Darstellung wird eine Trennung zwischen Ablauf- und Datenmodellierung durch eine direkte Darstellung der Daten (die man bei Petri-Netzen in das Verhalten des Netzes kodieren müßte) erreicht.

Zur Spezifikation verteilter Systeme sind Formalismen geeignet, die folgenden Anforderungen genügen:

1. Echte Nebenläufigkeit (soll dargestellt werden können)

2. Integration von Datentypen (soll möglich sein)

3. Existenz horizontaler Strukturierungskonzepte (wie Union und Fusion)

4. Existenz vertikaler Strukturierungskonzepte (Verfeinerung)

5. Graphische Darstellung

6. Verständlichkeit

Petri-Netze (Stellen-Transitions-Netze) können echte Nebenläufigkeit darstellen und haben eine graphische Darstellung, algebraische Spezifikationen sind zur Beschreibung von Datentypen geeignet und Kategorielle Ersetzungssysteme stellen Strukturierungskonzepte zur Verfügung. Algebraische High-Level-Netze stellen eine Integration dieser drei Formalismen dar, mit dem Ziel den angegebenen Anforderungen zu genügen.

Im Folgenden werden Algebraische High-Level Netze definiert und dazu Strukturierungstechniken, die das Schaltverhalten bewahren, vorgestellt (d. h. alle Schaltschritte der Ursprungsnetze (bei Union) bzw. des Ursprungsnetzes (bei Fusion) werden im Ergebnisnetz wiedergefunden).

8.1 Formale Definition

Definition 8.1 (AHL-Netz)
Ein AHL-Netz ist ein Tupel $AN = (SPEC, P, T, pre, post, cond, A)$, wobei:

- $SPEC = (S, OP, E)$ eine algebraische Spezifikation
- P, T Mengen von Stellen und Transitionen
- $pre, post : T \to (T_{OP}(X) \times P)^{\oplus}$ Vor- und Nachbereich von Transitionen
- $cond : T \to P_{fin}(Eqns(S, OP))$ Schaltbedingungen von Transitionen
- A eine $SPEC$-Algebra

darstellen.

Schaltverhalten von AHL-Netzen

Um das Schaltverhalten von AHL-Netzen formal zu definieren sind einige Vorbereitungen notwendig.

Definition 8.2 (Markierung)
Gegeben sei ein AHL-Netz $N = (SPEC, P, T, pre, post, A, cond)$. Dann ist eine Markierung M von N gegeben als ein Element von:

$$PV = (\biguplus_{s \in S} A_s \times P)^{\oplus}$$

Dabei ist $\biguplus_{s \in S} A_s$ die disjunkte Vereinigung aller Trägermengen der Algebra.

Wir bezeichnen im Folgenden die Variablen, die mit einer Transition zu tun haben, als $Var(t)$ und untersuchen, wann das Schalten einer Transition möglich ist, also wann die Variablen $Var(t)$ so belegbar sind, daß die zur Transition gehörenden Bedingungen erfüllt werden.

Definition 8.3 (Konsistente Transitionsbelegungen)
Sei N ein AHL-Netz. Die Menge der konsistenten Transitionsbelegungen ist:
$CT = \{(t, asg) | t \in T, asg : Var(t) \to \biguplus_{s \in S} A_s,$
so daß die Gleichungen $cond(t)$ von den Datenelementen in $\biguplus_{s \in S} A_s$
unter der Belegung asg erfüllt sind$\}$

Diese Transitionsbelegungen können dazu benutzt werden, Funktionen zu definieren, die die Datenelemente liefern, die beim Schalten einer Transition aus ihrem Vorbereich abgezogen bzw. in ihrem Nachbereich hinzugefügt werden.

Definition 8.4 (A-induzierte Funktionen (pre_A und $post_A$))
Seien das Netz N und A, PV, CT definiert wie vorhin. Dann sind die A-induzierten Funktionen $pre_A, post_A : CT \to PV$ von N definiert für alle $(t, asg) \in CT$ durch:

$$pre_A(t, asg) = ASG(pre(t)) \quad \text{und}$$

$$post_A(t, asg) = ASG(post(t))$$

Dabei ist $ASG : (T_{OP}(Var(t)) \times P)^{\oplus} \to (\biguplus_{s \in S} A_s \times P)^{\otimes}$ definiert durch $ASG(term, p) = (\overline{asg}(term), p)$ für alle $p \in P$ und $term \in T_{OP}(Var(t))$,
wobei $\overline{asg} = xeval(asg)$ die erweiterte Termauswertung ist.

