

Skript zu den Lehrveranstaltungen

THEORETISCHE INFORMATIK 1 + 2

Prof. Dr. Carsten Lutz

Inhaltsverzeichnis

Einführung	5
I. Endliche Automaten und Reguläre Sprachen	10
0. Grundbegriffe	10
1. Endliche Automaten	14
2. Nachweis der Nichterkennbarkeit	25
3. Abschlusseigenschaften und Entscheidungsprobleme	28
4. Reguläre Ausdrücke und Sprachen	36
5. Minimale DEAs und die Nerode-Rechtskongruenz	40
II. Grammatiken, kontextfreie Sprachen und Kellerautomaten	51
6. Die Chomsky-Hierarchie	52
7. Rechtslineare Grammatiken und reguläre Sprachen	57
8. Normalformen und Entscheidungsprobleme	60
9. Abschlusseigenschaften und Pumping Lemma	69
10. Kellerautomaten	73
III. Berechenbarkeit	85
11. Turingmaschinen	88
12. Zusammenhang zwischen Turingmaschinen und Grammatiken	99
13. LOOP-Programme und WHILE-Programme	106
14. Primitiv rekursive Funktionen und μ -rekursive Funktionen	115
15. Entscheidbare und Unentscheidbare Probleme	121
16. Weitere unentscheidbare Probleme	131
17. Semi-Entscheidbarkeit und Rekursive Aufzählbarkeit	138
IV. Komplexität	148
18. Einige Komplexitätsklassen	149
19. NP-vollständige Probleme	155
20. Jenseits von NP	170
V. Appendix	174
A. Laufzeitanalyse von Algorithmen und O -Notation	174
B. Crashkurs Logik	177
B.1. Aussagenlogik	177
B.2. Prädikatenlogik	184

C. Zusammenfassung Entscheidungsprobleme und Abschlusseigenschaften . .	192
Abkürzungsverzeichnis	193
Literatur	199

Hinweis

Dieses Skript ist als Hilfestellung für Studierende gedacht. Trotz großer Sorgfalt beim Erstellen kann keine Garantie für Fehlerfreiheit übernommen werden. Es wird explizit darauf hingewiesen, dass der prüfungsrelevante Stoff durch die Vorlesung bestimmt wird und mit dem Skriptinhalt nicht vollständig übereinstimmen muss.

Dieses Skript ist eine erweiterte und modifizierte Version eines Vorlesungsskriptes von Franz Baader.

Einführung

Die theoretische Informatik beschäftigt sich mit zentralen Fragestellungen der Informatik wie etwa den prinzipiellen Grenzen der Berechenbarkeit. Zentrale Methoden sind die Abstraktion und die Modellbildung, d.h. es werden die zentralen Konzepte und Methoden der Informatik identifiziert und in abstrakter Form beschrieben und studiert. Daraus ergibt sich eine Sammlung mathematischer Theorien, die die Grundlage für zahlreiche andere Teilgebiete der Informatik bildet.

Die theoretische Informatik ist in zahlreiche Teilgebiete untergliedert, wie etwa die Komplexitätstheorie, die Algorithmentheorie, die Kryptographie und die Datenbanktheorie. Die Lehrveranstaltungen „Theoretische Informatik 1 + 2“ geben eine Einführung in folgende zwei zentrale Bereiche der theoretischen Informatik:

Automatentheorie und formale Sprachen

Behandelt in Theoretische Informatik 1 / Teile I + II dieses Skriptes

Im Mittelpunkt stehen *Wörter* und *formale Sprachen* (Mengen von Wörtern). Diese sind ein nützliches Abstraktionsmittel in der Informatik. Man kann z.B. die Eingabe oder Ausgabe eines Programmes als Wort betrachten und die Menge der syntaktisch korrekten Eingaben als Sprache. Wichtige Fragestellungen sind z.B.:

- Was sind geeignete Beschreibungsmittel für (meist unendliche) formale Sprachen? (z.B. Automaten und Grammatiken)
- Was für verschiedene Typen von Sprachen lassen sich unterscheiden?
- Was für Eigenschaften haben die verschiedenen Sprachtypen?

Berechenbarkeit und Komplexität

Behandelt in Theoretische Informatik 2 / Teile III + IV dieses Skriptes

Hier geht es darum, welche Probleme und Funktionen prinzipiell berechenbar sind und welche nicht. Ausserdem wird untersucht, welcher zeitliche Aufwand zur Berechnung eines Problems / einer Funktion notwendig ist (unabhängig vom konkreten Algorithmus). Wichtige Fragestellungen sind z.B.:

- Was für Berechenbarkeitsmodelle gibt es und wie verhalten sich diese zueinander?
- Gibt es Funktionen oder Mengen, die prinzipiell nicht berechenbar sind?
- Kann man jede berechenbare Funktion mit akzeptablem Zeit- und Speicherplatzaufwand berechnen?
- Für in der Informatik häufig auftretende Probleme/Funktionen: wie viel Zeit und Speicherplatz braucht man mindestens, also bei optimalem Algorithmus?

Teil I + II: Automatentheorie und formale Sprachen

Formale Sprachen, also (endliche oder unendliche) Mengen von Wörtern, sind ein wichtiger Abstraktionsmechanismus der Informatik. Hier ein paar Anwendungsbeispiele:

- Die Menge aller wohlgeformten Programme in einer gegebenen Programmiersprache wie Pascal, Java, oder C++ ist eine formale Sprache.
- Die Menge aller wohlgeformten Eingaben für ein Programm oder eine Form auf einer Webseite (z.B. Menge aller Kontonummern / Menge aller Geburtsdaten) ist eine formale Sprache.
- Jeder Suchausdruck (z.B. Linux Regular Expression) definiert eine formale Sprache: die Menge der Dokumente, in der der Ausdruck zu finden ist.
- Kommunikationsprotokolle: z.B. die Menge aller wohlgeformten TCP-Pakete ist eine formale Sprache.
- Das “erlaubte” Verhalten von Soft- und Hardwaresystemen kann in sehr natürlicher Weise als formale Sprache modelliert werden.

Wir beginnen mit einem kurzen Überblick über die zentralen Betrachtungsgegenstände und Fragestellungen.

1. Charakterisierung:

Nützliche und interessante formale Sprachen sind i.d.R. unendlich, wie in allen obigen Beispielen (es gibt zum Beispiel unendlich viele wohlgeformte Pascal-Programme). Wie beschreibt man derartige Sprachen mit endlichem Aufwand?

- *Automaten* oder *Maschinen*, die genau die Elemente der Menge akzeptieren. Wir werden viele verschiedene Automatenmodelle kennenlernen, wie z.B. endliche Automaten, Kellerautomaten und Turingmaschinen.
- *Grammatiken*, die genau die Elemente der Menge generieren; auch hier gibt es viele verschiedene Typen, z.B. rechtslineare Grammatiken und kontextfreie Grammatiken (vgl. auch VL „Praktische Informatik“: kontextfreie Grammatiken (EBNF) zur Beschreibung der Syntax von Programmiersprachen).
- *Ausdrücke*, die beschreiben, wie man die Sprache aus Basissprachen mit Hilfe gewisser Operationen (z.B. Vereinigung) erzeugen kann.

Abhängig von dem verwendeten Automaten-/Grammatiktyp erhält man verschiedene Klassen von Sprachen. Wir werden hier die vier wichtigsten Klassen betrachten, die in der **Chomsky-Hierarchie** zusammengefasst sind:

Klasse	Automatentyp	Grammatiktyp
Typ 0	Turingmaschine (TM)	allgemeine Chomsky-Grammatik
Typ 1	TM mit linearer Bandbeschränkung	kontextsensitive Grammatik
Typ 2	Kellerautomat	kontextfreie Grammatik
Typ 3	endlicher Automat	einseitig lineare Grammatik

Bei Typ 3 existiert auch eine Beschreibung durch reguläre Ausdrücke. Am wichtigsten sind die Typen 2 und 3; beispielsweise kann Typ 2 weitgehend die Syntax von Programmiersprachen beschreiben.

2. Welche Fragen sind für eine Sprachklasse entscheidbar und mit welchem Aufwand? Die folgenden Probleme werden eine zentrale Rolle spielen:

- *Wortproblem*: gegeben eine Beschreibung der Sprache L (z.B. durch Automat, Grammatik, Ausdruck, ...) und ein Wort w . Gehört w zu L ?

Anwendungsbeispiele:

- Programmiersprache, deren Syntax durch eine kontextfreie Grammatik beschrieben ist. Entscheide für ein gegebenes Programm P , ob dieses syntaktisch korrekt ist.
- Suchpattern für Textdateien sind häufig reguläre Ausdrücke. Suche die Dateien (Wörter), die das Suchpattern enthalten (zu der von ihm beschriebenen Sprache gehören).

- *Leerheitsproblem*: gegeben eine Beschreibung der Sprache L . Ist L leer?

Anwendungsbeispiel:

Wenn ein Suchpattern die leere Sprache beschreibt, so muss man die Dateien nicht durchsuchen, sondern kann ohne weiteren Aufwand melden, dass das Pattern nicht sinnvoll ist.

- *Äquivalenzproblem*: Beschreiben zwei verschiedene Beschreibungen dieselbe Sprache?

Anwendungsbeispiel:

Jemand vereinfacht die Grammatik einer Programmiersprache, um sie übersichtlicher zu gestalten. Beschreibt die vereinfachte Grammatik wirklich dieselbe Sprache wie die ursprüngliche?

3. Welche **Abschlusseigenschaften** hat eine Sprachklasse?

z.B. Abschluss unter Durchschnitt, Vereinigung und Komplement: wenn L_1, L_2 in der Sprachklasse enthalten, sind es dann auch $L_1 \cap L_2, L_1 \cup L_2, \overline{L_1}$?

Anwendungsbeispiele:

- Suchpattern: Suche nach Dateien, die das Pattern *nicht* enthalten (Komplement) oder die zwei Pattern enthalten (Durchschnitt).
- Reduziere das Äquivalenzproblem auf das Leerheitsproblem, ohne die gewählte Klasse von Sprachen zu verlassen: Statt „ $L_1 = L_2$?“ entscheidet man, ob $(L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (L_2 \cap \overline{L_1})$ leer ist.

Abgesehen von ihrer direkten Nützlichkeit für verschiedene Informatik-Anwendungen stellen sich alle diese Fragestellungen als mathematisch sehr interessant heraus. Zusammengekommen bilden Sie eine wichtige formale Grundlage der Informatik.

I. Endliche Automaten und Reguläre Sprachen

0. Grundbegriffe

Die grundlegenden Begriffe der Vorlesung “Theoretische Informatik 1” sind *Wörter* und *formale Sprachen*.

Wörter und Formale Sprachen

Alphabet. Ein *Alphabet* ist eine endliche Menge von Symbolen. Beispiele sind:

- $\Sigma_1 = \{a, b, c, \dots, z\}$;
- $\Sigma_2 = \{0, 1\}$;
- $\Sigma_3 = \{0, \dots, 9\} \cup \{, \}$;
- $\Sigma_4 = \{ \text{program, const, var, label, procedure, function, type, begin, end, if, then, else, case, of, repeat, until, while, do, for, to} \} \cup \{ \text{VAR, VALUE, FUNCTION} \}$

Als Symbol (Platzhalter) für Alphabetsymbole benutzen wir in der Regel a, b, c, \dots . Alphabete bezeichnen wir meist mit Σ .

Obwohl die Symbole von Σ_4 aus mehreren Buchstaben der üblichen Schriftsprache bestehen, betrachten wir sie doch als unteilbare Symbole. Die Elemente von Σ_4 sind genau die Schlüsselworte der Programmiersprache Pascal. Konkrete Variablennamen, Werte und Funktionsaufrufe sind zu den Schlüsselworten VAR, VALUE, FUNCTION abstrahiert, um Endlichkeit des Alphabetes zu gewährleisten.

Wort. Ein *Wort* ist eine endliche Folge von Symbolen. Ein Wort $w = a_1 \cdots a_n$ mit $a_i \in \Sigma$ heißt *Wort über dem Alphabet Σ* . Beispiele sind:

- $w = abc$ ist ein Wort über Σ_1 ;
- $w = 1000110$ ist ein Wort über Σ_2 ;
- $w = 10,0221,4292,,$ ist ein Wort über Σ_3 ;
- Jedes Pascalprogramm kann als Wort über Σ_4 betrachtet werden, wenn man jede konkrete Variable durch das Schlüsselwort VAR ersetzt, jeden Wert durch VALUE und jeden Funktionsaufruf durch FUNCTION.

Als Symbol für Wörter verwenden wir meist w, v, u . Die Länge eines Wortes w wird mit $|w|$ bezeichnet, es gilt also z.B. $|aba| = 3$. Manchmal ist es praktisch, auch die Anzahl Vorkommen eines Symbols a in einem Wort w in kurzer Weise beschreiben zu können. Wir verwenden hierfür $|w|_a$, es gilt also z.B. $|aba|_a = 2$, $|aba|_b = 1$, $|aba|_c = 0$. Einen Spezialfall stellt das *leere Wort* dar, also die leere Folge von Symbolen. Dieses wird durch ε bezeichnet. Es ist das einzige Wort mit $|w| = 0$.

Formale Sprache. Eine (*formale*) *Sprache* ist eine Menge von Wörtern. Mit Σ^* bezeichnen wir die Sprache, die aus *allen* Wörtern über dem Alphabet Σ bestehen, also z.B.

$$\{a, b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}$$

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *Sprache über dem Alphabet* Σ . Beispiele sind:

- $L = \emptyset$
- $L = \{abc\}$
- $L = \{a, b, c, ab, ac, bc\}$
- $L = \{w \in \{a, \dots, z\}^* \mid w \text{ ist ein Wort der deutschen Sprache}\}$
- L als Menge aller Worte über Σ_4 , die wohlgeformte Pascal-Programme beschreiben

Als Symbol Platzhalter für Sprachen verwenden wir meist L . Beachten Sie, dass Sprachen sowohl endlich als auch unendlich sein können. Interessant sind meist nur unendliche Sprachen. Als nützliche Abkürzung führen wir Σ^+ für die Menge $\Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$ aller nicht-leeren Wörter über Σ ein. Sowohl Σ^* als auch Σ^+ sind offensichtlich unendliche Sprachen.

Operationen auf Sprachen und Wörtern

Im folgenden werden wir sehr viel mit Wörtern und formalen Sprachen umgehen. Dazu verwenden wir in erster Linie die folgenden Operationen.

Präfix, Suffix, Infix: Zu den natürlichsten und einfachsten Operationen auf Wörtern gehört das Bilden von Präfixen, Suffixen und Infixen:

$$\begin{aligned} u \text{ ist Präfix von } v & \text{ wenn } v = uw \text{ für ein } w \in \Sigma^*. \\ u \text{ ist Suffix von } v & \text{ wenn } v = wu \text{ für ein } w \in \Sigma^*. \\ u \text{ ist Infix von } v & \text{ wenn } v = w_1uw_2 \text{ für } w_1, w_2 \in \Sigma^*. \end{aligned}$$

Die Präfixe von $aabbcc$ sind also beispielsweise $a, aa, aab, aabb, aabbc, aabbcc$. Dieses Wort hat 21 Infixe (Teilwörter).

Konkatenation: Eine Operation, die auf Wörter sowie auf Sprachen angewendet werden kann. Auf Wörtern u und v bezeichnet die Konkatenation $u \cdot v$ das Wort uv , das man durch einfaches "Hintereinanderschreiben" erhält. Es gilt also z.B.

$abb \cdot ab = abbab$. Auf Sprachen bezeichnet die Konkatenation das Hintereinanderschreiben *beliebiger* Worte aus den beteiligten Sprachen:

$$L_1 \cdot L_2 := \{u \cdot v \mid (u \in L_1) \wedge (v \in L_2)\}$$

Es gilt also z.B.

$$\{aa, a\} \cdot \{ab, b, aba\} = \{aaab, aab, aaaba, ab, aaba\}.$$

Sowohl auf Sprachen als auch auf Wörtern wird der Konkatenationspunkt häufig weggelassen, wir schreiben also z.B. L_1L_2 statt $L_1 \cdot L_2$.

Man beachte, dass $\emptyset \cdot L = L \cdot \emptyset = \emptyset$. Konkatenation ist assoziativ, es gilt also $(L_1 \cdot L_2) \cdot L_3 = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3)$. Sie ist nicht kommutativ, im allgemeinen gilt also nicht $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$.

Um wiederholte Konkatenation desselben Wortes zu beschreiben, verwenden wir folgende Notation: für ein Wort $w \in \Sigma^*$ und ein $n \geq 0$ bezeichnet w^n das Wort, das wir durch n -malige Konkatenation von w erhalten, also zum Beispiel $(abc)^3 = abcabcabc$ (aber $abc^3 = abccc$). Wir definieren $w^0 = \varepsilon$ für jedes Wort w .

Boolesche Operationen: Es handelt sich um die üblichen Booleschen Mengenoperationen, angewendet auf formale Sprachen:

$$\begin{array}{lll} \text{Vereinigung} & L_1 \cup L_2 & := \{w \mid w \in L_1 \text{ oder } w \in L_2\} \\ \text{Durchschnitt} & L_1 \cap L_2 & := \{w \mid w \in L_1 \text{ und } w \in L_2\} \\ \text{Komplement} & \overline{L_1} & := \{w \mid w \in \Sigma^* \wedge w \notin L_1\} \end{array}$$

Vereinigung und Durchschnitt sind sowohl assoziativ als auch kommutativ.

Kleene-Stern: Der Kleene-Stern bezeichnet die beliebig (aber nur endlich) oft iterierte Konkatenation. Gegeben eine Sprache L definiert man zunächst induktive Sprachen L^0, L^1, \dots und darauf basierend dann die Anwendung des Kleene-Sterns erhaltene Sprache L^* :

$$\begin{array}{ll} L^0 & := \{\varepsilon\} \\ L^{n+1} & := L^n \cdot L \\ L^* & := \bigcup_{n \geq 0} L^n \end{array}$$

Für $L = \{a, ab\}$ gilt also z.B. $L^0 = \{\varepsilon\}$, $L^1 = L$, $L^2 = \{aa, aab, aba, abab\}$, etc. Offensichtlich ist L^* unendlich gdw. (genau dann, wenn) $L \neq \emptyset$.

Man beachte, dass das leere Wort per Definition *immer* in L^* enthalten ist, unabhängig davon, was L für eine Sprache ist. Manchmal verwenden wir auch die Variante ohne das leere Wort:

$$L^+ := \bigcup_{n \geq 1} L^n = L^* \setminus \{\varepsilon\}.$$

Einige einfache Beobachtungen sind $\emptyset^* = \{\varepsilon\}$, $(L^*)^* = L^*$ und $L^* \cdot L^* = L^*$. Es ist hier wichtig, \emptyset (die leere Sprache), $\{\varepsilon\}$ (die Sprache, die das leere Wort enthält) und ε (das leere Wort) sorgsam auseinander zu halten.

Etwas informeller könnte man den Kleene-Stern also auch wie folgt definieren:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \{w \mid \exists u_1, \dots, u_n \in L : w = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n\}.$$

1. Endliche Automaten

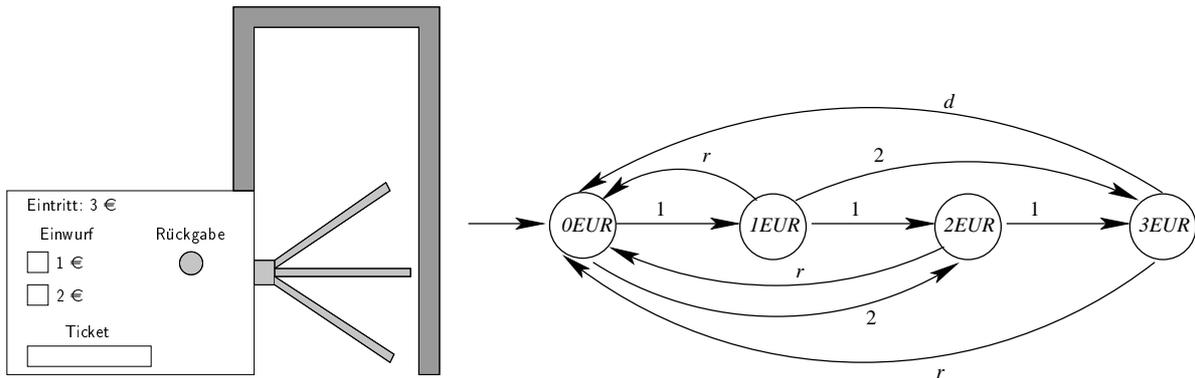
Endliche Automaten stellen ein einfaches und dennoch sehr nützliches Mittel zum Beschreiben von formalen Sprachen dar. Sie können als Abstraktion eines (Hardware- oder Software-) Systems aufgefasst werden. Die charakteristischen Merkmale eines endlichen Automaten sind

- eine endliche Menge von Zuständen, in denen sich der Automat befinden kann
 Ein Zustand beschreibt die aktuelle Konfiguration des Systems. In unserem Kontext ist ein Zustand lediglich ein Symbol (bzw. ein Name) wie q_0 , q_1 , etc. Insbesondere wird nicht näher beschrieben, was genau diesen Zustand ausmacht (etwa eine bestimmte Belegung eines Registers mit einem konkreten Wert).
- festen Übergangsregeln zwischen Zuständen in Abhängigkeit von der Eingabe.
 Zustandswechsel werden dabei als augenblicklich angenommen, d.h. ein eventueller Zeitverbrauch wird nicht modelliert. Ein Lauf eines Systems ist also einfach eine Folge von Zuständen.

Beispiel: (Eintrittsautomat)

Eingabe: 1, 2, r, d (*r*: Geldrückgabe; *d*: Drehsperre dreht sich)

Zustände: 0EUR, 1EUR, 2EUR, 3EUR



Der dargestellte Automat regelt eine Drehsperre. Es können Münzen im Wert von 1 oder 2 Euro eingeworfen werden. Nach Einwurf von 3 Euro wird die Arretierung der Drehsperre gelöst und der Eintritt freigegeben. Der Automat gibt kein Wechselgeld zurück sondern nimmt einen zu hohen Betrag nicht an (Münzen fallen durch). Man kann jederzeit den Rückgabeknopf drücken, um den bereits gezahlten Betrag zurückzuerhalten.

In der schematischen Darstellung kennzeichnen die Kreise die internen Zustände und die Pfeile die Übergänge. Die Pfeilbeschriftung gibt die jeweilige Eingabe an, unter der der Übergang erfolgt. Man beachte, dass

- nur der Zustand 3EUR einen Übergang vom Typ *d* erlaubt. Dadurch wird modelliert, dass nur durch Einwurf von 3,- Euro der Eintritt ermöglicht wird.

- das Drehen der Sperre als Eingabe angesehen wird. Man könnte dies auch als Ausgabe modellieren. Wir werden in dieser Vorlesung jedoch keine endlichen Automaten mit Ausgabe (sogenannte Transduktoren) betrachten.

Die Übergänge können als festes Programm betrachtet werden, das der Automat ausführt.

Man beachte den engen Zusammenhang zu formalen Sprachen: die Menge der möglichen Eingaben $\{1, 2, r, d\}$ bildet ein Alphabet. Jede (Gesamt-)Eingabe des Automaten ist ein Wort über dem Alphabet. Wenn man 3EUR als Zielzustand betrachtet, so bildet die Menge der Eingaben, mittels derer dieser Zustand erreicht werden kann, eine (unendliche) formale Sprache. Diese enthält zum Beispiel das Wort 11r21.

Wir definieren endliche Automaten nun formal.

Definition 1.1 (DEA)

Ein *deterministischer endlicher Automat (DEA)* ist von der Form $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, wobei

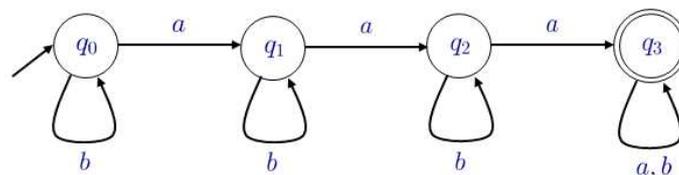
- Q eine endliche Menge von *Zuständen* ist,
- Σ ein *Eingabealphabet* ist,
- $q_0 \in Q$ der *Anfangszustand* ist,
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ die *Übergangsfunktion* ist,
- $F \subseteq Q$ eine Menge von *Endzuständen* ist.

Beispiel 1.2

Der DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ mit den Komponenten

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$,
- $\delta(q_0, a) = q_1, \quad \delta(q_1, a) = q_2, \quad \delta(q_2, a) = \delta(q_3, a) = q_3$
 $\delta(q_i, b) = q_i \quad \text{für } i \in \{0, 1, 2, 3\}$
- $F = \{q_3\}$.

wird graphisch dargestellt als:



Wie im obigen Beispiel werden wir Automaten häufig als kantenbeschriftete Graphen darstellen, wobei die Zustände des Automaten die Knoten des Graphen sind und die

Übergänge als Kanten gesehen werden (beschriftet mit einem Alphabetsymbol). Der Startzustand wird durch einen Pfeil gekennzeichnet und die Endzustände durch einen Doppelkreis.

Intuitiv arbeitet der Automat, indem er ein Wort Symbol für Symbol von links nach rechts liest und dabei entsprechend der Übergangsfunktion den Zustand wechselt. Er beginnt im Startzustand und akzeptiert das Eingabewort wenn er sich am Ende in einem Endzustand befindet. Wir beschreiben dieses Verhalten nun formal.

Definition 1.3 (kanonische Fortsetzung von δ)

Die *kanonische Fortsetzung* von $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ von einzelnen Symbolen auf beliebige Wörter, also auf eine Funktion $\delta : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$, wird induktiv (über die Wortlänge) definiert:

- $\delta(q, \varepsilon) := q$
- $\delta(q, wa) := \delta(\delta(q, w), a)$

Beachte: für alle Symbole $a \in \Sigma$ und Zustände $q \in Q$ ist die obige Definition von $\delta(q, a)$ identisch mit dem ursprünglichen δ , denn $\delta(q, a) = \delta(\delta(q, \varepsilon), a)$.

Als Beispiel für Definition 1.3 betrachte wieder den Automat \mathcal{A} aus Beispiel 1.2. Es gilt $\delta(q_0, bbbabbbb) = q_1$ und $\delta(q_0, baaab) = q_3$.

Definition 1.4 (Akzeptiertes Wort, erkannte Sprache)

Ein DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ akzeptiert das Wort $w \in \Sigma^*$ wenn $\delta(q_0, w) \in F$. Die von \mathcal{A} erkannte Sprache ist $L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}$.

Man sieht leicht, dass der Automat \mathcal{A} aus Beispiel 1.2 die Sprache

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 3\}$$

erkennt. Mit anderen Worten: er akzeptiert genau diejenigen Wörter über dem Alphabet $\{a, b\}$, die mindestens 3 mal das Symbol a enthalten.

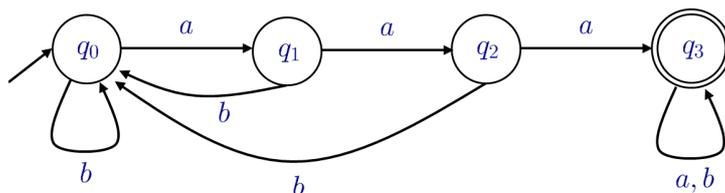
Definition 1.5 (Erkennbarkeit einer Sprache)

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *erkennbar*, wenn es einen DEA \mathcal{A} gibt mit $L = L(\mathcal{A})$.

Wir haben also gerade gesehen, dass die Sprache $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \geq 3\}$ erkennbar ist. Folgendes Beispiel liefert eine weitere erkennbare Sprache.

Beispiel 1.6

Der folgende DEA erkennt die Sprache $L = \{w = uaaav \mid u, v \in \Sigma^*\}$ mit $\Sigma = \{a, b\}$. Auch diese Sprache ist also erkennbar.

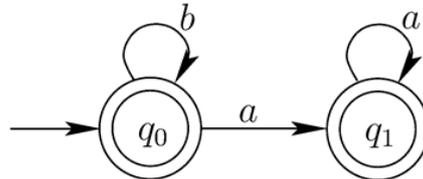


Beachte:

Die Übergangsfunktion eines DEAs ist eine *totale Funktion*, es muß also für jede mögliche Kombination von Zustand und Symbol ein Folgesymbol angegeben werden,

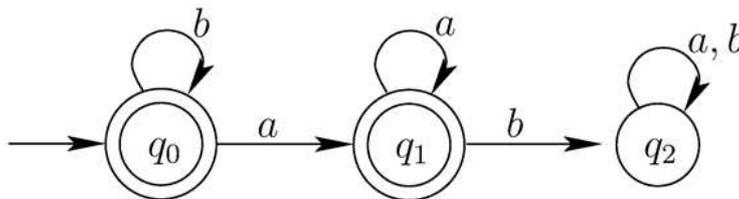
Beispiel 1.7

Folgendes ist kein DEA:



denn es fehlt ein Übergang für q_1 und b .

Man erhält aber leicht einen DEA durch Hinzunahme eines „Papierkorbzustandes“, der alle fehlenden Übergänge aufnimmt (und *kein* Endzustand ist):



Die im obigen Beispiel erkannte Sprache ist übrigens

$$L = \{b\}^* \cdot \{a\}^* = \{w \in \{a, b\}^* \mid ab \text{ ist nicht Infix von } w\}.$$

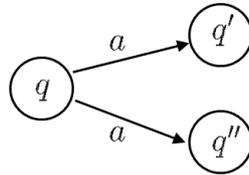
Randbemerkung.

Im Prinzip sind “echte Computer” ebenfalls endliche Automaten: Sie haben nur endlich viel Speicherplatz und daher nur eine endliche Menge möglicher Konfigurationen (Prozessorzustand + Belegung der Speicherzellen). Die Konfigurationsübergänge werden bestimmt durch Verdrahtung und Eingaben (Tastatur, Peripheriegeräte).

Wegen der extrem großen Anzahl von Zuständen sind endliche Automaten aber keine geeignete Abstraktion für Rechner. Ausserdem verwendet man einen Rechner (z.B. bei der Programmierung) nicht als endlichen Automat indem man z.B. ausnutzt, dass der Arbeitsspeicher ganz genau 2GB gross ist. Stattdessen nimmt man den Speicher als potentiell unendlich an und verlässt sich auf Techniken wie Swapping und Paging. In einer geeigneten Abstraktion von Rechnern sollte daher auch der Speicher als unendlich angenommen werden. Das wichtigste solche Modell ist die Turingmaschine, die wir später im Detail kennenlernen werden.

Von DEAs zu NEAs

Wir generalisieren nun das Automatenmodell des DEA dadurch, dass wir *Nichtdeterminismus* zulassen. In unserem konkreten Fall bedeutet das, dass wir für einen gegebenen Zustand und ein gelesenes Symbol *mehr als einen möglichen Übergang* erlauben; folgendes ist also möglich:



Ein Automat hat dadurch unter Umständen *mehrere* Möglichkeiten, ein Wort zu verarbeiten. Er akzeptiert seine Eingabe, wenn *eine Möglichkeit existiert*, dabei einen Endzustand zu erreichen.

Nichtdeterminismus ist ein fundamentales Konzept der Informatik, das nicht nur bei endlichen Automaten eine wichtige Rolle spielt. Wir werden es in dieser Vorlesung noch häufiger verwenden. Dabei werden mehrere Möglichkeiten wie oben immer durch *existentielles Quantifizieren* behandelt. Natürlich gibt es in der Realität keine nichtdeterministischen Maschinen. Dennoch ist Nichtdeterminismus aus folgenden Gründen von großer Bedeutung:

- Als Modellierungsmittel bei unvollständiger Information.

Es ist häufig nicht sinnvoll, Ereignisse wie Benutzereingaben, einkommende Nachrichten von anderen Prozessen usw. im Detail zu modellieren, da man viel zu komplexe Modelle erhalten würde. Stattdessen verwendet man nichtdeterministische Übergänge ohne genauer zu spezifizieren, wann welcher Übergang verwendet wird.

- Große Bedeutung in der Komplexitätstheorie.

In der Komplexitätstheorie (Theoretische Informatik 2) geht es unter anderem um die prinzipielle Frage, was effizient berechenbar ist und was nicht. Interessanterweise spielt dabei das zunächst praxisfern wirkende Konzept des Nichtdeterminismus eine zentrale Rolle. Paradebeispiel ist das sogenannte “P vs. NP” Problem, das wichtigste ungelöste Problem der Informatik.

NEAs ergeben sich dadurch, dass man die Übergangsfunktion von DEAs durch eine Übergangsrelation ersetzt. Wir definieren NEAs der Vollständigkeit halber noch einmal als Ganzes.

Definition 1.8 (NEA)

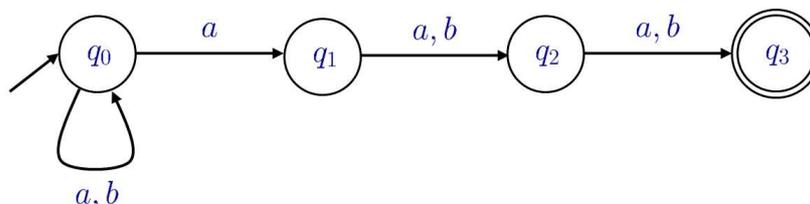
Ein *Nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)* ist von der Form $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$, wobei

- Q eine endliche Menge von Zuständen ist,

- Σ ein Eingabealphabet ist,
- $q_0 \in Q$ der Anfangszustand ist,
- $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ die Übergangsrelation ist,
- $F \subseteq Q$ eine Menge von Endzuständen ist.

Beispiel 1.9

Folgenden NEA werden wir im folgenden als durchgängiges Beispiel verwenden:



Dieser Automat ist kein DEA, da es an der Stelle q_0 für die Eingabe a zwei mögliche Übergänge gibt.

Um das Akzeptanzverhalten von NEAs zu beschreiben, verwenden wir eine etwas andere Notation als bei DEAs.

Definition 1.10 (Pfad)

Ein *Pfad* in einem NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ von einem Zustand $p_0 \in Q$ zu einem Zustand $p_n \in Q$ ist eine Folge

$$\pi = p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} p_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{A}} \dots \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}} p_n$$

so dass $(p_i, a_{i+1}, p_{i+1}) \in \Delta$ für $i = 0, \dots, n - 1$. Der Pfad hat die *Beschriftung* $w := a_1 \dots a_n$. Wenn es in \mathcal{A} einen Pfad von p nach q mit der Beschriftung w gibt, so schreiben wir

$$p \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q.$$

Für $n = 0$ sprechen wir vom *leeren Pfad*, welcher die Beschriftung ε hat.

Im NEA aus Beispiel 1.9 gibt es unter anderem folgende Pfade für die Eingabe aba :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= q_0 \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} q_1 \xrightarrow{b}_{\mathcal{A}} q_2 \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} q_3 \\ \pi_2 &= q_0 \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} q_0 \xrightarrow{b}_{\mathcal{A}} q_0 \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} q_1 \end{aligned}$$

Wie erwähnt basiert das Akzeptanzverhalten bei Nichtdeterminismus immer auf *existentieller Quantifizierung*.

Definition 1.11 (Akzeptiertes Wort, erkannte Sprache)

Der NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ *akzeptiert* das Wort $w \in \Sigma^*$ wenn $q_0 \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q_f$ für ein $q_f \in F$; mit anderen Worten: wenn *es einen Pfad* $p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} \dots \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}} p_n$ gibt so dass $p_0 = q_0$ und $p_n \in F$. Die von \mathcal{A} *erkannte Sprache* ist $L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}$.

Der NEA aus Beispiel 1.9 akzeptiert also die Eingabe aba , weil der oben angegebene Pfad π_1 in einem Endzustand endet. Dabei ist es irrelevant, dass der ebenfalls mögliche Pfad π_2 in einem nicht-Endzustand endet. Nicht akzeptiert wird beispielsweise die Eingabe baa , da keiner der möglichen Pfade zu einem Endzustand führt. Man sieht leicht, dass der NEA aus Beispiel 1.9 die folgende Sprache akzeptiert:

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \text{das drittletzte Symbol in } w \text{ ist } a\}.$$

Eine gute Hilfe zum Verständnis von Nichtdeterminismus ist die Metapher des *Ratens*. Intuitiv “rät” der NEA aus Beispiel 1.9 im Zustand q_0 bei Eingabe von a , ob er sich gerade an der drittletzten Stelle des Wortes befindet oder nicht. Man beachte, dass der Automat keine Möglichkeit hat, das sicher zu wissen. Wenn er sich für “ja” entscheidet, so wechselt er in den Zustand q_1 und *verifiziert* mittels der Kette von q_1 nach q_3 , dass er richtig geraten hat:

- hat er in Wahrheit das zweitletzte oder letzte Symbol gelesen, so wird der Endzustand nicht erreicht und der Automat akzeptiert nicht;
- ist er weiter als drei Symbole vom Wortende entfernt, so ist in q_3 kein Übergang mehr möglich und der Automat “blockiert” und akzeptiert ebenfalls nicht.

Die wichtigsten Eigenschaften eines solchen Rate-Ansatzes zum Erkennen einer Sprache L sind, dass (i) für Wörter $w \in L$ es die Möglichkeit gibt, richtig zu raten und (ii) für Wörter $w \notin L$ falsches Raten niemals zur Akzeptanz führt.

Da wir uns bei einem Automaten meist nur für die erkannten Sprachen interessieren, bezeichnen wir zwei NEAs als *äquivalent*, wenn sie dieselbe Sprache akzeptieren.

Ohne Nichtdeterminismus, also mittels eines DEA, ist es sehr viel schwieriger, die Sprache aus Beispiel 1.9 zu erkennen (Aufgabe!). Es gilt aber interessanterweise, dass man zu jedem NEA einen äquivalenten DEA finden kann. Nichtdeterminismus trägt in diesem Fall also nicht zur Erhöhung der Ausdrucksstärke bei (das ist aber keineswegs immer so, wie wir noch sehen werden). NEAs haben aber dennoch einen Vorteil gegenüber DEAs: manche Sprachen lassen sich im Vergleich zu DEAs mit erheblich (exponentiell) kleineren NEAs erkennen. Letzteres werden wir im Rahmen der Übungen kurz beleuchten. In der Vorlesung beweisen wir lediglich folgendes klassische Resultat.

Satz 1.12 (Rabin/Scott)

Zu jedem NEA kann man einen äquivalenten DEA konstruieren.

Bevor wir den Beweis dieses Satzes angeben, skizzieren wir kurz die

Beweisidee:

Der Beweis dieses Satzes verwendet die bekannte *Potenzmengenkonstruktion*: die Zustandsmenge des DEA ist die Potenzmenge 2^Q der Zustandsmenge Q des NEA. Jeder Zustand des DEA besteht also aus einer *Menge* von NEA-Zuständen; umgekehrt ist jede solche Menge ein DEA-Zustand.

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ ein NEA. Nach der Definition von NEAs gilt $w \in L(\mathcal{A})$ gdw. die Menge $\{q \in Q \mid q_0 \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q\} \in 2^Q$ mindestens einen Endzustand enthält. Wir definieren also die Übergangsfunktion δ und Endzustandsmenge F' des DEAs so, dass für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

1. $\delta(\{q_0\}, w) = \{q \mid q_0 \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q\}$ und
2. $\{q \mid q_0 \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q\}$ ist DEA-Endzustand wenn mindestens ein Endzustand des ursprünglichen NEAs enthalten ist.

Intuitiv simuliert damit der eindeutige Lauf des DEAs auf einer Eingabe w *alle* möglichen Läufe des ursprünglichen NEAs auf w .

Beweis. Sei der NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ gegeben. Der DEA $\mathcal{A}' = (2^Q, \Sigma, \{q_0\}, \delta, F')$ ist definiert durch:

- $\delta(P, a) = \bigcup_{p \in P} \{p' \mid (p, a, p') \in \Delta\}$ für alle $P \in 2^Q$ und $a \in \Sigma$
- $F' = \{P \in 2^Q \mid P \cap F \neq \emptyset\}$

Wir benötigen im Folgenden die

Hilfsaussage: $q' \in \delta(\{q_0\}, w) \quad \text{gdw.} \quad q_0 \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q' \quad (\star)$

Daraus folgt $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$, da:

$$\begin{aligned}
 w \in L(\mathcal{A}) & \quad \text{gdw.} \quad \exists q \in F : q_0 \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} q & \quad (\text{Def. } L(\mathcal{A})) \\
 & \quad \text{gdw.} \quad \exists q \in F : q \in \delta(\{q_0\}, w) & \quad (\text{Hilfsaussage}) \\
 & \quad \text{gdw.} \quad \delta(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset \\
 & \quad \text{gdw.} \quad \delta(\{q_0\}, w) \in F' & \quad (\text{Def. } F') \\
 & \quad \text{gdw.} \quad w \in L(\mathcal{A}')
 \end{aligned}$$

Beweis der Hilfsaussage mittels Induktion über $|w|$:

Induktionsanfang: $|w| = 0$

$$q' \in \delta(\{q_0\}, \varepsilon) \quad \text{gdw.} \quad q_0 = q' \quad \text{gdw.} \quad q_0 \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathcal{A}} q'$$

Induktionsannahme: Die Hilfsaussage ist bereits gezeigt für alle $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \leq n$

Induktionsschritt: $|w| = n + 1$

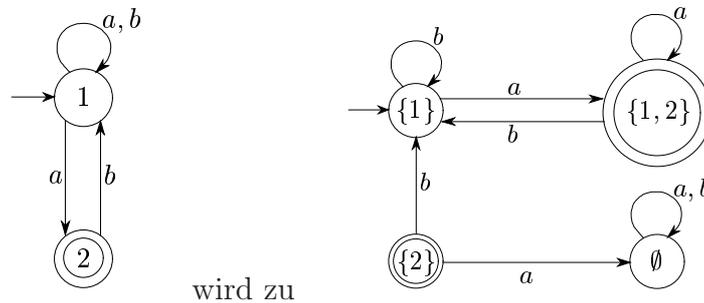
Sei $w = ua$ mit $u \in \Sigma^*$, $|u| = n$ und $a \in \Sigma$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \delta(\{q_0\}, ua) &= \delta(\delta(\{q_0\}, u), a) & \quad (\text{Def. 1.3}) \\
 &= \bigcup_{q' \in \delta(\{q_0\}, u)} \{q'' \mid (q', a, q'') \in \Delta\} & \quad (\text{Def. } \delta) \\
 &= \bigcup_{q_0 \xrightarrow{u}_{\mathcal{A}} q'} \{q'' \mid (q', a, q'') \in \Delta\} & \quad (\text{Ind.Voraus.}) \\
 &= \{q'' \mid q_0 \xrightarrow{ua}_{\mathcal{A}} q''\} & \quad (\text{Def. Pfad})
 \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Hilfsaussage für $w = ua$. □

Beispiel 1.13

Der NEA \mathcal{A} (links) wird mit der Potenzmengenkonstruktion transformiert in den DEA \mathcal{A}' (rechts):



wird zu

Nachteilig an dieser Konstruktion ist, dass die Zustandsmenge *exponentiell* vergrößert wird. Im allgemeinen kann man dies wie erwähnt nicht vermeiden, in manchen Fällen kommt man aber doch mit weniger Zuständen aus. Als einfache Optimierung kann man Zustände weglassen, die mit keinem Wort vom Startzustand aus erreichbar sind. In der Übung werden wir eine Methode kennenlernen, die Potenzmengenkonstruktion systematisch so anzuwenden, dass nicht erreichbare Zustände von vorn herein weggelassen werden. Dies reicht allerdings nicht aus, damit der erzeugte Automat so klein wie möglich ist!). Wir werden später eine allgemeine Methode kennenlernen, um zu einer gegebenen erkennbaren Sprachen den kleinstmöglichen DEA zu konstruieren.