Bemerkung: Die Funktion ASG ist (genauso wie pre_A und $post_A$) nur in Abhängigkeit von dem bestimmten asg aus der konsistenten Transitionsbelegung gegeben (auch wenn asg nicht als explizites Argument von ASG angegeben ist). Wir werden diesen Zusammenhang durch Indizes andeuten, wenn Gefahr für falsche Interpretationen besteht.

Nun sind die Voraussetzungen zur Definition des Schaltverhaltens erfüllt.

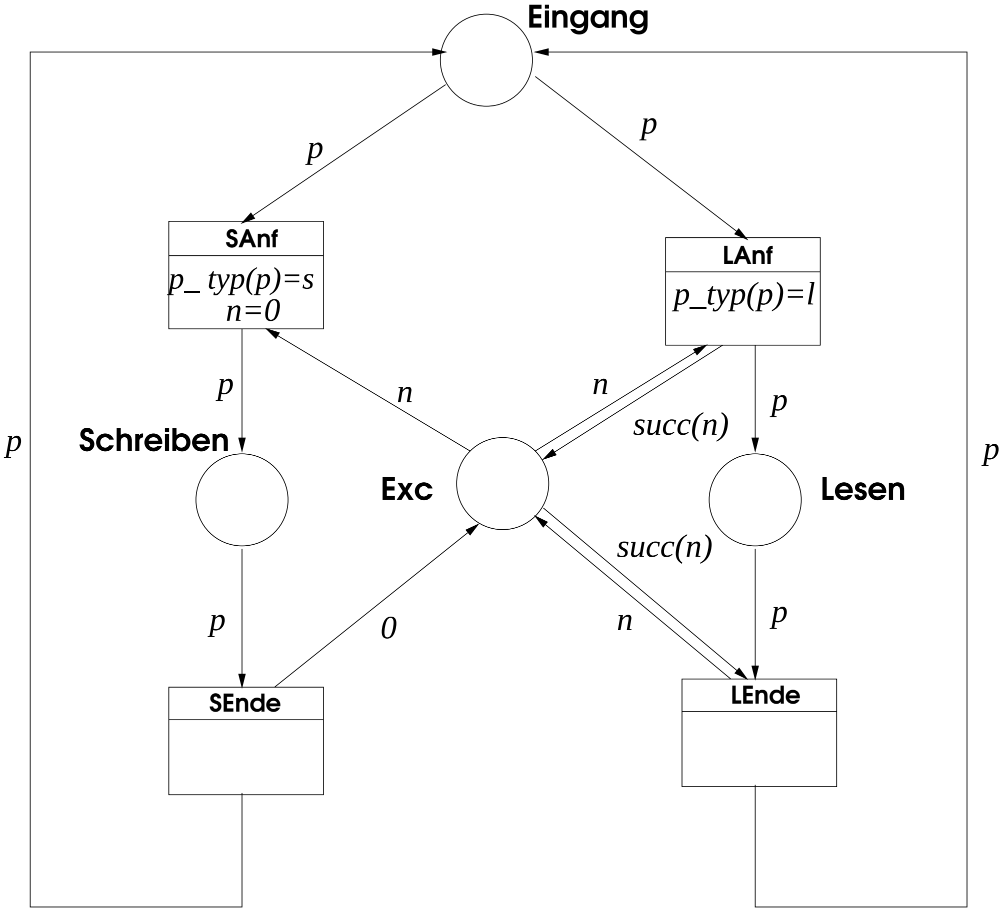
Definition 8.5 (Aktivierung)
Eine Transition t, zusammen mit einer Variablenbelegung asg ist unter der Markierung $M \in PV$ (siehe auch Definition 8.2) aktiviert, falls

$$pre_A(t, asg) \leq M$$

Definition 8.6 (Schaltverhalten(Folgemarkierung))
Seien eine Markierung $M \in PV$ und eine konsistente Transitionsbelegung $(t, asg) \in CT$ (siehe Definition 8.3) eines AHL-Netzes N gegeben und sei t unter asg aktiviert. Dann ist die Folgemarkierung $M' \in PV$ von M definiert durch