Wir betrachten noch zwei natürliche Varianten von NEAs, die sich in manchen technischen Konstruktionen als sehr nützlich herausstellen. Wir werden sehen, dass sie dieselben Sprachen erkennen können wie NEAs.

Definition 1.14 (NEA mit Wortübergängen, ε -NEA)

Ein NEA mit Wortübergängen hat die Form $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$, wobei Q, Σ, q_0, F wie beim NEA definiert sind und $\Delta \subseteq Q \times \Sigma^* \times Q$ eine endliche Menge von Wortübergängen ist.

Ein ε -NEA ist ein NEA mit Wortübergängen der Form (q, ε, q') und (q, a, q') mit $a \in \Sigma$.

Pfade, Pfadbeschriftungen und erkannte Sprache werden entsprechend wie für NEAs definiert. Zum Beispiel hat der Pfad

$$q_0 \xrightarrow{ab} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2 \xrightarrow{bb} q_3$$

die Beschriftung $ab \cdot \varepsilon \cdot bb = abbb$.

Man beachte, dass $q \xrightarrow{a} p$ bedeutet, dass man von q nach p kommt, indem man zunächst beliebig viele ε -Übergänge macht, dann einen a -Übergang und danach wieder beliebig viele ε -Übergänge (im Unterschied zu $q \xrightarrow{a} p$).

Satz 1.15

Zu jedem NEA mit Wortübergängen kann man einen äquivalenten NEA konstruieren.

Man zeigt Satz 1.15 mit Umweg über ε -NEAs.

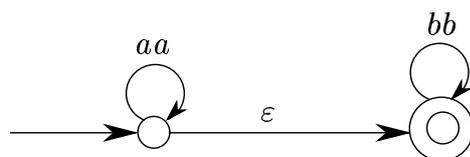
Lemma 1.16

Zu jedem NEA mit Wortübergängen kann man einen äquivalenten ε -NEA konstruieren.

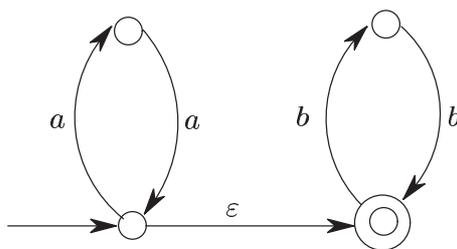
Beweis. Man ersetzt jeden Wortübergang $(q, a_1 \cdots a_n, q')$ mit $n > 1$ durch Symbolübergänge $(q, a_1, p_1), (p_1, a_2, p_2), \dots, (p_{n-1}, a_n, q')$, wobei p_1, \dots, p_{n-1} jeweils neue Hilfszustände sind (die nicht zur Endzustandsmenge dazugenommen werden). Man sieht leicht, dass dies einen äquivalenten ε -NEA liefert. □

Beispiel 1.17

Der NEA mit Wortübergängen, der durch die folgende Darstellung gegeben ist:



wird überführt in einen äquivalenten ε -NEA:



Lemma 1.18

Zu jedem ε -NEA kann man einen äquivalenten NEA konstruieren.

Beweis. Der ε -NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ sei gegeben. Wir konstruieren daraus einen NEA \mathcal{A}' ohne ε -Übergänge wie folgt:

$\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, q_0, \Delta', F')$, wobei

- $\Delta' := \left\{ (p, a, q) \in Q \times \Sigma \times Q \mid p \xrightarrow{a}_{\mathcal{A}} q \right\}$
- $F' := \begin{cases} F \cup \{q_0\} & \text{falls } q_0 \xrightarrow{\varepsilon}_{\mathcal{A}} q_f \text{ für ein } q_f \in F \\ F & \text{sonst} \end{cases}$

Wir zeigen, dass $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$.

1. $L(\mathcal{A}') \subseteq L(\mathcal{A})$:

Sei $w = a_1 \cdots a_n \in L(\mathcal{A}')$. Dann gibt es einen Pfad

$$p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}'} p_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{A}'} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}}_{\mathcal{A}'} p_{n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}'} p_n \quad \text{mit } p_0 = q_0, p_n \in F'.$$

Nach Definition von Δ' gibt es auch in \mathcal{A} einen Pfad π von p_0 nach p_n mit Beschriftung w (der u.U. zusätzliche ε -Schritte enthält).

1. Fall: $p_n \in F$

Dann zeigt π , dass $w \in L(\mathcal{A})$.

2. Fall: $p_n \in F' \setminus F$, d.h. $p_n = q_0$

Nach Definition von F' gilt $q_0 \xrightarrow{\varepsilon} p$ für ein $p \in F$. Es gibt also in \mathcal{A} einen Pfad von p_0 über $p_n = q_0$ nach $p \in F$ mit Beschriftung w , daher $w \in L(\mathcal{A})$.

2. $L(\mathcal{A}) \subseteq L(\mathcal{A}')$: Sei $w \in L(\mathcal{A})$.

1. Fall: $w \neq \varepsilon$. Sei

$$\pi = p_0 \xrightarrow{\varepsilon} p'_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{\varepsilon} p'_1 \xrightarrow{a_2} p_2 \xrightarrow{\varepsilon} \dots \xrightarrow{\varepsilon} p'_{n-1} \xrightarrow{a_n} p_n$$

Pfad in \mathcal{A} mit $p_0 = q_0$, $p_n \in F$ und Beschriftung w . Nach Definition von Δ' ist

$$p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_{n-1}} p_{n-1} \xrightarrow{a_n} p_n$$

ein Pfad in \mathcal{A}' . Aus $p_n \in F$ folgt $p_n \in F'$, also $w \in L(\mathcal{A}')$.

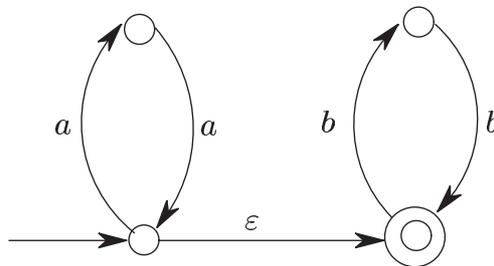
2. Fall: $w = \varepsilon$

Wegen $\varepsilon \in L(\mathcal{A})$ gibt es $p \in F$ mit $q_0 \xrightarrow{\varepsilon} p$. Also $q_0 \in F'$ nach Definition von F' und damit $\varepsilon \in L(\mathcal{A}')$.

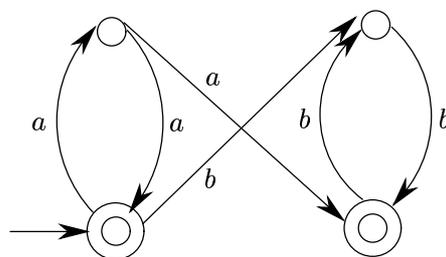
□

Beispiel: (zu Lemma 1.18)

Der ε -NEA aus Beispiel 1.17



wird in folgenden NEA überführt:



2. Nachweis der Nichterkennbarkeit

Nicht jede formale Sprache ist erkennbar. Im Gegenteil ist es so, dass nur solche Sprachen, die auf sehr reguläre Weise aufgebaut sind, erkennbar sein können. Es stellt sich also die Frage, wie man von einer Sprache nachweist, dass sie *nicht* erkennbar ist.

Um nachzuweisen, dass eine gegebene Sprache erkennbar ist, genügt es, einen endlichen Automaten (DEA oder NEA) dafür anzugeben. Der Nachweis, dass eine Sprache nicht erkennbar ist, gestaltet sich schwieriger: man kann nicht alle unendlich viele existierenden Automaten durchprobieren und es genügt auch nicht, zu sagen, dass man keinen funktionierenden Automaten gefunden hat.

Darum verwendet man die folgende Strategie. Man etabliert allgemeine Eigenschaften, die von jeder erkennbaren Sprache erfüllt werden. Um von einer Sprache zu zeigen, dass sie nicht erkennbar ist, genügt es dann, nachzuweisen, dass sie die Eigenschaft verletzt. Die wichtigste solche Eigenschaft wird durch das bekannte Pumping-Lemma beschrieben, das in verschiedenen Versionen existiert.

Lemma 2.1 (Pumping-Lemma, einfache Version)

Es sei L eine erkennbare Sprache. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$, so dass gilt: Jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n_0$ lässt sich zerlegen in $w = xyz$ mit

- $y \neq \varepsilon$
- $xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ ein NEA mit $L(\mathcal{A}) = L$. Wir wählen $n_0 = |Q|$. Sei nun $w = a_1 \cdots a_m \in L$ ein Wort mit $m \geq n_0$. Dann existiert ein Pfad

$$p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} p_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{A}} \cdots \xrightarrow{a_m}_{\mathcal{A}} p_m$$

mit $p_0 = q_0$ und $p_m \in F$. Wegen $m \geq n_0 = |Q|$ können die $m + 1$ Zustände p_0, \dots, p_m nicht alle verschieden sein. Es gibt also ein $i < j$ mit $p_i = p_j$. Wir wählen

$$x := a_1 \cdots a_i, \quad y := a_{i+1} \cdots a_j, \quad z := a_{j+1} \cdots a_m.$$

Offensichtlich gilt $y \neq \varepsilon$ (da $i < j$) und

$$q_0 = p_0 \xrightarrow{x}_{\mathcal{A}} p_i \xrightarrow{y}_{\mathcal{A}} p_i = p_j \xrightarrow{z}_{\mathcal{A}} p_m \in F.$$

Folglich gilt für alle $k \geq 0$ auch $p_i \xrightarrow{y^k}_{\mathcal{A}} p_i$, was $xy^kz \in L$ zeigt. □

Wir zeigen mit Hilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nicht erkennbar ist.

Beispiel:

$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist *nicht* erkennbar.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, L sei erkennbar. Es gibt also eine Zahl n_0 mit den in Lemma 2.1 beschriebenen Eigenschaften. Wähle das Wort

$$w = a^{n_0}b^{n_0} \in L.$$

Da $|w| \geq n_0$, gibt es eine Zerlegung $a^{n_0}b^{n_0} = xyz$ mit $|y| \geq 1$ und $xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

1. Fall: y liegt ganz in a^{n_0} .

D.h. $x = a^{k_1}$, $y = a^{k_2}$, $z = a^{k_3}b^{n_0}$ mit $k_2 > 0$ und $n_0 = k_1 + k_2 + k_3$. Damit ist aber $xy^0z = xz = a^{k_1+k_3}b^{n_0} \notin L$, da $k_1 + k_3 < n_0$. Widerspruch.

2. Fall: y liegt ganz in b^{n_0} .

Führt entsprechend zu einem Widerspruch.

3. Fall: y enthält as und bs .

Dann ist xy^2z von der Form $a^{k_1}b^{k_2}a^{k_3}b^{k_4}$ wobei alle $k_i > 0$, also $xy^2z \notin L$. Widerspruch.

In allen drei Fällen haben wir also einen Widerspruch erhalten, d.h. die Annahme „ L ist erkennbar“ war falsch. □

Mit Hilfe der einfachen Variante des Pumping-Lemmas gelingt es leider nicht immer, die Nichterkennbarkeit einer Sprache nachzuweisen, denn es gibt Sprachen, die nicht erkennbar sind, aber trotzdem die in Lemma 2.1 beschriebene Pumping-Eigenschaft erfüllen. Anders ausgedrückt ist die Pumping-Eigenschaft aus Lemma 2.1 zwar *notwendig* für die Erkennbarkeit einer Sprache, aber nicht *hinreichend*.

Beispiel 2.2

Ist $L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$ erkennbar? Versucht man, Nichterkennbarkeit mit Lemma 2.1 zu zeigen, so scheitert man, da L die Eigenschaft aus dem einfachen Pumping-Lemma erfüllt:

Wähle $n_0 := 3$. Es sei nun $w \in L$ mit $|w| \geq 3$, d.h. $w = a^n b^m$, $n \neq m$ und $n + m \geq 3$. Wir zeigen: w läßt sich zerlegen in $w = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $xy^kz \in L$ für alle $k \geq 0$.

1. Fall: $n > m$ (es gibt mehr as als bs)

1.1.: $n > m + 1$ (es gibt mind. 2 as mehr als bs)

Zerlege w in $x = \varepsilon$, $y = a$, $z = a^{n-1}b^m$. Dann hat jedes $xy^kz = a^{(n-1)+k}b^m$ mehr as als bs , ist also in L .

1.2.: $n = m + 1$ (es gibt genau ein a mehr als bs)

Wegen $|w| \geq 3$ kann man w zerlegen in $x = \varepsilon$, $y = a^2$, $z = a^{n-2}b^m$. Es gilt:

a) $xy^0z = a^{n-2}b^m$ hat ein a weniger als bs , ist also in L

b) $xy^kz = a^{(n-2)+2k}b^m$ hat mehr as als bs für alle $k \geq 1$, ist also in L .

2. Fall: $n < m$ (es gibt mehr bs als as)

Symmetrisch zum 1. Fall.

Trotzdem ist $L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$ nicht erkennbar, was man mit der folgenden verschärften Variante des Pumping-Lemmas nachweisen kann.

Lemma 2.3 (Pumping-Lemma, verschärfte Variante)

Es sei L erkennbar. Dann gibt es eine natürliche Zahl $n_0 \geq 1$, so dass gilt:

Für alle Wörter $u, v, w \in \Sigma^$ mit $uvw \in L$ und $|v| \geq n_0$ gibt es eine Zerlegung $v = xyz$ mit*

- $y \neq \varepsilon$
- $uxy^kzw \in L$ für alle $k \geq 0$

Beweis. Es sei wieder $n_0 := |Q|$, wobei Q die Zustände eines NEA \mathcal{A} für L sind. Ist $uvw \in L$, so gibt es Zustände $p, q, f \in Q$ mit

$$q_0 \xrightarrow{u}_{\mathcal{A}} p \xrightarrow{v}_{\mathcal{A}} q \xrightarrow{w}_{\mathcal{A}} f \in F$$

Auf dem Pfad von p nach q liegen $|v| + 1 > n_0$ Zustände, also müssen zwei davon gleich sein. Jetzt kann man wie im Beweis von Lemma 2.1 weitermachen. □

Im Vergleich mit Lemma 2.1 macht dieses Lemma eine stärkere Aussage: es ist nicht nur so, dass man jedes Wort w mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile zerlegen und dann „pumpen“ kann, sondern das gilt sogar für *jedes Teilwort* v von w mit $|v| \geq n_0$. Beim Nachweis der Nichterkennbarkeit hat das den Vorteil, dass man das Teilwort v frei wählen kann, so wie es zum Herstellen eines Widerspruchs am bequemsten ist.

Beispiel 2.2 (Fortsetzung)

$L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$ ist *nicht* erkennbar.

Beweis. Angenommen, L ist doch erkennbar; dann gibt es $n_0 \geq 1$, das die in Lemma 2.3 geforderten Eigenschaften hat. Wähle des Wort

$$a^{n_0} b^{n_0! + n_0} \in L \text{ und die Zerlegung } u := \varepsilon, v := a^{n_0}, w := b^{n_0! + n_0}$$

Dann gibt es eine Zerlegung $v = xyz$ mit $y \neq \varepsilon$ und $uxy^kzw \in L$ für alle $k \geq 0$. Sei

$$x = a^{k_1}, y = a^{k_2}, z = a^{k_3}, k_1 + k_2 + k_3 = n_0, k_2 > 0$$

Da $0 < k_2 \leq n_0$ gibt es ein ℓ mit $k_2 \cdot \ell = n_0!$. Betrachte das Wort $uxy^{\ell+1}zw$, welches in L sein müsste. Die Anzahl von as ist

$$k_1 + (\ell + 1) \cdot k_2 + k_3 = k_1 + k_2 + k_3 + (\ell \cdot k_2) = n_0 + n_0!$$

und die Anzahl von bs (welche nur im Teilwort w auftreten) ebenso, also gilt $uxy^{\ell+1}zw \notin L$. Widerspruch. □

Auch Lemma 2.3 formuliert nur eine notwendige Eigenschaft für die Erkennbarkeit einer Sprache, aber keine hinreichende. In der Literatur findet man noch verschärfte (und kompliziertere) Varianten des Pumping-Lemmas, die dann auch hinreichend sind (z.B. Jaffes Pumping-Lemma). Diese Varianten liefern also eine automatenunabhängige Charakterisierung der erkennbaren Sprachen.

3. Abschlusseigenschaften und Entscheidungsprobleme

Endliche Automaten definieren eine ganze *Klasse* von Sprachen: die erkennbaren Sprachen (auch *reguläre Sprachen* genannt, siehe Kapitel 4). Anstatt die Eigenschaften einzelner Sprachen zu studieren (wie z.B. Erkennbarkeit) kann man auch die Eigenschaften ganzer Sprachklassen betrachten. Wir interessieren uns hier insbesondere für Abschlusseigenschaften, zum Beispiel unter Schnitt: wenn L_1 und L_2 erkennbare Sprachen sind, dann ist auch $L_1 \cap L_2$ eine erkennbare Sprache.

Es stellt sich heraus, dass die Klasse der erkennbaren Sprachen unter den meisten natürlichen Operationen abgeschlossen ist. Diese Eigenschaft ist für viele technische Konstruktionen und Beweise sehr nützlich. Wie wir beispielsweise sehen werden, kann man manchmal die Anwendung des Pumping-Lemmas durch ein viel einfacheres Argument ersetzen, das auf Abgeschlossenheitseigenschaften beruht. Später werden wir sehen, dass andere interessante Sprachklassen nicht unter allen natürlichen Operationen abgeschlossen sind.

Satz 3.1 (Abschlusseigenschaften erkennbarer Sprachen)

Sind L_1 und L_2 erkennbar, so sind auch

- $L_1 \cup L_2$ (Vereinigung)
- $\overline{L_1}$ (Komplement)
- $L_1 \cap L_2$ (Schnitt)
- $L_1 \cdot L_2$ (Konkatenation)
- L_1^* (Kleene-Stern)

erkennbar.

Beweis. Seien $\mathcal{A}_i = (Q_i, \Sigma, q_{0i}, \Delta_i, F_i)$ zwei NEAs für L_i ($i = 1, 2$). O.B.d.A. gelte $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

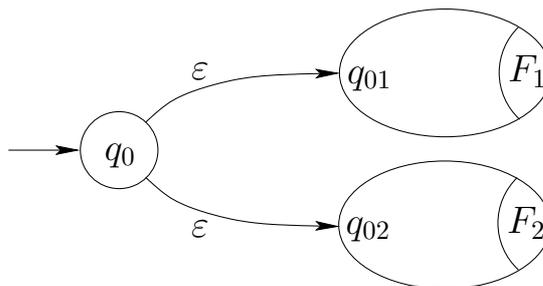
1) Abschluss unter Vereinigung:

Der folgende ε -NEA erkennt $L_1 \cup L_2$:

$\mathcal{A} := (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}, \Sigma, q_0, \Delta, F_1 \cup F_2)$, wobei

- $q_0 \notin Q_1 \cup Q_2$ und
- $\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(q_0, \varepsilon, q_{01}), (q_0, \varepsilon, q_{02})\}$.

Schematisch sieht der *Vereinigungsautomat* \mathcal{A} so aus.



Mit Lemma 1.18 gibt es zu \mathcal{A} einen äquivalenten NEA.

2) **Abschluss unter Komplement:**

Einen DEA für $\overline{L_1}$ erhält man wie folgt:

Zunächst verwendet man die Potenzmengenkonstruktion, um zu \mathcal{A}_1 einen äquivalenten DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ zu konstruieren. Den DEA für $\overline{L_1}$ erhält man nun durch Vertauschen der Endzustände mit den Nicht-Endzuständen:

$$\overline{\mathcal{A}} := (Q, \Sigma, q_0, \delta, Q \setminus F).$$

Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} w \in \overline{L_1} & \quad \text{gdw.} \quad w \notin L(\mathcal{A}_1) \\ & \quad \text{gdw.} \quad w \notin L(\mathcal{A}) \\ & \quad \text{gdw.} \quad \delta(q_0, w) \notin F \\ & \quad \text{gdw.} \quad \delta(q_0, w) \in Q \setminus F \\ & \quad \text{gdw.} \quad w \in L(\overline{\mathcal{A}}) \end{aligned}$$

Beachte: Diese Konstruktion funktioniert nicht für NEAs.

3) **Abschluss unter Schnitt:**

Wegen $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ folgt 3) aus 1) und 2).

Da die Potenzmengenkonstruktion, die wir für $\overline{L_1}$ und $\overline{L_2}$ benötigen, recht aufwendig ist und exponentiell große Automaten liefert, kann es günstiger sein, direkt einen NEA für $L_1 \cap L_2$ zu konstruieren, den sogenannten *Produktautomaten*:

$$\mathcal{A} := (Q_1 \times Q_2, \Sigma, (q_{01}, q_{02}), \Delta, F_1 \times F_2)$$

mit

$$\Delta := \{((q_1, q_2), a, (q'_1, q'_2)) \mid (q_1, a, q'_1) \in \Delta_1 \text{ und } (q_2, a, q'_2) \in \Delta_2\}$$

Ein Übergang in \mathcal{A} ist also genau dann möglich, wenn der entsprechende Übergang in \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 möglich ist.

Behauptung. $L(\mathcal{A}) = L_1 \cap L_2$.

Sei $w = a_1 \cdots a_n$. Dann ist $w \in L(\mathcal{A})$ gdw. es gibt einen Pfad

$$(q_{1,0}, q_{2,0}) \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} (q_{1,1}, q_{2,1}) \cdots (q_{1,n-1}, q_{2,n-1}) \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}} (q_{1,n}, q_{2,n})$$

mit $(q_{1,0}, q_{2,0}) = (q_{01}, q_{02})$ und $(q_{1,n}, q_{2,n}) \in F_1 \times F_2$. Nach Konstruktion von \mathcal{A} ist das der Fall gdw. für jedes $i \in \{1, 2\}$

$$q_{i,0} \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}_i} q_{i,1} \cdots q_{i,n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}_i} q_{i,n}$$

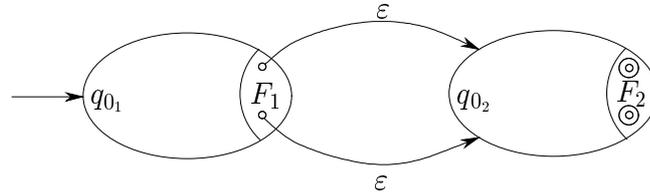
ein Pfad ist mit q_{0i} und $q_{i,n} \in F_i$. Solche Pfade existieren gdw. $w \in L_1 \cap L_2$.

4) **Abschluss unter Konkatenation:**

Der folgende ε -NEA erkennt $L_1 \cdot L_2$:

$\mathcal{A} := (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, q_{01}, \Delta, F_2)$, wobei

$\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(f, \varepsilon, q_{02}) \mid f \in F_1\}$

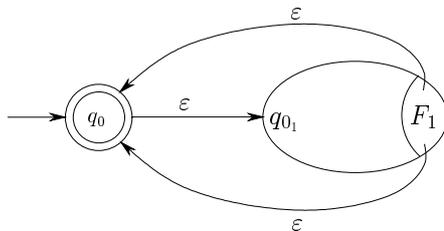


5) **Abschluss unter Kleene-Stern:**

Der folgende ε -NEA erkennt L_1^* :

$\mathcal{A} := (Q_1 \cup \{q_0\}, \Sigma, q_0, \Delta, \{q_0\})$, wobei

- $q_0 \notin Q_1$
- $\Delta := \Delta_1 \cup \{(f, \varepsilon, q_0) \mid f \in F_1\} \cup \{(q_0, \varepsilon, q_{01})\}$.



□

Anmerkung: diese Konstruktion funktioniert nicht, wenn man anstelle des neuen Zustands q_0 den ursprünglichen Startzustand verwendet (Übung!)

Beachte:

Die Automaten für die Sprachen $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 \cdot L_2$ und L_1^* sind polynomiell in der Größe der Automaten für L_1 , L_2 . Beim Komplement kann der konstruierte Automat exponentiell groß sein, wenn man mit einem NEA beginnt.

Man kann derartige Abschlusseigenschaften dazu verwenden, Nichterkennbarkeit einer Sprache L nachzuweisen.

Beispiel 3.2

$L := \{a^n b^m \mid n \neq m\}$ ist *nicht* erkennbar (vgl. Beispiel 2.2). Anstatt dies direkt mit Lemma 2.3 zu zeigen, kann man auch verwenden, dass bereits bekannt ist, dass die Sprache $L' := \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ *nicht* erkennbar ist. Wäre nämlich L erkennbar, so auch $L' = \overline{L} \cap \{a\}^* \cdot \{b\}^*$. Da wir schon wissen, dass L' nicht erkennbar ist, kann auch L nicht erkennbar sein.

Entscheidungsprobleme

Wenn man einen endlichen Automaten in einer konkreten Anwendung einsetzen will, so ist es wichtig, sich zunächst vor Augen zu führen, was *genau* man mit dem Automaten anfangen möchte. In Abhängigkeit davon kann man dann die konkreten, in dieser Anwendung zu lösenden algorithmischen Probleme bestimmen.

Wir betrachten drei typische Probleme im Zusammenhang mit erkennbaren Sprachen. Bei allen dreien handelt es sich um *Entscheidungsprobleme*, also um Probleme, für die der Algorithmus eine Antwort aus der Menge {ja, nein} berechnen soll—formal werden wir diesen Begriff erst in Teil III einführen. Die drei betrachteten Probleme sind:

- das *Wortproblem*:
gegeben ein endlicher Automat \mathcal{A} und eine Eingabe $w \in \Sigma^*$ für \mathcal{A} , entscheide ob $w \in L(\mathcal{A})$;
- das *Leerheitsproblem*:
gegeben ein endlicher Automat \mathcal{A} , entscheide ob $L(\mathcal{A}) = \emptyset$;
- das *Äquivalenzproblem*:
gegeben endliche Automaten \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 , entscheide ob $L(\mathcal{A}_1) = L(\mathcal{A}_2)$.

Wir werden Algorithmen für alle diese Probleme entwerfen und deren Laufzeit analysieren: wie viele elementare Rechenschritte macht der Algorithmus auf Eingaben der Länge n ; siehe Appendix A für weitere Erklärungen zur Laufzeit- bzw. Komplexitätsanalyse von Algorithmen.

In den obigen Problemen können die als Eingabe gegebenen endlichen Automaten entweder DEAs oder NEAs sein. Für die Anwendbarkeit der Algorithmen macht das im Prinzip keinen Unterschied, da man zu jedem NEA ja einen äquivalenten DEA konstruieren kann (man überlegt sich leicht, dass die Potenzmengenkonstruktion aus Satz 1.12 algorithmisch implementierbar ist). Bezüglich der Laufzeit kann es aber einen erheblichen Unterschied geben, da der Übergang von NEAs zu DEAs einen exponentiell größeren Automaten liefert und damit auch die Laufzeit exponentiell größer wird.

Wortproblem (DEA)

Ist der Eingabeautomat \mathcal{A} für das Wortproblem ein DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$, so kann man beginnend mit q_0 durch Anwendung von δ berechnen, in welchem Zustand \mathcal{A} nach dem Lesen der Eingabe w ist. Man muß dann nur noch prüfen, ob dies ein Endzustand ist. Man muss δ offensichtlich $|w|$ mal anwenden und jede Anwendung benötigt $|\delta|$ Schritte (Durchsuchen von δ nach dem richtigen Übergang).

Satz 3.3

Das Wortproblem für DEAs ist in Zeit $O(|w| \cdot |\delta|)$ entscheidbar.

Für einen NEA ist dieser triviale Algorithmus nicht möglich, da es ja mehrere mit w beschriftete Pfade geben kann. In der Tat führen die naiven Ansätze zum Entscheiden des Wortproblems für NEAs zu exponentieller Laufzeit:

- Alle Pfade für das Eingabewort durchprobieren.

Im schlimmsten Fall gibt es $|Q|^{|w|}$ viele solche Pfade, also exponentiell viele. Wenn $w \notin L(\mathcal{A})$ werden alle diese Pfade auch tatsächlich überprüft.

- Erst Potenzmengenkonstruktion anwenden, um DEA zu konstruieren.

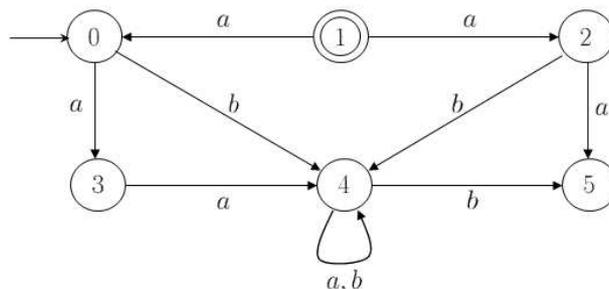
Wie bereits erwähnt führt die exponentielle Vergrößerung des Automaten zu exponentieller Laufzeit.

Es stellt sich allerdings heraus, dass auch das Wortproblem für NEAs effizient lösbar ist. Wir verwenden dazu (einen Trick und) den Algorithmus für das Leerheitsproblem, das wir im folgenden betrachten.

Leerheitsproblem

Wir betrachten hier direkt NEAs. Da jeder DEA auch ein NEA ist, können die entwickelten Algorithmen natürlich auch für DEAs verwendet werden.

Im Gegensatz zum Wortproblem ist beim Leerheitsproblem keine konkrete Eingabe gegeben. Es scheint daher zunächst, als müsste man alle (unendlich vielen) Eingaben durchprobieren, was natürlich unmöglich ist. Ein einfaches Beispiel zeigt aber sofort, dass das Leerheitsproblem sehr einfach zu lösen ist. Betrachte den folgenden NEA \mathcal{A} :



Offensichtlich ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$, da der Endzustand vom Startzustand aus gar nicht erreichbar ist. Man überlegt sich leicht, dass auch die umgekehrte Implikation gilt: wenn $L(\mathcal{A}) = \emptyset$, dann ist kein Endzustand vom Startzustand aus erreichbar, denn sonst würde die Beschriftung des den Endzustand erreichenden Pfades ein Wort $w \in L(\mathcal{A})$ liefern. Das Leerheitsproblem ist also nichts weiter als ein Erreichbarkeitsproblem auf gerichteten Graphen wie dem oben dargestellten.

Das konkrete Wort, mit dem ein Endzustand erreicht wird, interessiert uns im Fall des Leerheitsproblems meist nicht. Da wir jedoch im folgenden Aussagen über die Länge von Pfaden treffen müssen, schreiben wir $p \xRightarrow{i}_{\mathcal{A}} q$ (q wird in \mathcal{A} von p mit einem Pfad der Länge höchstens i erreicht) wenn $p \xRightarrow{w}_{\mathcal{A}} q$ für ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \leq i$.

Es gibt verschiedene effiziente Algorithmen für Erreichbarkeitsprobleme auf gerichteten Graphen. Der folgende ist eine Variante von "Breitensuche" und entscheidet das Leerheitsproblem für einen gegebenen NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ in polynomieller Zeit. Berechne eine Folge von Zustandsmengen P_0, P_1, \dots wie folgt:

- $P_0 := \{q_0\}$
- $P_{i+1} := P_i \cup \{q \in Q \mid \exists p \in P_i \exists a \in \Sigma : (p, a, q) \in \Delta\}$.

Stoppe sobald $P_{i+1} = P_i$. Antworte “ja” wenn $P_i \cap F = \emptyset$ und “nein” sonst.

Lemma 3.4

Der Algorithmus terminiert nach maximal $|Q|$ Iterationen und gibt “ja” zurück gdw. $L(\mathcal{A}) = \emptyset$.

Beweis. Die Terminierung in $|Q|$ Schritten folgt unmittelbar aus der Beobachtung, dass

$$P_0 \subseteq P_1 \subseteq P_2 \cdots \subseteq Q.$$

Bei Terminierung nach i Schritten, setze $S_j := S_i$ für alle $j > i$.

Der Beweis der Korrektheit basiert auf folgender Behauptung.

Behauptung: $q \in P_j$ gdw. $q_0 \xRightarrow{\mathcal{A}}^j q$ für alle $j \geq 0$ und $q \in Q$.

Beweis per Induktion über j :

$j = 0$. $q \in P_0$ gdw. $q = q_0$ gdw. $q_0 \xRightarrow{\mathcal{A}}^0 q$.

$j > 0$. $q \in P_j$ gdw. $q \in P_{j-1}$ oder $(p, a, q) \in \Delta$ mit $p \in P_{j-1}$ und $a \in \Sigma$
 gdw. $q \in P_{j-1}$ oder $(p, a, q) \in \Delta$ und $q_0 \xRightarrow{\mathcal{A}}^{j-1} p$
 gdw. $q_0 \xRightarrow{\mathcal{A}}^j q$.

Die Korrektheit des Algorithmus folgt:

Der Algorithmus gibt “ja” zurück

gdw. $P_i \cap F = \emptyset$

gdw. $P_j \cap F = \emptyset$ für alle $j \geq 0$

gdw. $q_0 \not\xRightarrow{\mathcal{A}}^j q_f$ für alle $q_f \in F$ und $j \geq 0$

gdw. $L(\mathcal{A}) = \emptyset$ □

Der Algorithmus stoppt also nach $|Q|$ Iterationen. Jede Iteration braucht bei naiver Implementierung Zeit $\mathcal{O}(|Q| \cdot |\Delta|)$: laufe über alle Zustände $p \in P_i$, für jeden solchen Zustand laufe über Δ und suche alle Übergänge (p, a, q) . Insgesamt benötigt der Algorithmus also Zeit $\mathcal{O}(|Q|^2 \cdot |\Delta|)$. Durch geschickte Datenstrukturen kann man die Laufzeit verbessern auf Zeit $\mathcal{O}(|Q| + |\Delta|)$, also *Linearzeit*. Mehr Informationen finden sich beispielsweise im Buch „Introduction to Algorithms“ von Cormen, Leiserson, Rivest und Stein unter dem Thema *Erreichbarkeit in gerichteten Graphen / reachability in directed graphs*. In der Tat ist das Leerheitsproblem im wesentlichen einfach nur eine Instanz dieses generelleren Problems.

Satz 3.5

Das Leerheitsproblem für NEAs ist in Zeit $\mathcal{O}(|Q| + |\Delta|)$ entscheidbar.

Wortproblem (NEA)

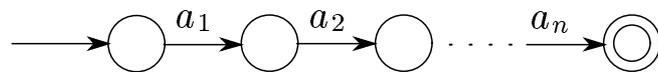
Wir verwenden Satz 3.5 um nachzuweisen, dass das Wortproblem für NEAs nicht schwieriger ist als das für DEAs. Die exponentielle Laufzeit der naiven Ansätze kann also vermieden werden.

Satz 3.6

Das Wortproblem für NEAs ist in Zeit $O(|w| \cdot |\delta|)$ entscheidbar.

Wir verwenden eine *Reduktion* des Wortproblems auf das Leerheitsproblem: der schon gefundene Algorithmus für das Leerheitsproblem wird verwendet, um das Wortproblem zu lösen (mehr zu Reduktionen findet sich in den Teilen III+IV).

Beweis. Konstruiere zunächst einen Automaten \mathcal{A}_w , der genau das Wort $w = a_1 \cdots a_n$ akzeptiert:



Dieser Automat hat $|w| + 1$ Zustände. Offenbar ist

$$w \in L(\mathcal{A}) \quad \text{gdw.} \quad L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{A}_w) \neq \emptyset.$$

Wir können also entscheiden, ob $w \in L(\mathcal{A})$ ist, indem wir zunächst den Produktautomaten zu \mathcal{A} und \mathcal{A}_w konstruieren und dann unter Verwendung von Satz 3.5 prüfen, ob dieser eine nicht-leere Sprache erkennt.

Wir analysieren zunächst die Größe des Produktautomaten:

Zustände: $|Q| \cdot (|w| + 1)$

Übergänge: Da es in \mathcal{A}_w genau $|w|$ viele Übergänge gibt, ist die Zahl Übergänge des Produktautomaten durch $|w| \cdot |\Delta|$ beschränkt.

Nach Satz 3.5 ist daher der Aufwand zum Testen von $L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{A}_w) \neq \emptyset$ also:

$$O(|Q| \cdot (|w| + 1) + |w| \cdot |\Delta|) = O(|w| \cdot (|Q| + |\Delta|)) \quad \square$$

Auch die Konstruktion des Produktautomaten benötigt Zeit. Man überlegt sich leicht, dass auch hierfür die Zeit $O(|w| \cdot (|Q| + |\Delta|))$ ausreichend ist. Als Gesamtlaufzeit ergibt sich

$$2 \cdot O(|w| \cdot (|Q| + |\Delta|)) = O(|w| \cdot (|Q| + |\Delta|)).$$

Äquivalenzproblem

Wir verwenden sowohl für DEAs als auch für NEAs eine Reduktion auf das Leerheitsproblem:

$$L_1 = L_2 \quad \text{gdw.} \quad (L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (L_2 \cap \overline{L_1}) = \emptyset$$

Im Fall des Äquivalenzproblems wollen wir auf eine ganz exakte Analyse der Laufzeit des sich ergebenden Algorithmus verzichten. Allerdings gibt es einen interessanten Unterschied zwischen DEAs und NEAs, der im folgenden Satz herausgearbeitet wird.

Satz 3.7

Das Äquivalenzproblem für DEAs ist in polynomieller Zeit entscheidbar. Für NEAs ist es in exponentieller Zeit entscheidbar.

Beweis. Die Konstruktion für Schnitt (Produktautomat) und Vereinigung ist sowohl für DEAs als auch für NEAs polynomiell. Bei der Komplementierung ist dies nur dann der Fall, wenn bereits DEAs vorliegen. Bei NEAs muss zunächst die Potenzmengenkonstruktion angewendet werden, daher kann der auf Leerheit zu testende Automat exponentiell groß sein. Damit ergibt sich exponentielle Laufzeit. \square

Wir werden in Teil IV sehen, dass sich der exponentielle Zeitaufwand für das Äquivalenzproblem für NEAs (wahrscheinlich) nicht vermeiden lässt. Vorgreifend auf Teil IV sei erwähnt, dass das Äquivalenzproblem für NEAs PSPACE-vollständig ist und damit zu einer Klasse von Problemen gehört, die wahrscheinlich nicht in polynomieller Zeit lösbar sind.

4. Reguläre Ausdrücke und Sprachen

Wir haben bereits einige *verschiedene Charakterisierungen* der Klasse der erkennbaren Sprachen gesehen:

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist *erkennbar* gdw.

- (1) $L = L(\mathcal{A})$ für einen DEA \mathcal{A} .
- (2) $L = L(\mathcal{A})$ für einen NEA \mathcal{A} .
- (3) $L = L(\mathcal{A})$ für einen ε -NEA \mathcal{A} .
- (4) $L = L(\mathcal{A})$ für einen NEA mit Wortübergängen \mathcal{A} .

Im folgenden betrachten wir eine weitere Charakterisierung mit Hilfe *regulärer Ausdrücke*. Diese Stellen eine bequeme „Sprache“ zur Verfügung, mittels derer erkennbare Sprachen beschrieben werden können. Varianten von regulären Ausdrücken werden in tools wie Emacs, Perl und sed zur Beschreibung von Mustern („Patterns“) verwendet.

Definition 4.1 (Syntax regulärer Ausdrücke)

Sei Σ ein endliches Alphabet. Die Menge Reg_Σ der *regulären Ausdrücke über Σ* ist induktiv definiert:

- $\emptyset, \varepsilon, a$ (für $a \in \Sigma$) sind Elemente von Reg_Σ .
- Sind $r, s \in Reg_\Sigma$, so auch $(r + s), (r \cdot s), r^* \in Reg_\Sigma$.

Beispiel 4.2

$((a \cdot b^*) + \emptyset^*)^* \in Reg_\Sigma$ für $\Sigma = \{a, b\}$

Notation:

Um Klammern zu sparen, lassen wir Außenklammern weg und vereinbaren,

- dass $*$ stärker bindet als \cdot
- dass \cdot stärker bindet als $+$
- \cdot lassen wir meist ganz wegfallen.

Der Ausdruck aus Beispiel 4.2 kann also geschrieben werden als $(ab^* + \emptyset^*)^*$.

Um die Bedeutung bzw. Semantik von regulären Ausdrücken zu fixieren, wird jedem regulären Ausdruck r über Σ eine formale Sprache $L(r)$ zugeordnet.

Definition 4.3 (Semantik regulärer Ausdrücke)

Die durch den regulären Ausdruck r definierte Sprache $L(r)$ ist induktiv definiert:

- $L(\emptyset) := \emptyset, \quad L(\varepsilon) := \{\varepsilon\}, \quad L(a) := \{a\}$
- $L(r + s) := L(r) \cup L(s), \quad L(r \cdot s) := L(r) \cdot L(s), \quad L(r^*) := L(r)^*$

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *regulär*, falls es ein $r \in Reg_\Sigma$ gibt mit $L = L(r)$.