$$M' = (M \ominus pre_A(t, asg)) \oplus post_A(t, asg).$$

Beispiel 8.7
Wir bauen ein Leser-Schreiber-(Teil-)Netz mit beliebig vielen Lesern und Schreibern und erläutern das Schaltverhalten. Wir modifizieren das Netz aus Abbildung 14 aus dem ersten Kapitel leicht, indem wir die Zwischenzustände entfernen, die signalisieren, daß der Prozeß mit dem Lesen bzw. Schreiben beginnen kann (die Stellen Plb und Psb werden entfernt zusammen mit den Transitionen in deren Vorbereich). Wir erweitern es so, daß es die Anzahl der lesenden oder schreibenden Prozesse kennt und mit den der Problemstellung entsprechenden Schaltbedingungen. Dazu geben wir eine Spezifikation und eine Algebra an.



Leser-Schreiber-Netz mit beliebig vielen Lese- und Schreibprozessen

LS-SPEC=	sorts:	nat,	prozeß, typ
	opns:	succ:	nat $\rightarrow$ nat
		0:	$\rightarrow$nat
		s:	$\rightarrow$typ
		l:	$\rightarrow$typ
		p_typ:	prozeß$\rightarrow$ typ
		p_id:	prozeß$\rightarrow$nat
		p_init:	typ $\times$ nat $\rightarrow$ prozeß

Es sei nun die Variablenmenge X={n:nat, p:prozeß}

Die Algebra zum AHL-Netz sei:
$A = (\mathbb{N}, \mathbb{N} \times \{ls, sr\}, \{ls, sr\}, succ_A, 0_A, s_A, l_A, X)$ wobei:

$$succ_A(x) = x + 1$$
$$l_A := ls$$
$$s_A := sr$$
$$0_A = 0 \in \mathbb{N}$$
$$p\_typ_A(p) = \begin{cases} ls & p = (n, ls) \\ sr & sonst \end{cases}$$

Nun geben wir eine Markierung M an und führen einen Schaltschritt vor.

$$M := ((1, ls), Eingang) \oplus ((2, ls), Eingang) \oplus ((3, sr), Eingang) \oplus (0, Exc)$$

Dann können die Transitionen **LAnf** und **SAnf** schalten, wir betrachten den ersten Fall. Es sei:

$$asg = \{p \mapsto (1, ls), n \mapsto 0\}.$$

$(LAnf, asg)$ ist eine konsistente Transitionsbelegung, da

$$\overline{asg}(p\_typ(p)) = p\_typ_A(asg(p)) = ls = l_A = \overline{asg}(l).$$

$pre_A(LAnf, asg) = ASG(pre(LAnf)) = ASG((p, Eingang) \oplus (n, Exc))$
$= (\overline{asg}(p), Eingang) \oplus (\overline{asg}(n), Exc)$
$= ((1, ls), Eingang) \oplus (0, Exc)$,
d. h. $pre_A(LAnf, asg) \leq M$ und damit ist $LAnf$ aktiviert unter asg.
$post_A(LAnf, asg) = ASG(post(LAnf)) = ASG((p, Lesen) \oplus (succ(n), Exc))$
$= (\overline{asg}(p), Lesen) \oplus (\overline{asg}(succ(n), Exc)$
$= ((1, ls), Lesen) \oplus (succ_A(0), Exc)$
$= ((1, ls), Lesen) \oplus (1, Exc)$
Die Folgemarkierung M' von M beim Schalten von $LAnf$ ist:
$M' \quad = M \ominus pre_A \oplus post_A =$
$= ((2, ls), Eingang) \oplus ((3, sr), Eingang) \oplus ((1, ls), Lesen) \oplus (1, Exc)$
Nach diesem Schaltschritt können nur noch **LEnde** (mit $asg_1 = \{p \mapsto (1, ls), n \mapsto 0\}$) und **LAnf** (mit $asg_2 = \{p \mapsto (2, ls), n \mapsto 1\}$) schalten. Schreiberprozesse müssen warten, bis n (die Anzahl der Leser) wieder mit 0 aktualisiert werden kann.
Hätte bei M ein Schreiberprozess angefangen zu schreiben, dann würde auf der Stelle **Exc** kein Token mehr vorhanden sein und **LAnf** könnte nicht schalten.

8.2 Strukturierungstechniken bei AHL-Netzen

In diesem Kapitel definieren wir die Kategorie **AhlNet** der AHL-Netze. Zunächst wollen wir AHL-Netz Morphismen definieren und zeigen, daß sie Schaltverhalten bewahren. Danach wird erläutert, welche Techniken horizontaler Strukturierung durch die Kovollständigkeit von **AhlNet** ermöglicht werden.

Wir werden bei der Definition der Morphismen der Kategorie den Spezialfall betrachten, in dem die Spezifikation und die Algebra der Netze, zwischen denen Morphismen existieren, übereinstimmen. Die im Folgenden bewiesene Theorie gilt allerdings auch für den allgemeinen Fall.

Definition 8.8 (AHL-Netz-Morphismen)
Gegeben zwei AHL-Netze $N_i = (SPEC, P_i, T_i, pre_i, post_i, cond_i, A)$ für $i = 1,2$, dann ist ein **AhlNet**-Morphismus ist ein Tupel

$$f = (f_P : P_1 \to P_2, f_T : T_1 \to T_2) : N_1 \to N_2$$

mit der Eigenschaft, daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
 & T_1 \arrow[r, shift left, "pre_1"] \arrow[r, shift right, "post_1"'] \arrow[dl, "cond_1"'] \arrow[dd, "f_T"'] \arrow[ddr, phantom, "(=)"] & (T_{OP}(X) \times P_1)^{\oplus} \arrow[dd, "(id_{T_{OP}(X)} \times f_P)^{\oplus}"] \\
\mathcal{P}_{fin}(Eqns(S, OP)) \arrow[r, phantom, "(=)"] & {} & \\
 & T_2 \arrow[r, shift left, "pre_2"] \arrow[r, shift right, "post_2"'] \arrow[ul, "cond_2"] & (T_{OP}(X) \times P_2)^{\oplus}
\end{tikzcd}$$

also daß $cond_1 = cond_2 \circ f_T$ und $pre_2 \circ f_T = (id_{T_{OP}(X)} \times f_P)^{\oplus} \circ pre_1$ und für *post* analog.

Definition 8.9 (Kategorie AhlNet)
Die Kategorie **AhlNet**$=(Ob_{\mathbf{AhlNet}}, Mor_{\mathbf{AhlNet}}, \circ_{\mathbf{AhlNet}}, id_N)$ ist gegeben durch:

- $Ob_{\mathbf{AhlNet}} = \{N \mid N$ ist Ahl-Netz$\}$, die Klasse der AHL-Netze
- $Mor_{\mathbf{AhlNet}}$ die Menge der AHL-Netz-Morphismen
  Die Menge der Morphismen zwischen zwei Netzen N_1 und N_2 ist dann:
  $Mor_{\mathbf{AhlNet}}(N_1, N_2) = \{f : N_1 \to N_2 = (f_T, f_P) \mid f$ AHL-Netz-Morphismus$\}$,
- $\circ_{\mathbf{AhlNet}}$: Die Komposition ist genauso definiert wie für **PT**-Morphismen.
  $\forall f : N_1 \to N_2,\ g : N_2 \to N_3 : g \circ_{\mathbf{AhlNet}} f = g \circ_{\mathbf{PT}} f$
- $id_N = (id_P, id_T)$ Die Identität ist komponentenweise definiert auf P und T.

Daß **AhlNet** tatsächlich eine Kategorie ist, kann analog zu dem Beweis für die Kategorie **PT** bewiesen werden.

Satz 8.10 (AHL-Netz-Morphismen bewahren Schaltverhalten)
Gegeben ein AHL-Netz-Morphismus $f : N_1 \to N_2$, wobei
$N_i = (SPEC, P_i, T_i, pre_i, post_i, cond_i, A)$, CT_i die Menge der konsistenten Transitionsbelegungen und M_1 die Markierung des Netzes N_1 für $i = 1,2$, dann gilt:

1. Bewahrung der Aktivierung
   Wenn $(t_1, asg_1) \in CT_1$ und $pre_{1A}(t_1, asg_1) \geq M_1$, dann
   $(f_T(t_1), asg_1) \in CT_2$ und $pre_{2A}(f_T(t_1), asg_1) \geq M_1' := (id_A \times f_P)^{\oplus}(M_1)$