Beispiel:

- $(a + b)^*ab(a + b)^*$ definiert die Sprache aller Wörter über $\{a, b\}$, die Infix ab haben.
- $L(ab^* + b) = \{ab^i \mid i \geq 0\} \cup \{b\}$

Bemerkung:

Statt $L(r)$ schreiben wir im folgenden häufig einfach r .

Dies ermöglicht es und z.B., zu schreiben:

- $(ab)^*a = a(ba)^*$ (eigentlich $L((ab)^*a) = L(a(ba)^*)$)
- $L(\mathcal{A}) = ab^* + b$ (eigentlich $L(\mathcal{A}) = L(ab^* + b)$)

Wir zeigen nun, dass man mit regulären Ausdrücken genau die erkennbaren Sprachen definieren kann.

Satz 4.4 (Kleene)

Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sind äquivalent:

- 1) L ist regulär.
- 2) L ist erkennbar.

Beweis.

„1 \rightarrow 2“: Induktion über den Aufbau regulärer Ausdrücke

Anfang:

- $L(\emptyset) = \emptyset$ erkennbar: $\rightarrow \bigcirc$ ist NEA für \emptyset (kein Endzustand).
- $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$ erkennbar: $\rightarrow \bigcirc$ ist NEA für $\{\varepsilon\}$.
- $L(a) = \{a\}$ erkennbar: $\rightarrow \bigcirc \xrightarrow{a} \bigcirc$ ist NEA für $\{a\}$.

Schritt: Weiß man bereits, dass $L(r)$ und $L(s)$ erkennbar sind, so folgt mit Satz 3.1 (Abschlusseigenschaften), dass auch

- $L(r + s) = L(r) \cup L(s)$
- $L(r \cdot s) = L(r) \cdot L(s)$ und
- $L(r^*) = L(r)^*$

erkennbar sind.

„2 \rightarrow 1“: Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ ein NEA mit $L = L(\mathcal{A})$. Für alle $p, q \in Q$ und $X \subseteq Q$, sei $L_{p,q}^X$ die Sprache aller Wörter $w = a_1 \cdots a_n$ für die es einen Pfad

$$p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} p_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{A}} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}}_{\mathcal{A}} p_{n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}} p_n$$

gibt mit $p_0 = p, p_n = q$ und $\{p_1, \dots, p_{n-1}\} \subseteq X$. Offensichtlich gilt

$$L(\mathcal{A}) = \bigcup_{q_f \in F} L_{q_0, q_f}^Q.$$

Es reicht also, zu zeigen dass alle Sprachen $L_{p,q}^X$ regulär sind. Dies erfolgt per Induktion über die Größe von X .

Anfang: $X = \emptyset$.

- 1. Fall: $p \neq q$
Dann ist $L_{p,q}^\emptyset = \{a \in \Sigma \mid (p, a, q) \in \Delta\}$. Damit hat $L_{p,q}^\emptyset$ die Form $\{a_1, \dots, a_k\}$ und der entsprechende reguläre Ausdruck ist $a_1 + \dots + a_k$.
- 2. Fall: $p = q$
Wie voriger Fall, ausser dass $L_{p,q}^\emptyset$ (und damit auch der konstruierte reguläre Ausdruck) zusätzlich ε enthält.

Schritt: $X \neq \emptyset$.

Wähle ein beliebiges $\hat{q} \in X$. Dann gilt:

$$L_{p,q}^X = L_{p,q}^{X \setminus \{\hat{q}\}} \cup \left(L_{p,\hat{q}}^{X \setminus \{\hat{q}\}} \cdot (L_{\hat{q},\hat{q}}^{X \setminus \{\hat{q}\}})^* \cdot L_{\hat{q},q}^{X \setminus \{\hat{q}\}} \right) \quad (*)$$

Für die Sprachen, die auf der rechten Seite verwendet werden, gibt es nach Induktionsvoraussetzung reguläre Ausdrücke. Ausserdem sind alle verwendeten Operationen in regulären Ausdrücken verfügbar. Es bleibt also, (*) zu zeigen.

\subseteq Sei $w \in L_{p,q}^X$. Dann gibt es einen Pfad

$$p_0 \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{A}} p_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{A}} \dots \xrightarrow{a_{n-1}}_{\mathcal{A}} p_{n-1} \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{A}} p_n$$

mit $p_0 = p, p_n = q$ und $\{p_1, \dots, p_{n-1}\} \subseteq X$. Wenn \hat{q} nicht in $\{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ vorkommt, dann $w \in L_{p,q}^{X \setminus \{\hat{q}\}}$. Andernfalls seien i_1, \dots, i_k alle Indizes mit $p_{i_j} = \hat{q}$ (und $i_1 < \dots < i_k$). Offensichtlich gilt:

- $a_0 \dots a_{i_1} \in L_{p,\hat{q}}^{X \setminus \{\hat{q}\}}$;
- $a_{i_j+1} \dots a_{i_{j+1}} \in L_{\hat{q},\hat{q}}^{X \setminus \{\hat{q}\}}$ für $1 \leq j < k$;
- $a_{i_k+1} \dots a_n \in L_{\hat{q},q}^{X \setminus \{\hat{q}\}}$.

\supseteq Wenn $w \in L_{p,q}^{X \setminus \{\hat{q}\}}$, dann offenbar $w \in L_{p,q}^X$. Wenn

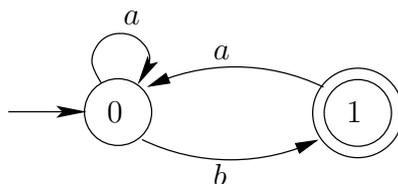
$$w \in \left(L_{p,\hat{q}}^{X \setminus \{\hat{q}\}} \cdot (L_{\hat{q},\hat{q}}^{X \setminus \{\hat{q}\}})^* \cdot L_{\hat{q},q}^{X \setminus \{\hat{q}\}} \right),$$

dann $w = xyz$ mit $x \in L_{p,\hat{q}}^{X \setminus \{\hat{q}\}}$, $y \in (L_{\hat{q},\hat{q}}^{X \setminus \{\hat{q}\}})^*$, und $z \in L_{\hat{q},q}^{X \setminus \{\hat{q}\}}$. Setzt man die entsprechenden Pfade für x, y und z zusammen, so erhält man einen mit w beschrifteten Pfad von p nach q in \mathcal{A} , in dem alle Zustände ausser dem ersten und letzten aus X sind. Also $w \in L_{p,q}^X$.

Wenn man die Konstruktion aus „2 \rightarrow 1“ in der Praxis anwendet, so ist es meist sinnvoll, die Zustände \hat{q} so zu wählen, dass der Automat in möglichst viele nicht-verbundene Teile zerfällt.

Beispiel 4.5

Betrachte den folgenden NEA \mathcal{A} :



Da 1 der einzige Endzustand ist, gilt $L(\mathcal{A}) = L_{0,1}^Q$. Wir wenden wiederholt (*) an:

$$\begin{aligned} L_{0,1}^Q &= L_{0,1}^{\{0\}} \cup L_{0,1}^{\{0\}} \cdot (L_{1,1}^{\{0\}})^* \cdot L_{1,1}^{\{0\}} \\ L_{0,1}^{\{0\}} &= L_{0,1}^\emptyset \cup L_{0,0}^\emptyset \cdot (L_{0,0}^\emptyset)^* \cdot L_{0,1}^\emptyset \\ L_{1,1}^{\{0\}} &= L_{1,1}^\emptyset \cup L_{1,0}^\emptyset \cdot (L_{0,0}^\emptyset)^* \cdot L_{0,1}^\emptyset \end{aligned}$$

Im ersten Schritt hätten wir natürlich auch 0 anstelle von 1 aus X eliminieren können. Der Induktionsanfang liefert:

$$\begin{aligned} L_{0,1}^\emptyset &= b \\ L_{0,0}^\emptyset &= a + \varepsilon \\ L_{1,1}^\emptyset &= \varepsilon \\ L_{1,0}^\emptyset &= a \end{aligned}$$

Einsetzen und Vereinfachen liefert nun:

$$\begin{aligned} L_{0,1}^{\{0\}} &= b + (a + \varepsilon) \cdot (a + \varepsilon)^* \cdot b = a^*b \\ L_{1,1}^{\{0\}} &= \varepsilon + a \cdot (a + \varepsilon)^* \cdot b = \varepsilon + aa^*b \\ L_{0,1}^Q &= a^*b + a^*b \cdot (\varepsilon + aa^*b)^* \cdot (\varepsilon + aa^*b) = a^*b(aa^*b)^* \end{aligned}$$

Der zu \mathcal{A} gehörende reguläre Ausdruck ist also $a^*b(aa^*b)^*$.

Der reguläre Ausdruck, der in der Richtung „2 \rightarrow 1“ aus einem NEA konstruiert wird, ist im allgemeinen exponentiell größer als der ursprüngliche NEA. Man kann zeigen, dass dies nicht vermeidbar ist.

Beachte: Aus Satz 3.1 und Satz 4.4 folgt, dass es zu allen regulären Ausdrücken r und s

- einen Ausdruck t gibt mit $L(t) = L(r) \cap L(s)$;
- einen Ausdruck t' gibt mit $L(t') = \overline{L(r)}$.

Es ist offensichtlich sehr schwierig, diese Ausdrücke direkt aus r und s (also ohne den Umweg über Automaten) zu konstruieren.

5. Minimale DEAs und die Nerode-Rechtskongruenz

Wir werden im Folgenden ein Verfahren angeben, welches zu einem gegebenen DEA einen äquivalenten DEA mit minimaler Zustandszahl konstruiert. Das Verfahren besteht aus 2 Schritten:

1. Schritt: Eliminieren unerreichbarer Zustände

Definition 5.1 (Erreichbarkeit eines Zustandes)

Ein Zustand q des DEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ heißt *erreichbar*, falls es ein Wort $w \in \Sigma^*$ gibt mit $\delta(q_0, w) = q$. Sonst heißt q *unerreichbar*.

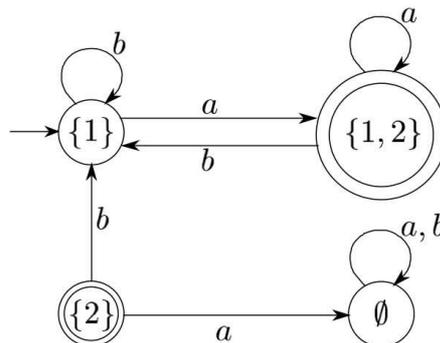
Da für die erkannte Sprache nur Zustände wichtig sind, welche von q_0 erreicht werden, erhält man durch Weglassen unerreichbarer Zustände einen äquivalenten Automaten:

$\mathcal{A}_0 = (Q_0, \Sigma, q_0, \delta_0, F_0)$ mit

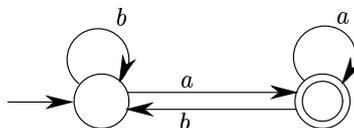
- $Q_0 = \{q \in Q \mid q \text{ ist erreichbar}\}$
- $\delta_0 = \delta \upharpoonright_{Q_0 \times \Sigma}$ (also: δ_0 ist wie δ , aber eingeschränkt auf die Zustände in Q_0)
- $F_0 = F \cap Q_0$

Beispiel.

Betrachte als Resultat der Potenzmengenkonstruktion den Automaten \mathcal{A}' aus Beispiel 1.13:



Die Zustände $\{2\}$ und \emptyset sind nicht erreichbar. Durch Weglassen dieser Zustände erhält man den DEA \mathcal{A}'_0 :

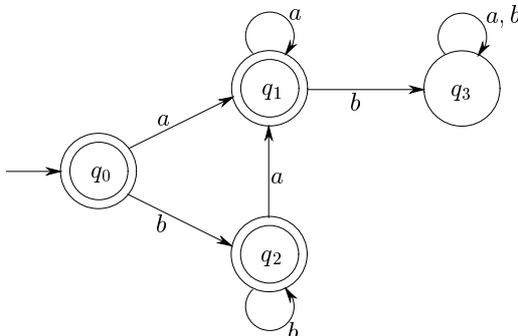


2. Schritt: Zusammenfassen äquivalenter Zustände

Ein DEA ohne unerreichbare Zustände muss noch nicht minimal sein, da er noch verschiedene Zustände enthalten kann, die sich „gleich“ verhalten in Bezug auf die erkannte Sprache.

Beispiel 5.2

Im folgenden DEA \mathcal{A} mit $L(\mathcal{A}) = b^*a^*$ sind alle Zustände erreichbar. Er erkennt dieselbe Sprache wie der DEA aus Beispiel 1.7, hat aber einen Zustand mehr. Dies kommt daher, dass q_0 und q_2 äquivalent sind.



Im allgemeinen definieren wir die Äquivalenz von Zuständen wie folgt.

Definition 5.3 (Äquivalenz von Zuständen)

Es sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ ein DEA. Für $q \in Q$ sei $\mathcal{A}_q = (Q, \Sigma, q, \delta, F)$. Zwei Zustände $q, q' \in Q$ heißen \mathcal{A} -äquivalent ($q \sim_{\mathcal{A}} q'$) gdw. $L(\mathcal{A}_q) = L(\mathcal{A}_{q'})$.

In Beispiel 5.2 gilt $q_0 \sim_{\mathcal{A}} q_2$, aber z.B. nicht $q_0 \sim_{\mathcal{A}} q_1$, da $b \in L(\mathcal{A}_{q_0}) \setminus L(\mathcal{A}_{q_1})$.

Um äquivalente Zustände auf mathematisch elegante Weise zusammenzufassen, nutzen wir aus, dass es sich bei der Relation $\sim_{\mathcal{A}}$ um eine Äquivalenzrelation handelt. Diese erfüllt zusätzlich einige weitere angenehme Eigenschaften.

Lemma 5.4

- 1) $\sim_{\mathcal{A}}$ ist eine Äquivalenzrelation auf Q , d.h. reflexiv, transitiv und symmetrisch.
- 2) $\sim_{\mathcal{A}}$ ist verträglich mit der Übergangsfunktion, d.h.

$$q \sim_{\mathcal{A}} q' \Rightarrow \forall a \in \Sigma : \delta(q, a) \sim_{\mathcal{A}} \delta(q', a)$$

- 3) $\sim_{\mathcal{A}}$ kann in Polynomialzeit berechnet werden.

Beweis.

- 1) ist klar, da „ \sim “ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.
- 2) lässt sich wie folgt herleiten:

$$\begin{aligned} q \sim_{\mathcal{A}} q' &\Rightarrow L(\mathcal{A}_q) = L(\mathcal{A}_{q'}) \\ &\Rightarrow \forall w \in \Sigma^* : \delta(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta(q', w) \in F \\ &\Rightarrow \forall a \in \Sigma \forall v \in \Sigma^* : \delta(q, av) \in F \Leftrightarrow \delta(q', av) \in F \\ &\Rightarrow \forall a \in \Sigma \forall v \in \Sigma^* : \delta(\delta(q, a), v) \in F \Leftrightarrow \delta(\delta(q', a), v) \in F \\ &\Rightarrow \forall a \in \Sigma : L(\mathcal{A}_{\delta(q, a)}) = L(\mathcal{A}_{\delta(q', a)}) \\ &\Rightarrow \forall a \in \Sigma : \delta(q, a) \sim_{\mathcal{A}} \delta(q', a) \end{aligned}$$

- 3) folgt unmittelbar daraus, dass das Äquivalenzproblem für DEAs in Polynomialzeit entscheidbar ist. \square

Die $\sim_{\mathcal{A}}$ -Äquivalenzklasse eines Zustands $q \in Q$ bezeichnen wir von nun an mit

$$[q]_{\mathcal{A}} := \{q' \in Q \mid q \sim_{\mathcal{A}} q'\}.$$

Auch wenn wir mit Punkt 3) des Lemma 5.4 bereits wissen, dass die Relation $\sim_{\mathcal{A}}$ berechenbar ist, geben wir hier noch eine direktere Methode an. Wir definieren eine Folge von Relationen $\sim_0, \sim_1, \sim_2, \dots$:

- $q \sim_0 q'$ gdw. $q \in F \Leftrightarrow q' \in F$
- $q \sim_{k+1} q'$ gdw. $q \sim_k q'$ und $\forall a \in \Sigma : \delta(q, a) \sim_k \delta(q', a)$

Diese sind (Über-)Approximationen von $\sim_{\mathcal{A}}$ im folgenden Sinn.

Behauptung.

Für alle $k \geq 0$ gilt: $q \sim_k q'$ gdw. für alle $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \leq k$: $w \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{q'})$.

Beweis. Per Induktion über k :

Anfang: Nach Def. von \sim_0 gilt $q \sim_0 q'$ gdw. $\varepsilon \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow \varepsilon \in L(\mathcal{A}_{q'})$.

Schritt:

$$\begin{aligned} q \sim_{k+1} q' &\text{ gdw. } q \sim_k q' \text{ und } \forall a \in \Sigma : \delta(q, a) \sim_k \delta(q', a) \\ &\text{ gdw. } \forall w \in \Sigma^* \text{ mit } |w| \leq k : w \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{q'}) \text{ und} \\ &\quad \forall a \in \Sigma : \forall w \in \Sigma^* \text{ mit } |w| \leq k : w \in L(\mathcal{A}_{\delta(q,a)}) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{\delta(q',a)}) \\ &\text{ gdw. } \forall w \in \Sigma^* \text{ mit } |w| \leq k+1 : w \in L(\mathcal{A}_q) \Leftrightarrow w \in L(\mathcal{A}_{q'}) \end{aligned}$$

□

Offensichtlich gilt $Q \times Q \supseteq \sim_0 \supseteq \sim_1 \supseteq \sim_2 \supseteq \dots$. Da Q endlich ist, gibt es ein $k \geq 0$ mit $\sim_k = \sim_{k+1}$. Wir zeigen, dass \sim_k die gewünschte Relation $\sim_{\mathcal{A}}$ ist. Nach obiger Behauptung und Definition von $\sim_{\mathcal{A}}$ gilt offensichtlich $\sim_{\mathcal{A}} \subseteq \sim_k$. Um $\sim_k \subseteq \sim_{\mathcal{A}}$ zu zeigen, nehmen wir das Gegenteil $\sim_k \not\subseteq \sim_{\mathcal{A}}$ an. Wähle q, q' mit $q \sim_k q'$ und $q \not\sim_{\mathcal{A}} q'$. Es gibt also ein $w \in \Sigma^*$ mit $w \in L(\mathcal{A}_q)$ und $w \notin L(\mathcal{A}_{q'})$. Mit obiger Behauptung folgt $q \not\sim_n q'$ für $n = |w|$. Da $\sim_k \subseteq \sim_i$ für all $i \geq 0$ folgt $q \not\sim_k q'$, ein Widerspruch.

Beispiel 5.2 (Fortsetzung)

Für den Automaten aus Beispiel 5.2 gilt:

- \sim_0 hat die Klassen $F = \{q_0, q_1, q_2\}$ und $Q \setminus F = \{q_3\}$.
- \sim_1 hat die Klassen $\{q_1\}, \{q_0, q_2\}, \{q_3\}$.
Zum Beispiel ist $\delta(q_0, b) = \delta(q_2, b) \in F$ und $\delta(q_1, b) \notin F$.
- $\sim_2 = \sim_1 = \sim_{\mathcal{A}}$.

In der nachfolgenden Konstruktion werden äquivalente Zustände zusammengefasst, indem die Äquivalenzklasse $[q]_{\mathcal{A}}$ selbst zu den Zuständen gemacht werden. Jede Klasse verhält sich dann genau wie die in ihr enthaltenen Zustände im ursprünglichen Automaten.

Definition 5.5 (Quotientenautomat)

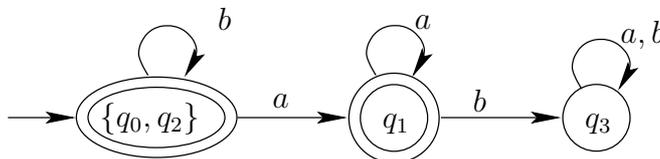
Der *Quotientenautomat* $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{Q}, \Sigma, [q_0]_{\mathcal{A}}, \tilde{\delta}, \tilde{F})$ zu $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ ist definiert durch:

- $\tilde{Q} := \{[q]_{\mathcal{A}} \mid q \in Q\}$
- $\tilde{\delta}([q]_{\mathcal{A}}, a) := [\delta(q, a)]_{\mathcal{A}}$ (repräsentantenunabhängig wegen Lemma 5.4)
- $\tilde{F} := \{[q]_{\mathcal{A}} \mid q \in F\}$

Nach Lemma 5.4 kann der Quotientenautomat in polynomieller Zeit konstruiert werden.

Beispiel 5.2 (Fortsetzung)

Für den Automaten aus Beispiel 5.2 ergibt sich der folgende Quotientenautomat:



Lemma 5.6

$\tilde{\mathcal{A}}$ ist äquivalent zu \mathcal{A} .