2. Ein Schaltschritt $M_1 \xrightarrow{(t,asg)} M_2$ in N_1 impliziert den Schaltschritt $(id_A \times f_P)^{\oplus}(M_1) \xrightarrow{(f_T(t),asg)} (id_A \times f_P)^{\oplus}(M_2)$ in N_2, wobei $id_A = id_{\biguplus_{s\in S} A_s}$

Beweis:

1. Für $(t_1, asg_1) \in CT_1$ gilt $(f_T(t_1), asg_1) \in CT_2$, da die Bedingungen $cond_2(f_T(t_1)) = cond_1(t_1)$ laut Voraussetzung erfüllt sind. (1.1)

   Aus der Definition der AHL-Netz-Morphismen kann die Kommutativität des Diagramms (1) geschlossen werden:

$$\begin{tikzcd}
 & T_1 \arrow[r, shift left, "pre_{A1}"] \arrow[r, shift right, "post_{A1}"'] \arrow[dl, "cond_1"'] \arrow[dd, "f_T"] \arrow[ddr, phantom, "(1)"] & (\biguplus_{s\in S} A_s \times P_1)^{\oplus} \arrow[dd, "(id_A\times f_P)^{\oplus}"] \\
\mathcal{P}_{fin}(Eqns(S,OP)) \arrow[r, phantom, "(=)"] & \, & \\
 & T_2 \arrow[r, shift left, "pre_{A2}"] \arrow[r, shift right, "post_{A2}"'] \arrow[ul, "cond_2"] & (\biguplus_{s\in S} A_s \times P_2)^{\oplus}
\end{tikzcd}$$

   Formal haben wir:

$$\begin{aligned}
(id_A \times f_P)^{\oplus} \circ pre_{A1} &= (id_A \times f_P)^{\oplus} \circ (\overline{asg} \times id_{P_1})^{\oplus} \circ pre_1 && \text{laut Definition 8.4}\\
&= (id_A \circ \overline{asg} \times f_P \circ id_{P_1})^{\oplus} \circ pre_1 && \text{da } \circ \text{ distributiv bezüglich } \times \text{ ist}\\
&= (\overline{asg} \circ id_{T_{OP}(X)} \times id_{P_2} \circ f_P)^{\oplus} \circ pre_1 && \text{Identitäten ändern nichts}\\
&= (\overline{asg} \times id_{P_2})^{\oplus} \circ (id_{T_{OP}(X)} \times f_P)^{\oplus} \circ pre_1 &&\\
&= (\overline{asg} \times id_{P_2})^{\oplus} \circ pre_2 \circ f_T && f \text{ AHL-Morphismus}\\
&= pre_{A2} \circ f_T = pre_{A2} \circ f_T
\end{aligned}$$

   Da $(id_A \times f_P)^{\oplus}$ monoton ist, gilt infolge der Voraussetzung und aufgrund der Kommutativität von (1) folgende Ungleichung:
   $M_1' = (id_A \otimes f_P)^{\oplus}(M_1) \leq (id_A \otimes f_P)^{\oplus} \circ pre_{A1}(t_1, asg_1) \overset{(1)}{=} pre_{2A}(f_T(t_1), asg_1)$,
   was zu zeigen war (für *post* analog). (1.2)
   Aus (1.1) und (1.2) folgt der erste Teil der Behauptung 8.10.1.

2. Die Bewahrung der einzelnen Schaltschritte gilt, da:

$$\begin{aligned}
&(id_A \times f_P)^{\oplus}(M_2) \overset{\text{Def. 8.6}}{=}\\
&\quad = (id_A \times f_P)^{\oplus}(M_1 \ominus pre_{A1}(t, asg) \oplus post_{A1}(t, asg))\\
&\quad = (id_A \times f_P)^{\oplus}(M_1) \ominus (id_A \times f_P)^{\oplus}(pre_{A1}(t, asg)) \oplus (id_A \times f_P)^{\oplus}(post_{A1}(t, asg))\\
&\quad = M_2 \ominus pre_{A2}(f_T(t), asg) \oplus post_{A2}(f_T(t), asg) && \text{da (1) kommutativ ist}
\end{aligned}$$

□

Die Kategorie **AhlNet** hat Pushouts und Koegalisatoren, was analog zu den Beweisen in Kapitel 5 der Sätze 5.14 und 5.19 gezeigt werden kann. Entsprechend können wir nun Union und Fusion für AHL-Netze definieren. Der Beweis der Verträglichkeit von Union und Fusion kann auch analog zu dem des Satzes 5.22 geführt werden.