Beweis. Man zeigt leicht per Induktion über $|w|$:

$$\tilde{\delta}([q_0]_{\mathcal{A}}, w) = [\delta(q_0, w)]_{\mathcal{A}} \text{ für alle } w \in \Sigma^*. \quad (*)$$

Nun gilt:

$$\begin{array}{lll}
 w \in L(\mathcal{A}) & \text{gdw.} & \delta(q_0, w) \in F \\
 & \text{gdw.} & [\delta(q_0, w)]_{\mathcal{A}} \in \tilde{F} \quad (\text{Def. } \tilde{F}) \\
 & \text{gdw.} & \tilde{\delta}([q_0]_{\mathcal{A}}, w) \in \tilde{F} \quad (*) \\
 & \text{gdw.} & w \in L(\tilde{\mathcal{A}})
 \end{array}$$

□

Die folgende Definition fasst die beiden Minimierungs-Schritte zusammen:

Definition 5.7 (reduzierter Automat zu einem DEA)

Für einen DEA \mathcal{A} bezeichnet \mathcal{A}_{red} den *reduzierten Automaten*, den man aus \mathcal{A} durch Eliminieren unerreichbarer Zustände und nachfolgendes Bilden des Quotientenautomaten erhält.

Wir wollen zeigen, dass der reduzierte Automat nicht weiter vereinfacht werden kann: \mathcal{A}_{red} ist der kleinste DEA (bezüglich der Zustandszahl), der $L(\mathcal{A})$ erkennt. Um den Beweis führen zu können, benötigen wir als Hilfsmittel eine Äquivalenzrelation auf Wörtern, die sogenannte Nerode-Rechtskongruenz.

Nerode-Rechtskongruenz

Die Nerode-Rechtskongruenz ist auch unabhängig von reduzierten Automaten von Interesse und hat neben dem bereits erwähnten Beweis weitere interessante Anwendungen, von denen wir zwei kurz darstellen werden: sie liefert eine von Automaten unabhängige Charakterisierung der erkennbaren Sprachen und stellt ein weiteres Mittel zur Verfügung, um von einer Sprache nachzuweisen, dass sie *nicht* erkennbar ist.

Im Gegensatz zur Relation $\sim_{\mathcal{A}}$ auf den Zuständen eines Automaten handelt es sich hier um eine Relation *auf Wörtern*.

Definition 5.8 (Nerode-Rechtskongruenz)

Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Für $u, v \in \Sigma^*$ definieren wir:
 $u \simeq_L v$ gdw. $\forall w \in \Sigma^* : uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$.

Man beachte, dass das Wort w in Definition 5.8 auch gleich ε sein kann. Darum folgt aus $u \simeq_L v$, dass $u \in L \Leftrightarrow v \in L$.

Beispiel 5.9

Wir betrachten die Sprache $L = b^*a^*$ (vgl. Beispiele 1.7, 5.2).

- Es gilt:

$\varepsilon \simeq_L b$	$\forall w : \varepsilon w \in L$	<u>gdw.</u>	$w \in L$
		<u>gdw.</u>	$w \in b^*a^*$
		<u>gdw.</u>	$bw \in b^*a^*$
		<u>gdw.</u>	$bw \in L$
- $\varepsilon \not\simeq_L a$: $\varepsilon b \in L$, aber $a \cdot b \notin L$

Wie zeigen nun, dass es sich bei \simeq_L wirklich um eine Äquivalenzrelation handelt. In der Tat ist \simeq_L sogar eine Kongruenzrelation bezüglich Konkatenation von beliebigen Wörtern „von rechts“. Im folgenden bezeichnet der *Index* eine Äquivalenzrelation die Anzahl ihrer Klassen.

Lemma 5.10 (Eigenschaften von \simeq_L)

- 1) \simeq_L ist eine Äquivalenzrelation.
- 2) \simeq_L ist Rechtskongruenz, d.h. zusätzlich zu 1) gilt: $u \simeq_L v \Rightarrow \forall w \in \Sigma^* : uw \simeq_L vw$.
- 3) L ist Vereinigung von \simeq_L -Klassen:

$$L = \bigcup_{u \in L} [u]_L$$

wobei $[u]_L := \{v \mid u \simeq_L v\}$.

- 4) Ist $L = L(\mathcal{A})$ für einen DEA \mathcal{A} , so ist die Anzahl Zustände \geq größer oder gleich dem Index von \simeq .

Beweis.

1) folgt aus der Definition von \simeq_L , da „ \Leftrightarrow “ reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

2) Damit $uw \simeq_L vw$ gilt, muss für alle $w' \in \Sigma^*$ gelten:

$$(\star) \quad uww' \in L \Leftrightarrow vww' \in L$$

Wegen $ww' \in \Sigma^*$ folgt (\star) aus $u \simeq_L v$.

3) Zeige $L = \bigcup_{u \in L} [u]_L$.

„ \subseteq “: Wenn $u \in L$, dann ist $[u]_L$ in der Vereinigung rechts; zudem gilt $u \in [u]_L$.

„ \supseteq “: Sei $u \in L$ und $v \in [u]_L$.

Wegen $\varepsilon \in \Sigma^*$ folgt aus $u = u \cdot \varepsilon \in L$ und $v \simeq_L u$ auch $v = v \cdot \varepsilon \in L$.

4) Es sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ ein DEA mit $L = L(\mathcal{A})$.

Wir zeigen: $\delta(q_0, u) = \delta(q_0, v)$ impliziert $u \simeq_L v$:

$$\begin{aligned} \forall w : uw \in L & \quad \text{gdw.} \quad \delta(q_0, uw) \in F \\ & \quad \text{gdw.} \quad \delta(\delta(q_0, u), w) \in F \\ & \quad \text{gdw.} \quad \delta(\delta(q_0, v), w) \in F \\ & \quad \text{gdw.} \quad \delta(q_0, vw) \in F \\ & \quad \text{gdw.} \quad vw \in L \end{aligned}$$

Also folgt aus $u \not\simeq_L v$, dass $\delta(q_0, u) \neq \delta(q_0, v)$ und damit gibt es mindestens so viele Zustände wie \simeq -Klassen (Schubfachprinzip).

□

Beispiel 5.9 (Fortsetzung)

\simeq_L hat drei Klassen:

- $[\varepsilon]_L = b^*$
- $[a]_L = b^*aa^*$
- $[ab]_L = (a + b)ab(a + b)$

Eine interessante Eigenschaft von \simeq_L ist, dass die Äquivalenzklassen zur Definition eines kanonischen Automaten \mathcal{A}_L verwendet werden können, der L erkennt. Dieser Automat ergibt sich *direkt* und *auf eindeutige Weise* aus der Sprache L (im Gegensatz zum reduzierten Automaten, für dessen Konstruktion man bereits einen Automaten für die betrachtete Sprache haben muss). Damit wir einen endlichen Automaten erhalten, dürfen wir die Konstruktion nur auf Sprachen L anwenden, für die \simeq_L nur endlich viele Äquivalenzklassen hat.

Definition 5.11 (Kanonischer DEA \mathcal{A}_L zu einer Sprache L)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache, so dass \simeq_L endlichen Index hat. Der *kanonische DEA* $\mathcal{A}_L = (Q', \Sigma, q'_0, \delta', F')$ zu L ist definiert durch:

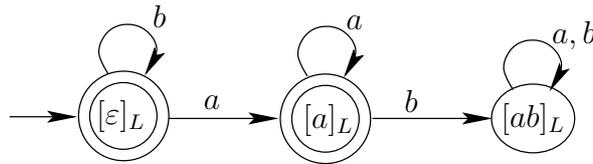
- $Q' := \{[u]_L \mid u \in \Sigma^*\}$

- $q'_0 := [\varepsilon]_L$
- $\delta'([u]_L, a) := [ua]_L$ (repräsentantenunabhängig wegen Lemma 5.10, Punkt 2)
- $F' := \{[u]_L \mid u \in L\}$

Man beachte, dass \mathcal{A}_L mit Punkt 4 von Lemma 5.10 eine minimale Anzahl von Zuständen hat: es gibt keinen DEA, der $L(\mathcal{A}_L)$ erkennt und weniger Zustände hat.

Beispiel 5.9 (Fortsetzung)

Für die Sprache $L = b^*a^*$ ergibt sich damit folgender kanonischer Automat \mathcal{A}_L :



Lemma 5.12

Hat \simeq_L endlichen Index, so ist \mathcal{A}_L ein DEA mit $L = L(\mathcal{A}_L)$.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 L(\mathcal{A}_L) &= \{u \mid \delta'(q'_0, u) \in F'\} \\
 &= \{u \mid \delta'([\varepsilon]_L, u) \in F'\} && \text{(Def. } q'_0\text{)} \\
 &= \{u \mid [u]_L \in F'\} && \text{(wegen } \delta'([\varepsilon]_L, u) = [u]_L\text{)} \\
 &= \{u \mid u \in L\} && \text{(Def. } F'\text{)} \\
 &= L
 \end{aligned}$$

□

Das folgende Resultat ist eine interessante Anwendung der Nerode-Rechtskongruenz und des kanonischen Automaten. Es liefert eine Charakterisierung von erkennbaren Sprachen, die vollkommen unabhängig von endlichen Automaten ist.

Satz 5.13 (Satz von Myhill und Nerode)

Eine Sprache L ist erkennbar gdw. \simeq_L endlichen Index hat.

Beweis.

„ \Rightarrow “: Ergibt sich unmittelbar aus Lemma 5.10, 4).

„ \Leftarrow “: Ergibt sich unmittelbar aus Lemma 5.12, da \mathcal{A}_L DEA ist, der L erkennt.

□

Der Satz von Nerode liefert uns als Nebenprodukt eine weitere Methode, von einer Sprache zu beweisen, dass sie *nicht* erkennbar ist.

Beispiel 5.14 (nichterkennbare Sprache)

Die Sprache $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ ist nicht erkennbar, da für $n \neq m$ gilt: $a^n \not\approx_L a^m$. In der Tat gilt $a^n b^n \in L$, aber $a^m b^n \notin L$. Daher hat \simeq_L unendlichen Index.

Wir zeigen nun, dass

Satz 5.15 (Minimalität des reduzierten DEA)

Sei \mathcal{A} ein DEA. Dann hat jeder DEA, der $L(\mathcal{A})$ erkennt, mindestens so viele Zustände wie der reduzierte DEA \mathcal{A}_{red} .

Beweis. Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ und $\mathcal{A}_{red} = (\tilde{Q}, \Sigma, [q_0]_{\mathcal{A}}, \tilde{\delta}, \tilde{F})$. Wir definieren eine injektive Abbildung π , die jedem Zustand aus \tilde{Q} eine Äquivalenzklasse von \simeq_L zuordnet. Es folgt, dass \mathcal{A}_{red} höchstens so viele Zustände hat, wie \simeq_L Äquivalenzklassen (Schubfachprinzip), also ist er nach Punkt 4 von Lemma 5.10 minimal.

Sei $[q]_{\mathcal{A}} \in \tilde{Q}$. Nach Definition von \mathcal{A}_{red} ist q in \mathcal{A} von q_0 erreichbar mit einem Wort w_q . Setze $\pi([q]_{\mathcal{A}}) = [w_q]_L$.

Es bleibt, zu zeigen, dass π injektiv ist. Seien $[q]_{\mathcal{A}}, [p]_{\mathcal{A}} \in \tilde{Q}$ mit $[q]_{\mathcal{A}} \neq [p]_{\mathcal{A}}$. Dann gilt $q \not\approx_{\mathcal{A}} p$ und es gibt $w \in \Sigma^*$ so dass

$$\delta(q, w) \in F \Leftrightarrow \delta(p, w) \in F$$

nicht gilt. Nach Wahl von w_p und w_q gilt dann aber auch

$$\delta(q_0, w_q w) \in F \Leftrightarrow \delta(q_0, w_p w) \in F$$

nicht und damit auch nicht

$$w_q w \in L \Leftrightarrow w_p w \in L$$

Es folgt $w_q \not\approx_L w_p$, also $\pi([q]_{\mathcal{A}}) \neq \pi([p]_{\mathcal{A}})$ wie gewünscht. □

Es ist also sowohl der reduzierte Automat als auch der kanonische Automat von minimaler Größe. In der Tat ist der Zusammenhang zwischen beiden Automaten sogar noch viel enger: man kann zeigen, dass sie identisch bis auf Zustandsumbenennung sind. Formal wird das durch den Begriff der Isomorphie beschrieben.

Definition 5.16 (isomorph)

Zwei DEAs $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ und $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, q'_0, \delta', F')$ sind *isomorph* (geschrieben $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}'$) gdw. es eine Bijektion $\pi : Q \rightarrow Q'$ gibt mit:

- $\pi(q_0) = q'_0$
- $\pi(F) = \{\pi(q) \mid q \in F\} = F'$, wobei $\pi(F) = \{\pi(q) \mid q \in F\}$
- $\pi(\delta(q, a)) = \delta'(\pi(q), a)$ für alle $q \in Q, a \in \Sigma$

Lemma 5.17

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}' \Rightarrow L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$$

Beweis. Es sei $\pi : Q \rightarrow Q'$ der Isomorphismus. Durch Induktion über $|w|$ zeigt man leicht, dass $\pi(\delta(q, w)) = \delta'(\pi(q), w)$. Daher gilt:

$$\begin{array}{lll}
 w \in L(\mathcal{A}) & \text{gdw.} & \delta(q_0, w) \in F \\
 & \text{gdw.} & \pi(\delta(q_0, w)) \in F' \quad (\text{wegen } \pi(F) = F') \\
 & \text{gdw.} & \delta'(\pi(q_0), w) \in F' \\
 & \text{gdw.} & \delta'(q'_0, w) \in F' \quad (\text{wegen } q'_0 = \pi(q_0)) \\
 & \text{gdw.} & w \in L(\mathcal{A}') \quad \square
 \end{array}$$

Wir können nun Minimalität und Eindeutigkeit des reduzierten Automaten zeigen.

Satz 5.18 (Isomorphie reduzierter und kanonischer Automat)

Es sei L eine erkennbare Sprache und \mathcal{A} ein DEA mit $L(\mathcal{A}) = L$. Dann gilt: der reduzierte Automat $\mathcal{A}_{red} := \tilde{\mathcal{A}}_0$ ist isomorph zum kanonischen Automaten \mathcal{A}_L .

Beweis. Es sei $\mathcal{A}_{red} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ und $\mathcal{A}_L = (Q', \Sigma, q'_0, \delta', F')$. Wir definieren eine Funktion $\pi : Q \rightarrow Q'$ und zeigen, dass sie ein Isomorphismus ist. Für jedes $q \in Q$ existiert (mindestens) ein $w_q \in \Sigma^*$ mit $\delta(q_0, w_q) = q$, da in \mathcal{A}_{red} alle Zustände erreichbar sind. O.B.d.A. sei $w_{q_0} = \varepsilon$. Wir definieren $\pi(q) := [w_q]_L$.

I) π ist injektiv:

Wir müssen zeigen, dass aus $p \neq q$ auch $[w_p]_L \neq [w_q]_L$ folgt.

Da \mathcal{A}_{red} reduziert ist, sind verschiedene Zustände nicht äquivalent. Es gibt also mindestens ein w , für das

$$\delta(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta(q, w) \in F$$

nicht gilt. Das heißt aber, dass

$$\delta(q_0, w_p w) \in F \Leftrightarrow \delta(q_0, w_q w) \in F$$

nicht gilt und damit wiederum, dass $w_p w \in L \Leftrightarrow w_q w \in L$ nicht gilt. Also ist $w_p \not\sim_L w_q$, d.h. $[w_p]_L \neq [w_q]_L$.

II) π ist surjektiv:

Folgt aus Injektivität und $|Q| \geq |Q'|$ (Punkt 4 Lemma 5.10).

III) $\pi(q_0) = q'_0$:

Da $w_{q_0} = \varepsilon$ und $q'_0 = [\varepsilon]_L$.

IV) $\pi(F) = F'$:

$$\begin{array}{lll}
 q \in F & \text{gdw.} & \delta(q_0, w_q) \in F \quad (\text{Wahl } w_q) \\
 & \text{gdw.} & w_q \in L \\
 & \text{gdw.} & [w_q]_L \in F' \quad (\text{Def. } F') \\
 & \text{gdw.} & \pi(q) \in F'
 \end{array}$$

V) $\pi(\delta(q, a)) = \delta'(\pi(q), a)$:

Als Abkürzung setze $p = \delta(q, a)$. Die Hilfsaussage

$$\delta(q_0, w_p) = \delta(q_0, w_q a) \quad (*)$$

gilt wegen:

$$\begin{aligned} \delta(q_0, w_p) &= p && \text{(Wahl } w_p) \\ &= \delta(q, a) \\ &= \delta(\delta(q_0, w_q), a) && \text{(Wahl } w_q) \\ &= \delta(q_0, w_q a) \end{aligned}$$

Mittels (*) zeigen wir nun:

$$\begin{aligned} \pi(p) &= [w_p]_L && \text{(Def. } \pi) \\ &= [w_q a]_L && \text{(folgt aus (*) und } L(\mathcal{A}_{red}) = L) \\ &= \delta'([w_q]_L, a) && \text{(Def. } \mathcal{A}_L) \\ &= \delta'(\pi(q), a) && \text{(Def. } \pi) \end{aligned}$$

□

Dieser Satz zeigt auch folgende interessante Eigenschaften:

- der reduzierte Automat \mathcal{A}_{red} ist unabhängig vom ursprünglichen DEA \mathcal{A} :
wenn $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B}) = L$, dann gilt wegen $\mathcal{A}_{red} \simeq \mathcal{A}_L \simeq \mathcal{B}_{red}$ auch $\mathcal{A}_{red} \simeq \mathcal{B}_{red}$ (denn die Komposition zweier Isomorphismen ergibt wieder einen Isomorphismus);
- Für jede erkennbare Sprache L gibt es einen eindeutigen minimalen DEA:
Wenn $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B}) = L$ und \mathcal{A} und \mathcal{B} minimale Zustandszahl unter allen DEAs haben, die L erkennen, dann enthalten \mathcal{A} und \mathcal{B} weder unerreichbare noch äquivalente Zustände und der jeweilige reduzierte Automat ist identisch zum ursprünglichen Automaten. Damit gilt $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{red} \simeq \mathcal{A}_L \simeq \mathcal{B}_{red} = \mathcal{B}$, also auch $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Im Prinzip liefert Satz 5.18 zudem eine Methode, um von zwei Automaten zu entscheiden, ob sie dieselbe Sprache akzeptieren:

Korollar 5.19

Es seien \mathcal{A} und \mathcal{A}' DEAs. Dann gilt: $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$ gdw. $\mathcal{A}_{red} \simeq \mathcal{A}'_{red}$.

Man kann die reduzierten Automaten wie beschrieben konstruieren. Für gegebene Automaten kann man feststellen, ob sie isomorph sind (teste alle Bijektionen). Da es exponentiell viele Kandidaten für eine Bijektion gibt, ist diese Methode nicht optimal.

Hat man NEAs an Stelle von DEAs gegeben, so kann man diese zuerst deterministisch machen und dann das Korollar anwenden.

Zum Abschluss von Teil I erwähnen wir einige hier aus Zeitgründen nicht behandelte Themenbereiche:

Andere Varianten von endlichen Automaten:

NEAs/DEAs mit Ausgabe (sogenannte *Transduktoren*) haben Übergänge $p \xrightarrow{a/v} q$, wobei $v \in \Gamma^*$ ein Wort über einem Ausgabealphabet ist. Solche Automaten beschreiben Funktionen $\Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$. *2-Wege Automaten* können sich sowohl vorwärts als auch rückwärts auf der Eingabe bewegen. *Alternierende Automaten* generalisieren NEAs: zusätzlich zu den nicht-deterministischen Übergängen, die einer existentiellen Quantifizierung entsprechen, gibt es hier auch universell quantifizierte Übergänge.

Algebraische Theorie formaler Sprachen:

Jeder Sprache L wird ein Monoid M_L (syntaktisches Monoid) zugeordnet. Klassen von Sprachen entsprechen dann Klassen von Monoiden, z.B. L ist regulär gdw. M_L endlich. Dies ermöglicht einen sehr fruchtbaren algebraischen Zugang zur Automatentheorie.

Automaten auf unendlichen Wörtern:

Hier geht es um Automaten, die unendliche Wörter (unendliche Folgen von Symbolen) als Eingabe erhalten. Die Akzeptanz via Endzustand funktioniert hier natürlich nicht mehr und man studiert verschiedene Akzeptanzbedingungen wie z.B. Büchi-Akzeptanz und Rabin-Akzeptanz.

Baumautomaten:

Diese Automaten erhalten Bäume statt Wörter als Eingabe. Eine streng lineare Abarbeitung wie bei Wörtern ist in diesem Fall natürlich nicht möglich. Man unterscheidet zwischen Top-Down und Bottom-Up Automaten.

II. Grammatiken, kontextfreie Sprachen und Kellerautomaten

Einführung

Der zweite Teil beschäftigt sich hauptsächlich mit der Klasse der kontextfreien Sprachen sowie mit Kellerautomaten, dem zu dieser Sprachfamilie passenden Automatenmodell. Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist allgemeiner als die der regulären Sprachen und dementsprechend können Kellerautomaten als eine Erweiterung von endlichen Automaten verstanden werden. Kontextfreie Sprachen spielen in der Informatik eine wichtige Rolle, da durch sie z.B. die Syntax von Programmiersprachen (zumindest in großen Teilen) beschreibbar ist.