Definition 8.11 (Union von AHL-Netzen)
Die Union von AHL-Netzen N_1, N_2 über ein Interface I mit $N_1 \overset{f_1}{\leftarrow} I \overset{f_2}{\rightarrow} N_2$ ist durch ein Pushout in **AhlNet** $N_1 \overset{g_1}{\rightarrow} N \overset{g_2}{\leftarrow} N_2$ von f_1 und f_2 gegeben und wird $N_1, N_2 \overset{I}{\rightarrowtail} N$ bezeichnet.

Satz 8.12 (Pushouts in AhlNet)
Die Kategorie **AhlNet** hat Pushouts.

Beweisidee
Da die Morphismen in **AhlNet** genauso definiert sind wie in **PT** läuft der Beweis analog wie in der genannten Kategorie (Satz 5.14).

Definition 8.13 (Fusion von AHL-Netzen)
Die Fusion eines Netzes N bezüglich eines Netzes F, das über zwei Morphismen in N eingebettet ist $(f, g : F \to N)$, ist durch den Koegalisator in **AhlNet** $c : N \to N'$ von f und g gegeben, und wird mit $N \circ\!\!\xrightarrow{F} N'$ bezeichnet.

Satz 8.14 (Koegalisatoren in AhlNet)
Die Kategorie **AhlNet** hat Koegalisatoren.

Beweisidee
Der Beweis läuft analog wie in **PT** (siehe Satz 5.19).

Literaturverzeichnis

[AHS90] J. Adamek, H. Herrlich, and G. Strecker. *Abstract and Concrete Categories*. Series in Pure and Applied Mathematics. John Wiley and Sons, 1990.

[AM75] M. Arbib and E.G. Manes. *Arrows, Structures, and Functors: The Categorical Imperative*. Academic Press, New York, 1975.

[BCM88] E. Battiston, F. De Cindio, and G. Mauri. OBJSA nets: a class of high-level nets having objects as domains. In G. Rozenberg, editor, *Advances in Petri nets*, volume 340 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 20–43. Springer Verlag Berlin, 1988.

[Bil89] Billington, J. Many-sorted High-Level Nets. In *Proc. 3rd Int. Workshop on Petri Nets and Performance Models*, pages 166–179. IEEE Computer Society Press, Kyoto, 1989.

[BW90] M. Barr and C. Wells. *Category Theory for Computing Science*. Series in Computer Science. Prentice Hall International, London, 1990.

[EGRW95] H. Ehrig, M. Große-Rhode, and U. Wolter. On the Role of Category Theory in the Area of Algebraic Specifications. Technical Report Bericht-Nr. 95-27, TU Berlin, FB Informatik, November 1995.

[EGRW96] H. Ehrig, M. Große-Rhode, and U. Wolter. On the Role of Category Theory in the Area of Algebraic Specifications. In M. Haveraaen, O. Owe, and O.-J. Dahl, editors, *Recent Trends in Data Type Specification*, pages 17–48. 11th Workshop on Specification of Abstract Data Types, WADT11, Oslo Norway, September 1995, Springer, LNCS 1130, 1996.

[EPR94a] H. Ehrig, J. Padberg, and L. Ribeiro. Algebraic high-level nets: Petri nets revisited. In *Recent Trends in Data Type Specification*, pages 188–206. Springer Verlag, 1994. Lecture Notes in Computer Science 785.

[EPR94b] H. Ehrig, J. Padberg, and G. Rozenberg. Behaviour and realization construction for petri nets based on free monoid and power set graphs. Technical report, Technical University Berlin TR 94-15, 1994.

[EPR94c] H. Ehrig, J. Padberg, and G. Rozenberg. Behaviour and realization construction for Petri nets based on free monoid and power set graphs. In *Workshop on Concurrency, Specification & Programming*. Humboldt University, 1994. Extended version as Technical Report of University of Leiden.

[Erm94] C. Ermel. Kategorielle Darstellung von Stellen/Transitions-Netzen. Studienarbeit, TU Berlin, 1994.

[GL81] H.J. Genrich and K. Lautenbach. System modelling with high-level Petri nets. *Theoretical Computer Science*, 13:109–136, 1981.

[Hei92] Heise, A. Transformation und Komposition von P/T-Netzen unter Erhaltung wesentlicher Eigenschaften. Technical report, Forschungsberichte des Fachbereichs Informatik der TU Berlin, Bericht-Nr. 92-13, 1992.

[Hum89] U. Hummert. *Algebraische High-Level Netze*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 1989.

[Jen81] K. Jensen. Coloured Petri nets and the invariant method. *Theoretical Computer Science*, 14:317–336, 1981.

[Jen92] K. Jensen. *Coloured Petri Nets. Basic Concepts, Analysis Methods and Practical Use*, volume 1. Springer Verlag, 1992.

[Jen95] K. Jensen. *Coloured Petri Nets - Basic Concepts, Analysis Methods and Practical Use*, volume 2. Springer Verlag, 1995.

[JR91] K. Jensen and G. Rozenberg, editors. *High-Level Petri-Nets: Theory and Application*. Springer Verlag, 1991.

[KR96] E. Kindler and W. Reisig. Algebraic System Nets for Distributed Algorithms. Technical report, Humboldt University of Berlin, 1996.

[KS91] B. Krämer and H. W. Schmidt. Types and modules for net specifications. In K. Jensen and G. Rozenberg, editors, *High-Level Petri Nets: Theory and Application*, pages 171–188. Springer, 1991.

[Mac71] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1971.

[Mar96] A. Martini. Elements of basic category theory. Technical Report 96-5, Technical University Berlin, March 1996.

[MM90] J. Meseguer and U. Montanari. Petri nets are monoids. *Information and Computation*, 88(2):105–155, 1990.

[Pad96] J. Padberg. *Abstract Petri Nets: A Uniform Approach and Rule-Based Refinement*. PhD thesis, Technical University Berlin, 1996. Shaker Verlag.

[PER95] J. Padberg, H. Ehrig, and L. Ribeiro. Algebraic high-level net transformation systems. *Mathematical Structures in Computer Science*, 5:217–256, 1995.

[Pet62] C.A. Petri. *Kommunikation mit Automaten*. PhD thesis, Schriften des Institutes für Instrumentelle Mathematik, Bonn, 1962.

[Rei85a] W. Reisig. *Petri Nets*, volume 4 of *EATCS Monographs on Theoretical Computer Science*. Springer Verlag, 1985.

[Rei85b] W. Reisig. Systementwurf mit Petri-Netzen. *GMD-Spiegel*, **2**:11 – 17, 1985.

[Rei85c] Wolfgang Reisig. Petri nets with individual tokens. *Theoretical Computer Science*, **41**:185 – 213, 1985.

[Rei91] W. Reisig. Petri Nets and Algebraic Specifications. *Theoretical Computer Science*, 80:1–34, 1991.

[REP93] L. Ribeiro, H. Ehrig, and J. Padberg. Formal development of concurrent systems using algebraic high-level nets and transformations. In *Proc. VII Simpósio Brasileiro de Engenharia de Software*, pages 1–16, Rio de Janeiro, oct. 1993. Tech-report no. 93-13, TU Berlin.

[RT86] G. Rozenberg and P.S. Thiagarajan. Petri nets: Basic notions, structure, behaviour. In *Current Trends in Concurrency*, pages 585–668. Lecture Notes in Computer Science, 1986. 224.

[RV87] W. Reisig and J. Vautherin. An algebraic approach to high level Petri nets. In *Proceedings of the 8th European Workshop on Petri Nets, Zaragoza*, 1987.

[Smi96] Smith, E. A Survey on High-Level Petri Nets. In *Bull. EATCS, Vol. 59*, pages 267 – 293, 1996.

[Vau87] Vautherin, J. Parallel System Specification with Coloured Petri Nets. In Rozenberg, G., editor, *Advances in Petri Nets 87*, pages 293–308. Springer Verlag, 1987. Lecture Notes in Computer Science 266.

[Win87] G. Winskel. Petri nets, algebras, morphisms, and compositionality. *Information and Computation*, 72:197–238, 1987.