Bevor wir uns im Detail den kontextfreien Sprachen zuwenden, führen wir Grammatiken als allgemeines Mittel zum Generieren von formalen Sprachen ein. Wir werden sehen, dass sich sowohl die regulären als auch die kontextfreien Sprachen und weitere, noch allgemeinere Sprachklassen mittels Grammatiken definieren lassen. Diese Sprachklassen sind angeordnet in der bekannten Chomsky-Hierarchie von formalen Sprachen.

6. Die Chomsky-Hierarchie

Grammatiken dienen dazu, Wörter zu erzeugen. Man hat dazu *Regeln*, die es erlauben, ein Wort durch ein anderes Wort zu ersetzen (aus ihm abzuleiten). Die *erzeugte Sprache* ist die Menge der Wörter, die ausgehend von einem *Startsymbol* durch wiederholtes Ersetzen erzeugt werden können.

Beispiel 6.1

$$\begin{aligned} \text{Regeln:} \quad S &\longrightarrow aSb & (1) \\ S &\longrightarrow \varepsilon & (2) \end{aligned}$$

Startsymbol: S

Eine mögliche Ableitung eines Wortes ist:

$$S \xrightarrow{1} aSb \xrightarrow{1} aaSbb \xrightarrow{1} aaaSbbb \xrightarrow{2} aaabbb$$

Das Symbol S ist hier ein Hilfssymbol (*nichtterminales Symbol*) und man ist nur an erzeugten Wörtern interessiert, die das Hilfssymbol nicht enthalten (*Terminalwörter*). Man sieht leicht, dass dies in diesem Fall genau die Wörter $a^n b^n$ mit $n \geq 0$ sind.

Definition 6.2 (Grammatik)

Eine *Grammatik* ist von der Form $G = (N, \Sigma, P, S)$, wobei

- N und Σ endliche, disjunkte Alphabete von *Nichtterminalsymbolen* bzw. *Terminalsymbolen* sind,
- $S \in N$ das *Startsymbol* ist,
- $P \subseteq (N \cup \Sigma)^+ \times (N \cup \Sigma)^*$ eine endliche Menge von Ersetzungsregeln (*Produktionen*) ist.

Der besseren Lesbarkeit halber schreiben wir Produktionen $(u, v) \in P$ gewöhnlich als $u \longrightarrow v$.

Man beachte, dass die rechte Seite von Produktionen aus dem leeren Wort bestehen darf, die linke jedoch nicht. Ausserdem sei darauf hingewiesen, dass sowohl Nichtterminalsymbole als auch Terminalsymbole durch eine Ersetzungsregel ersetzt werden dürfen.

Beispiel 6.3

Folgendes Tupel ist eine Grammatik: $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit

- $N = \{S, B\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $P = \{S \longrightarrow aSBc,$
 $S \longrightarrow abc,$
 $cB \longrightarrow Bc,$
 $bB \longrightarrow bb\}$

Im Folgenden schreiben wir meistens Elemente von N mit Grossbuchstaben und Elemente von Σ mit Kleinbuchstaben.

Wir definieren nun, was es heißt, dass man ein Wort durch Anwenden der Regeln aus einem anderen ableiten kann.

Definition 6.4 (durch eine Grammatik erzeugte Sprache)

Sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik und x, y Wörter aus $(N \cup \Sigma)^*$.

- 1) y aus x direkt ableitbar:
 $x \vdash_G y$ gdw. $x = x_1 u x_2$ und $y = x_1 v x_2$ mit $u \rightarrow v \in P$ und $x_1, x_2 \in (N \cup \Sigma)^*$
- 2) y aus x in n Schritten ableitbar:
 $x \vdash_G^n y$ gdw. $x \vdash_G x_2 \vdash_G \cdots \vdash_G x_{n-1} \vdash_G y$ für $x_2, \dots, x_{n-1} \in (N \cup \Sigma)^*$
- 3) y aus x ableitbar:
 $x \vdash_G^* y$ gdw. $x \vdash_G^n y$ für ein $n \geq 0$
- 4) Die durch G erzeugte Sprache ist
 $L(G) := \{w \in \Sigma^* \mid S \vdash_G^* w\}$.

Man ist also bei der erzeugten Sprache nur an den in G aus S ableitbaren Terminalwörtern interessiert.

Beispiel 6.3 (Fortsetzung)

Eine Beispielableitung in der Grammatik aus Beispiel 6.3:

$$\begin{aligned}
 S &\vdash_G abc, \text{ d.h. } abc \in L(G) \\
 S &\vdash_G aSBc \\
 &\vdash_G aaSBcBc \\
 &\vdash_G aaabcBcBc \\
 &\vdash_G aaabBccBc \\
 &\vdash_G^2 aaabBBccc \\
 &\vdash_G^2 aaabbbccc
 \end{aligned}$$

Die erzeugte Sprache ist $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

Beweis.

„ \supseteq “: Für $n = 1$ ist $abc \in L(G)$ klar. Für $n > 1$ sieht man leicht:

$$S \vdash_G^{n-1} a^{n-1} S (Bc)^{n-1} \vdash_G a^n b c (Bc)^{n-1} \vdash_G^* a^n b B^{n-1} c^n \vdash_G^{n-1} a^n b^n c^n$$

„ \subseteq “: Sei $S \vdash_G^* w$ mit $w \in \Sigma^*$. Offenbar wird die Regel $S \rightarrow abc$ in der Ableitung von w genau einmal angewendet. Vor dieser Anwendung können nur die Regeln $S \rightarrow aSBc$ und $cB \rightarrow Bc$ angewendet werden, da noch keine b 's generiert wurden. Die Anwendung von $S \rightarrow abc$ hat damit die Form

$$a^n S u \vdash a^{n+1} b c u \text{ mit } u \in \{c, B\}^* \text{ und } |u|_B = |u|_c = n$$

(formaler Beweis per Induktion über die Anzahl der Regelanwendungen). Nun sind nur noch $cB \rightarrow Bc$ und $bB \rightarrow bb$ anwendbar. Alle dabei entstehenden Wörter haben die folgende Form (formaler Beweis per Induktion über die Anzahl der Regelanwendungen):

$$a^n b^k v \text{ mit } v \in \{c, B\}^*, \quad |v|_B = n - k \text{ und } |v|_c = n.$$

Jedes Terminalwort dieser Form erfüllt $|v|_B = 0$, also $n = k$ und damit hat das Wort die Form $a^n b^n c^n$.

□

Beispiel 6.5

Betrachte die Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit

- $N = \{S, B\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \rightarrow aS,$
 $S \rightarrow bS,$
 $S \rightarrow abB,$
 $B \rightarrow aB,$
 $B \rightarrow bB,$
 $B \rightarrow \varepsilon\}$

Die erzeugte Sprache ist $L(G) = \Sigma^* \cdot \{a\} \cdot \{b\} \cdot \Sigma^*$

Die Grammatiken aus Beispiel 6.5, 6.3 und 6.1 gehören zu unterschiedlichen Sprachklassen, die alle durch Grammatiken erzeugt werden können. Sie sind angeordnet in der Chomsky-Hierarchie.

Definition 6.6 (Chomsky-Hierarchie, Typen von Grammatiken)

Es sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik.

- Jede Grammatik G ist Grammatik vom **Typ 0**.
- G ist Grammatik vom **Typ 1 (monoton)**, falls alle Regeln *nicht verkürzend* sind, also die Form $w \rightarrow u$ haben wobei $w, u \in (\Sigma \cup N)^*$ und $|u| \geq |w|$.
 Ausnahme: Die Regel $S \rightarrow \varepsilon$ ist erlaubt, wenn S in keiner Produktion auf der rechten Seite vorkommt.
- G ist Grammatik vom **Typ 2 (kontextfrei)**, falls alle Regeln die Form $A \rightarrow w$ haben mit $A \in N, w \in (\Sigma \cup N)^*$.
- G ist Grammatik vom **Typ 3 (rechtslinear)**, falls alle Regeln die Form $A \rightarrow uB$ oder $A \rightarrow u$ haben mit $A, B \in N, u \in \Sigma^*$.

Die *kontextfreien* Sprachen heißen deshalb so, weil die linke Seite jeder Produktion nur aus einem Nichtterminalsymbol A besteht, das unabhängig vom *Kontext im Wort* (also

dem Teilwort links von A und dem Teilwort rechts von A) ersetzt wird. Bei monotonen Grammatiken sind hingegen Regeln

$$u_1Au_2 \longrightarrow u_1wu_2$$

erlaubt wenn $|w| \geq 1$. Hier ist die Ersetzung von A durch w abhängig davon, dass der richtige Kontext (u_1 links und u_2 rechts, beides aus $(N \cup \Sigma)^*$) im Wort vorhanden ist. Man kann sogar zeigen, dass es keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, monotone Grammatiken ausschließlich durch Regeln der obigen Form zu definieren. Die durch monotone Grammatiken erzeugten Sprachen nennt man daher auch *kontextsensitive Sprachen*.

Eine sehr wichtige Eigenschaft von monotonen Grammatiken ist, dass die Anwendung einer Produktion das Wort nicht verkürzen kann. Vor diesem Hintergrund ist auch die Ausnahme $S \longrightarrow \varepsilon$ zu verstehen: sie dient dazu, das leere Wort generieren zu können, was ohne Verkürzen natürlich nicht möglich ist. Wenn diese Regel verwendet wird, dann sind Regeln wie $aAb \rightarrow aSb$ aber implizit verkürzend, da Sie das Ableiten von ab aus aAb erlauben. Um das zu verhindern, darf in der Gegenwart von $S \longrightarrow \varepsilon$ das Symbol S nicht auf der rechten Seite von Produktionen verwendet werden.

Beispiel 6.7

Die Grammatik aus Beispiel 6.1 ist vom Typ 2. Sie ist nicht vom Typ 1, da $S \longrightarrow \varepsilon$ vorhanden ist, aber S auf der rechten Seite von Produktionen verwendet wird. Es gibt aber eine Grammatik vom Typ 1, die dieselbe Sprache erzeugt:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \varepsilon \\ S &\longrightarrow S' \\ S' &\longrightarrow ab \\ S' &\longrightarrow aS'b \end{aligned}$$

Die Grammatik aus Beispiel 6.3 ist vom Typ 1. Wir werden später sehen, dass es keine Grammatik vom Typ 2 gibt, die die Sprache aus diesem Beispiel generiert. Die Grammatik aus Beispiel 6.5 ist vom Typ 2.

Die unterschiedlichen Typen von Grammatiken führen zu unterschiedlichen *Typen von Sprachen*.

Definition 6.8 (Klasse der Typ- i -Sprachen)

Für $i = 0, 1, 2, 3$ ist die *Klasse der Typ- i -Sprachen* definiert als

$$\mathcal{L}_i := \{L(G) \mid G \text{ ist Grammatik vom Typ } i\}.$$

Nach Definition kann eine Grammatik vom Typ i auch Sprachen höheren Typs $j \geq i$ generieren (aber nicht umgekehrt). So erzeugt beispielsweise die folgende Typ-1 Gram-

matik die Sprache $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, welche nach Beispiel 6.1 vom Typ 2 ist:

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \varepsilon \\ S &\longrightarrow ab \\ S &\longrightarrow aXb \\ aXb &\longrightarrow aaXbb \\ X &\longrightarrow ab \end{aligned}$$

Offensichtlich ist jede Grammatik von Typ 3 auch eine vom Typ 2 und jede Grammatik von Typ 1 auch eine vom Typ 0. Da Grammatiken vom Typ 2 und 3 das Verkürzen des abgeleiteten Wortes erlauben, sind solche Grammatiken nicht notwendigerweise vom Typ 1. Wir werden jedoch später sehen, dass jede Typ 2 Grammatik in eine Typ 1 Grammatik gewandelt werden kann, die dieselbe Sprache erzeugt. Daher bilden die assoziierten Sprachtypen eine Hierarchie. Diese ist sogar strikt.

Lemma 6.9

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$$

Beweis. Nach Definition der Grammatiktypen gilt offenbar $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2$ und $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_0$. Die Inklusion $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$ werden wir später zeigen (Satz 8.12). Auch die Striktheit der Inklusionen werden wir erst später beweisen. \square

7. Rechtslineare Grammatiken und reguläre Sprachen

Wir zeigen, dass rechtslineare Grammatiken genau die erkennbaren Sprachen generieren. Damit haben wir eine weitere, unabhängige Charakterisierung dieser Klassen von Sprachen gefunden und alle Resultate, die wir bereits für die erkennbaren Sprachen bewiesen haben, gelten auch für Typ-3-Sprachen.

Satz 7.1

Die Typ-3-Sprachen sind genau die regulären/erkennbaren Sprachen, d.h.

$$\mathcal{L}_3 = \{L \mid L \text{ ist regulär}\}.$$

Beweis. Der Beweis wird in zwei Richtungen durchgeführt:

1. Jede Typ-3-Sprache ist erkennbar

Sei $L \in \mathcal{L}_3$, d.h. $L = L(G)$ für eine Typ-3-Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$. Es gilt $w_1 \cdots w_n \in L(G)$ gdw. es gibt eine Ableitung

$$(*) \quad S = B_0 \vdash_G w_1 B_1 \vdash_G w_1 w_2 B_2 \vdash_G \dots \vdash_G w_1 \dots w_{n-1} B_{n-1} \vdash_G w_1 \dots w_{n-1} w_n$$

für Produktionen $B_{i-1} \rightarrow w_i B_i \in P$ ($i = 1, \dots, n$) und $B_{n-1} \rightarrow w_n \in P$.

Diese Ableitung ähnelt dem Lauf eines NEA auf dem Wort $w_1 \cdots w_n$, wobei die Nichtterminale die Zustände sind und die Produktionen die Übergänge beschreiben.

Wir konstruieren nun einen NEA mit Worttransitionen, der die Nichtterminalsymbole von G als Zustände hat:

$\mathcal{A} = (N \cup \{\Omega\}, \Sigma, S, \Delta, \{\Omega\})$, wobei

- $\Omega \notin N$ Endzustand ist und
- $\Delta = \{(A, w, B) \mid A \rightarrow wB \in P\} \cup \{(A, w, \Omega) \mid A \rightarrow w \in P\}$.

Ableitungen der Form $(*)$ entsprechen nun genau Pfaden in \mathcal{A} :

$$(**) \quad (S, w_1, B_1)(B_1, w_2, B_2) \dots (B_{n-2}, w_{n-1}, B_{n-1})(B_{n-1}, w_n, \Omega)$$

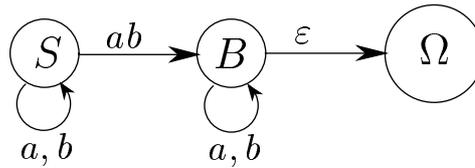
Dies zeigt $L(\mathcal{A}) = L(G)$.

Beispiel 6.5 (Fortsetzung)

Die Grammatik

$$P = \{S \rightarrow aS, \\ S \rightarrow bS, \\ S \rightarrow abB, \\ B \rightarrow aB, \\ B \rightarrow bB, \\ B \rightarrow \varepsilon\}$$

liefert den folgenden NEA mit Wortübergängen:



2. Jede erkennbare Sprache ist eine Typ-3-Sprache

Sei $L = L(\mathcal{A})$ für einen NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$. Wir definieren daraus eine Typ-3-Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} N &:= Q \\ S &:= q_0 \\ P &:= \{p \longrightarrow aq \mid (p, a, q) \in \Delta\} \cup \{p \longrightarrow \varepsilon \mid p \in F\} \end{aligned}$$

Ein Pfad in \mathcal{A} der Form

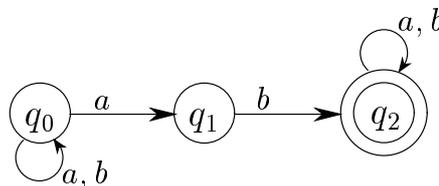
$$(q_0, a_1, q_1)(q_1, a_2, q_2) \dots (q_{n-1}, a_n, q_n)$$

mit $q_n \in F$ entspricht nun genau einer Ableitung

$$q_0 \vdash_G a_1 q_1 \vdash_G a_1 a_2 q_2 \vdash_G \dots \vdash_G a_1 \dots a_n q_n \vdash_G a_1 \dots a_n.$$

Beispiel:

Der folgende NEA



liefert die Grammatik mit den rechtslinearen Produktionen

$$P = \{q_0 \longrightarrow aq_0, \\ q_0 \longrightarrow bq_0, \\ q_0 \longrightarrow aq_1, \\ q_1 \longrightarrow bq_2, \\ q_2 \longrightarrow aq_2, \\ q_2 \longrightarrow bq_2, \\ q_2 \longrightarrow \varepsilon\}$$

□

Korollar 7.2

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2.$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass $\mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2$ gilt. Außerdem haben wir mit Beispiel 6.1 $L := \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \in \mathcal{L}_2$. Wir haben bereits gezeigt, dass L nicht erkennbar/regulär ist, d.h. mit Satz 7.1 folgt $L \notin \mathcal{L}_3$. \square

Beispiel 7.3

Als ein weiteres Beispiel für eine kontextfreie Sprache, die nicht regulär ist, betrachten wir $L = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$. (Vgl. Beispiele 2.2, 3.2) Man kann diese Sprache mit folgender kontextfreien Grammatik erzeugen:

$G = (N, \Sigma, P, S)$ mit

- $N = \{S, S_{\geq}, S_{\leq}\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $P = \{S \rightarrow aS_{\geq}, \quad S \rightarrow S_{\leq}b,$
 $\quad S_{\geq} \rightarrow aS_{\geq}b, \quad S_{\leq} \rightarrow aS_{\leq}b,$
 $\quad S_{\geq} \rightarrow aS_{\geq}, \quad S_{\leq} \rightarrow S_{\leq}b,$
 $\quad S_{\geq} \rightarrow \varepsilon, \quad S_{\leq} \rightarrow \varepsilon\}$

Es gilt nun:

- $S_{\geq} \vdash_G^* w \in \{a, b\}^* \Rightarrow w = a^n b^m$ mit $n \geq m$,
- $S_{\leq} \vdash_G^* w \in \{a, b\}^* \Rightarrow w = a^n b^m$ mit $n \leq m$,

woraus sich ergibt:

- $S \vdash_G^* w \in \{a, b\}^* \Rightarrow w = aa^n b^m$ mit $n \geq m$ oder $w = a^n b^m b$ mit $n \leq m$,

d.h. $L(G) = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$.

8. Normalformen und Entscheidungsprobleme

Es existieren verschiedene *Normalformen* für kontextfreie Grammatiken, bei denen die syntaktische Form der Regeln weiter eingeschränkt wird, ohne dass die Klasse der erzeugten Sprachen sich ändert. Wir werden insbesondere die *Chomsky Normalform* kennenlernen und sie verwenden, um einen effizienten Algorithmus für das Wortproblem für kontextfreie Sprachen zu entwickeln. Zudem ist jede kontextfreie Grammatik in Chomsky Normalform auch eine Typ-1 Grammatik, was die noch ausstehende Inklusion $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$ zeigt. Wir werden auch das Leerheitsproblem und das Äquivalenzproblem diskutieren.

Zwei Grammatiken heißen *äquivalent*, falls sie dieselbe Sprache erzeugen.

Zunächst zeigen wir, wie man „überflüssige“ Symbole aus kontextfreien Grammatiken eliminieren kann. Das ist zum späteren Herstellen der Chomsky-Normalform nicht unbedingt notwendig, es ist aber trotzdem ein natürlicher erster Schritt zum Vereinfachen einer Grammatik.

Definition 8.1 (terminierende, erreichbare Symbole; reduzierte Grammatik)

Es sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik.

- 1) $A \in N$ heißt *terminierend*, falls es ein $w \in \Sigma^*$ gibt mit $A \vdash_G^* w$.
- 2) $A \in N$ heißt *erreichbar*, falls es $u, v \in (\Sigma \cup N)^*$ gibt mit $S \vdash_G^* uAv$.
- 3) G heißt *reduziert*, falls alle Elemente von N *erreichbar* und *terminierend* sind.

Die folgenden zwei Lemmata bilden die Grundlage zum wandeln einer kontextfreien Grammatik in eine reduzierte Kontextfreie Grammatik.

Lemma 8.2

Für jede kontextfreie Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ kann man die Menge der terminierenden Symbole berechnen.

Beweis. Wir definieren dazu

$$T_1 := \{A \in N \mid \exists w \in \Sigma^* : A \longrightarrow w \in P\}$$

$$T_{i+1} := T_i \cup \{A \in N \mid \exists w \in (\Sigma \cup T_i)^* : A \longrightarrow w \in P\}$$

Es gilt

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \dots \subseteq N.$$

Da N endlich ist, gibt es ein k mit $T_k = T_{k+1} = \bigcup_{i \geq 1} T_i$.

Behauptung:

$T_k = \{A \in N \mid A \text{ ist terminierend}\}$, denn:

„ \subseteq “: Zeige durch Induktion über i : alle Elemente von T_i , $i \geq 1$, terminierend:

- $i = 1$: $A \in T_1 \Rightarrow A \vdash_G w \in \Sigma^*$, also A terminierend.
- $i \rightarrow i+1$: $A \in T_{i+1} \Rightarrow A \vdash_G u_1 B_1 u_2 B_2 \cdots u_n B_n u_{n+1}$ mit $u_j \in \Sigma^*$ und $B_j \in T_j$, also (Induktion) $B_j \vdash_G^* w_j \in \Sigma^*$. Es folgt, dass A terminierend.

„ \supseteq “: Zeige durch Induktion über i :

$$A \vdash_G^{\leq i} w \in \Sigma^* \Rightarrow A \in T_i.$$

- $i = 1$: $A \vdash_G^{\leq 1} w \in \Sigma^* \Rightarrow A \rightarrow w \in P \Rightarrow A \in T_1$
- $i \rightarrow i+1$: $A \vdash_G^{\leq i+1} w \in \Sigma^*$
 $\Rightarrow A \vdash_G u_1 B_1 \cdots u_n B_n u_{n+1} \vdash_G^{\leq i} u_1 w_1 \cdots u_n w_n u_{n+1} = w$,
mit $u_j \in \Sigma^*$ und $B_j \vdash_G^{\leq i} w_j \in \Sigma^*$
 $\Rightarrow B_j \in T_i$ für alle j (Induktion)
 $\Rightarrow A \in T_{i+1}$

□

Beispiel 8.3

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S \rightarrow A, & S \rightarrow aCbBa, \\ A \rightarrow aBAc, & B \rightarrow Cab, \\ C \rightarrow AB, & C \rightarrow aa, \end{array} \right.$$

$$T_1 = \{C\} \subset T_2 = \{C, B\} \subset T_3 = \{C, B, S\} = T_4$$

Es ist also A das einzige nichtterminierende Symbol.

Das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken besteht darin, für eine gegebene kontextfreie Grammatik G zu entscheiden, ob $L(G) = \emptyset$. Lemma 8.2 hat folgende interessante Konsequenz.

Satz 8.4

Das Leerheitsproblem ist für kontextfreie Grammatiken in polynomieller Zeit entscheidbar.

Beweis. Offenbar gilt $L(G) \neq \emptyset$ gdw. $\exists w \in \Sigma^* : S \vdash_G^* w$ gdw. S ist terminierend. Ausserdem ist leicht zu sehen, dass der Algorithmus zum Berechnen aller terminierenden Symbole in polynomieller Zeit läuft. □

Wir werden in “Theoretische Informatik 2” sehen, dass das Leerheitsproblem für Grammatiken der Typen 0 und 1 nicht entscheidbar ist.

Lemma 8.5

Für jede kontextfreie Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ kann man die Menge der erreichbaren Nichtterminalsymbole berechnen.

Beweis. Wir definieren dazu

$$E_0 := \{S\}$$

$$E_{i+1} := E_i \cup \{A \mid \exists B \in E_i \text{ mit Regel } B \rightarrow u_1 A u_2 \in P\}$$

Es gilt

$$E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots \subseteq N.$$

Da N endlich ist, gibt es ein k mit $E_k = E_{k+1}$ und damit $E_k = \bigcup_{i \geq 0} E_i$.

Behauptung:

$E_k = \{A \in N \mid A \text{ ist erreichbar}\}$, denn:

„ \subseteq “: Zeige durch Induktion über i : E_i enthält nur erreichbare Symbole

„ \supseteq “: Zeige durch Induktion über i : $S \vdash_G^i uAv \Rightarrow A \in E_i$.

□

Beispiel 8.6

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S \rightarrow aS, & A \rightarrow ASB, \\ S \rightarrow SB, & A \rightarrow C, \\ S \rightarrow SS, & B \rightarrow Cb, \\ S \rightarrow \varepsilon & \end{array} \right\}$$

$$E_0 = \{S\} \subset E_1 = \{S, B\} \subset E_2 = \{S, B, C\} = E_3$$

Es ist also A das einzige nichterreichbare Symbol.

Lemma 8.2 und 8.5 zusammen zeigen, wie man unerreichbare und nichtterminierende Symbole eliminieren kann.

Satz 8.7

Zu jeder kontextfreien Grammatik G mit $L(G) \neq \emptyset$ kann man eine äquivalente reduzierte kontextfreie Grammatik konstruieren.

Beweis. Sei $G = (N, \Sigma, P, S)$.

Erster Schritt: Eliminieren nicht terminierender Symbole.

G' is die Einschränkung von G auf terminierende Nichtterminale, also

$G' := (N', \Sigma, P', S)$ mit

- $N' := \{A \in N \mid A \text{ ist terminierend in } G\}$
- $P' := \{A \rightarrow w \in P \mid A \in N', w \in (N' \cup \Sigma)^*\}$

Beachte: Weil $L(G) \neq \emptyset$ ist S terminierend, also $S \in N'$!

Zweiter Schritt: Eliminieren unerreichbarer Symbole.

$G'' := (N'', \Sigma, P'', S)$ ist die Einschränkung von G' auf erreichbare Nichtterminale, wobei

- $N'' := \{A \in N' \mid A \text{ ist erreichbar in } G'\}$
- $P'' := \{A \longrightarrow w \in P' \mid A \in N'', w \in (N' \cup \Sigma)^*\}$

Man sieht leicht, dass $L(G) = L(G') = L(G'')$ und G'' reduziert ist. □

Vorsicht:

Die Reihenfolge der beiden Schritte ist wichtig, denn das Eliminieren nicht terminierender Symbole kann zusätzliche Symbole unerreichbar machen (aber nicht umgekehrt). Betrachte zum Beispiel die Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ mit

$$P = \{S \longrightarrow \varepsilon, S \longrightarrow AB, A \longrightarrow a\}$$

In G sind alle Symbole erreichbar. Eliminiert man zuerst die unerreichbaren Symbole, so ändert sich die Grammatik also nicht. Das einzige nicht terminierende Symbol ist B und dessen Elimination liefert

$$P' = \{S \longrightarrow \varepsilon, A \longrightarrow a\}$$

Diese Grammatik ist nicht reduziert, da nun A unerreichbar ist.

Beachte auch, dass eine Grammatik G mit $L(G) = \emptyset$ niemals reduziert sein kann, da jede Grammatik ein Startsymbol S enthalten muss und S in G nicht terminierend sein kann.

Wie zeigen nun, dass jede reduzierte Grammatik in eine äquivalente Grammatik in *Chomsky-Normalform* gewandelt werden kann. Dies geschieht in drei Schritten:

- Eliminieren von Regeln der Form $A \longrightarrow \varepsilon$ (*ε -Regeln*),
- Eliminieren von Regeln der Form $A \longrightarrow B$ (*Kettenregeln*),
- Aufbrechen langer Wörter auf den rechten Seiten von Produktionen und Aufheben der Mischung von Terminalen und Nichtterminalen.

Am Ende werden wir die sogenannte *Chomsky-Normalform* hergestellt haben, bei der alle Regeln die Form $A \longrightarrow BC$ und $A \longrightarrow a$ haben. Wie bei Typ-1-Grammatiken ist die Ausnahme $S \longrightarrow \varepsilon$ erlaubt, wenn ε nicht auf der rechten Seite von Produktionen vorkommt.

Wir beginnen mit dem Eliminieren von ε -Regeln.

Definition 8.8 (ε -freie kontextfreie Grammatik)

Eine kontextfreie Grammatik heißt *ε -frei*, falls gilt:

- 1) Sie enthält keine Regeln $A \longrightarrow \varepsilon$ für $A \neq S$.
- 2) Ist $S \longrightarrow \varepsilon$ enthalten, so kommt S nicht auf der rechten Seite einer Regel vor.

Um eine Grammatik ε -frei zu machen, eliminieren wir zunächst *alle* ε -Regeln. Wir erhalten eine Grammatik G' mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$. Das Fehlen von ε kann man später leicht wieder ausgleichen.

Lemma 8.9

Es sei G eine kontextfreie Grammatik. Dann lässt sich eine Grammatik G' ohne ε -Regeln konstruieren mit $L(G') = L(G) \setminus \{\varepsilon\}$.

Beweis.

- 1) Finde alle $A \in N$ mit $A \vdash_G^* \varepsilon$:

$$N_1 := \{A \in N \mid A \rightarrow \varepsilon \in P\}$$

$$N_{i+1} := N_i \cup \{A \in N \mid A \rightarrow B_1 \cdots B_n \in P \text{ mit } B_1, \dots, B_n \in N_i\}$$

Es gibt ein k mit $N_k = N_{k+1} = \bigcup_{i \geq 1} N_i$. Für dieses k gilt: $A \in N_k \quad \text{gdw.} \quad A \vdash_G^* \varepsilon$.

- 2) Eliminiere in G alle Regeln $A \rightarrow \varepsilon$. Um dies auszugleichen, nimmt man für alle Regeln

$$A \rightarrow u_1 B_1 \cdots u_n B_n u_{n+1} \text{ mit } B_1, \dots, B_n \in N_k \text{ und } u_1, \dots, u_{n+1} \in (\Sigma \cup N \setminus N_k)^*$$

die Regeln

$$A \rightarrow u_1 \beta_1 u_2 \cdots u_n \beta_n u_{n+1}$$

hinzu für alle $\beta_1 \in \{B_1, \varepsilon\}, \dots, \beta_n \in \{B_n, \varepsilon\}$ mit $u_1 \beta_1 u_2 \cdots u_n \beta_n u_{n+1} \neq \varepsilon$. □

Beispiel:

$$P = \{S \rightarrow aS, S \rightarrow SS, S \rightarrow bA, \\ A \rightarrow BB, \\ B \rightarrow CC, B \rightarrow aAbC, \\ C \rightarrow \varepsilon\}$$

$$N_0 = \{C\},$$

$$N_1 = \{C, B\},$$

$$N_2 = \{C, B, A\} = N_3$$

$$P' = \{S \rightarrow aS, S \rightarrow SS, S \rightarrow bA, S \rightarrow b, \\ A \rightarrow BB, A \rightarrow B, \\ B \rightarrow CC, B \rightarrow C, \\ B \rightarrow aAbC, B \rightarrow abC, B \rightarrow aAb, B \rightarrow ab\}$$

Die Ableitung $S \vdash bA \vdash bBB \vdash bCCB \vdash bCCCC \vdash^* b$ kann in G' direkt durch $S \vdash b$ erreicht werden.

Satz 8.10

Zu jeder kontextfreien Grammatik G kann eine äquivalente ε -freie Grammatik konstruiert werden.

Beweis. Konstruiere G' wie im Beweis von Lemma 8.9 beschrieben. Ist $\varepsilon \notin L(G)$ (d.h. $S \not\vdash_G^* \varepsilon$, also $S \notin N_k$), so ist G' die gesuchte ε -freie Grammatik. Sonst erweitere G' um ein neues Startsymbol S_0 und die Produktionen $S_0 \rightarrow S$ und $S_0 \rightarrow \varepsilon$. □

Korollar 8.11

$\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$.

Beweis. Offenbar ist jede ε -freie kontextfreie Grammatik eine Typ-1-Grammatik, da keine der verbleibenden Regeln verkürzend ist (mit Ausnahme von $S \rightarrow \varepsilon$, wobei dann S ja aber wie auch bei Typ-1 gefordert auf keiner rechten Regelseite auftritt). \square

Der folgende Satz zeigt, dass man auf Kettenregeln verzichten kann.

Satz 8.12

Zu jeder kontextfreien Grammatik kann man eine äquivalente kontextfreie Grammatik konstruieren, die keine Kettenregeln enthält.

Beweisskizze.

- 1) Bestimme die Relation $K := \{(A, B) \mid A \vdash_G^* B\}$
(leicht mit induktivem Verfahren machbar).
- 2) $P' = \{A \rightarrow w \mid (A, B) \in K, B \rightarrow w \in P, \text{ und } w \notin N\}$ \square

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 P &= \{S \rightarrow A, A \rightarrow B, B \rightarrow aA, B \rightarrow b\} \\
 K &= \{(S, S), (A, A), (B, B), (S, A), (A, B), (S, B)\}, \\
 P' &= \{B \rightarrow aA, A \rightarrow aA, S \rightarrow aA, \\
 &\quad B \rightarrow b, A \rightarrow b, S \rightarrow b\}
 \end{aligned}$$

Wir etablieren nun die Chomsky-Normalform.

Satz 8.13 (Chomsky-Normalform)

Jede kontextfreie Grammatik lässt sich umformen in eine äquivalente Grammatik, die nur Regeln der Form

- $A \rightarrow a, A \rightarrow BC$ mit $A, B, C \in N, a \in \Sigma$
- und eventuell $S \rightarrow \varepsilon$, wobei S nicht rechts vorkommt

enthält. Eine derartige Grammatik heißt dann Grammatik in Chomsky-Normalform.

Beweis.

- 1) Konstruiere zu der gegebenen Grammatik eine äquivalente ε -freie ohne Kettenregeln. (Dabei ist die Reihenfolge wichtig!)
- 2) Führe für jedes $a \in \Sigma$ ein neues Nichtterminalsymbol X_a und die Produktion $X_a \rightarrow a$ ein.

- 3) Ersetze in jeder Produktion $A \rightarrow w$ mit $w \notin \Sigma$ alle Terminalsymbole a durch die zugehörigen X_a .
- 4) Produktionen $A \rightarrow B_1 \cdots B_n$ für $n > 2$ werden ersetzt durch

$$A \rightarrow B_1 C_1, C_1 \rightarrow B_2 C_2, \dots, C_{n-2} \rightarrow B_{n-1} B_n$$

wobei die C_i jeweils neue Symbole sind.

□

Wir betrachten nun das *Wortproblem* für kontextfreie Sprachen. Im Gegensatz zu den regulären Sprachen fixieren wir dabei eine kontextfreie Sprache L , die durch eine Grammatik G gegeben ist, anstatt G als Eingabe zu betrachten. Die zu entscheidende Frage lautet dann: gegeben ein Wort $w \in \Sigma^*$, ist $w \in L$? Das fixieren der Sprache ist für kontextfreie Sprachen in den meisten Anwendungen durchaus sinnvoll: wenn man z.B. einen Parser für eine Programmiersprache erstellt, so tut man dies i.d.R. für eine einzelne, fixierte Sprache und betrachtet nur das in der Programmiersprache formulierte Programm (= Wort) als Eingabe, nicht aber die Grammatik für die Programmiersprache selbst.

Wir nehmen an, dass die verwendete Grammatik zuvor in Chomsky-Normalform transformiert wurde. Wie wir gleich sehen werden, ist dies eine Voraussetzung, um den bekannten CYK-Algorithmus anwenden zu können. Zuvor soll aber kurz eine angenehme Eigenschaft der Chomsky-Normalform erwähnt werden, die auf sehr einfache Weise einen (wenngleich ineffizienten) Algorithmus für das Wortproblem liefert: wenn G eine Grammatik in Chomsky-Normalform ist, dann hat jede Ableitung eines Wortes $w \in L(G)$ höchstens die Länge $2|w| + 1$:

- Produktionen der Form $A \rightarrow BC$ verlängern um 1, d.h. sie können maximal $|w| - 1$ -mal angewandt werden.
- Produktionen der Form $A \rightarrow a$ erzeugen genau ein Terminalsymbol von w , d.h. sie werden genau $|w|$ -mal angewandt.

Die "+1" wird nur wegen des leeren Wortes benötigt, das Länge 0 hat, aber einen Ableitungsschritt benötigt. Im Gegensatz dazu kann man zu kontextfreien Grammatiken, die *nicht* in Chomsky-Normalform sind, *überhaupt keine* Schranke für die maximale Länge von Ableitungen angeben. Im wesentlichen liegt dies daran, dass Kettenregeln und ε -Regeln gestattet sind.

Für Grammatiken in Chomsky-Normalform liefert die obige Beobachtung folgenden Algorithmus für das Wortproblem: gegeben ein Wort w kann man rekursive *alle möglichen Ableitungen* der Länge $\leq 2|w| + 1$ durchprobieren, denn davon gibt es nur endlich viele. Wie schon erwähnt ist dieses Verfahren aber exponentiell. Einen besseren Ansatz liefert die folgende Überlegung:

Definition 8.14

Es sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform und $w = a_1 \cdots a_n \in \Sigma^*$. Wir definieren:

- $w_{ij} := a_i \cdots a_j$ (für $i \leq j$)
- $N_{ij} := \{A \in N \mid A \vdash_G^* w_{ij}\}$

Mit dieser Notation gilt nun:

- 1) $S \in N_{1n}$ gdw. $w \in L(G)$
- 2) $A \in N_{ii}$ gdw. $A \vdash_G^* a_i$
 gdw. $A \rightarrow a_i \in P$
- 3) $A \in N_{ij}$ für $i < j$ gdw. $A \vdash_G^* a_i \cdots a_j$
 gdw. $\exists A \rightarrow BC \in P$ und ein k mit $i \leq k < j$ mit
 $B \vdash_G^* a_i \cdots a_k$ und $C \vdash_G^* a_{k+1} \cdots a_j$
 gdw. $\exists A \rightarrow BC \in P$ und k mit $i \leq k < j$ mit
 $B \in N_{ik}$ und $C \in N_{(k+1)j}$

Diese Überlegungen liefern einen Algorithmus zur Berechnung von N_{1n} nach der sogenannten "Divide & Conquer" ("Teile und Herrsche") Methode. Die generelle Idee dabei ist, das eigentliche Problem in Teilprobleme zu zerlegen und diese dann beginnend mit den einfachsten und fortschreitend zu immer komplexeren Teilproblemen zu lösen. Im vorliegenden Fall sind die Teilprobleme das Berechnen der N_{ij} mit $i \leq j$. Die "einfachsten" Teilprobleme sind dann diejenigen mit $i = j$ und die Teilprobleme werden immer schwieriger, je größer die Teilwortlänge $j - i$ wird.

Algorithmus 8.15 (CYK-Algorithmus von Cocke, Younger, Kasami)

```

FOR  $i := 1$  TO  $n$  DO
     $N_{ii} := \{A \mid A \rightarrow a_i \in P\}$ 
FOR  $\ell := 1$  TO  $n - 1$  DO                      (wachsende Teilwortlänge  $\ell = j - i$ )
    FOR  $i := 1$  TO  $n - \ell$  DO                      (Startposition  $i$  von Teilwort)
         $j := i + \ell$                                       (Endposition  $j$  von Teilwort)
         $N_{ij} := \emptyset$ 
        FOR  $k := i$  TO  $j - 1$  DO (Mögliche Trennpositionen  $k$ )
             $N_{ij} := N_{ij} \cup \{A \mid \exists A \rightarrow BC \in P \text{ mit } B \in N_{ik} \text{ und } C \in N_{(k+1)j}\}$ 
    
```

Beachte:

In der innersten Schleife sind N_{ik} und $N_{(k+1)j}$ bereits berechnet, da die Teilwortlängen $k - i$ und $j - k + 1$ kleiner als das aktuelle ℓ .

Satz 8.16

Für jede Grammatik G in Chomsky-Normalform entscheidet der CYK-Algorithmus die Frage „gegeben w , ist $w \in L(G)$?“ in Zeit $O(|w|^3)$.

Beweis. Drei geschachtelte Schleifen, die jeweils $\leq |w| = n$ Schritte machen, daraus folgt: $|w|^3$ Schritte in der innersten Schleife. □

Beachte:

Die Größe von G ist hier als konstant angenommen (fest vorgegebenes G). Daher braucht die Suche nach den Produktionen $A \rightarrow BC$ und $A \rightarrow a_i$ auch nur konstante Zeit.

Beispiel:

$$P = \{S \rightarrow SA, S \rightarrow a, \\ A \rightarrow BS, \\ B \rightarrow BB, B \rightarrow BS, B \rightarrow b, B \rightarrow c\}$$

und $w = abacba$:

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	S	\emptyset	S	\emptyset	\emptyset	S
2		B	A, B	B	B	A, B
3			S	\emptyset	\emptyset	S
4				B	B	A, B
5					B	A, B
6						S
$w =$	a	b	a	c	b	a

$$S \in N_{1,6} = \{S\} \\ \Rightarrow w \in L(G)$$

Wir werden in der VL „Theoretische Informatik II“ beweisen, dass das Äquivalenzproblem für kontextfreie Sprachen unentscheidbar ist, siehe Satz 16.7 dieses Skriptes. Es gibt also keinen Algorithmus, der für zwei gegebene kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2 entscheidet, ob $L(G_1) = L(G_2)$.

Eine weitere interessante Normalform für kontextfreie Grammatiken ist die *Greibach-Normalform*, bei der es für jedes Wort in der Sprache eine Ableitung gibt, die die Terminale *streng von links nach rechts* erzeugt, und zwar *genau ein* Nichtterminal pro Ableitungsschritt. Wir geben den folgenden Satz ohne Beweis an.

Satz 8.17 (Greibach-Normalform)

Jede kontextfreie Grammatik lässt sich umformen in eine äquivalente Grammatik, die nur Regeln der Form

- $A \rightarrow aw \quad (A \in N, a \in \Sigma, w \in N^*)$
- *und eventuell $S \rightarrow \varepsilon$, wobei S nicht rechts vorkommt*

enthält.

Eine derartige Grammatik heißt Grammatik in Greibach-Normalform.

9. Abschlusseigenschaften und Pumping Lemma

Die kontextfreien Sprachen verhalten sich bezüglich Abschlusseigenschaften nicht ganz so gut wie die regulären Sprachen. Wir beginnen mit positiven Resultaten.

Satz 9.1

Die Klasse \mathcal{L}_2 der kontextfreien Sprachen ist unter Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern abgeschlossen.

Beweis. Es seien $L_1 = L(G_1)$ und $L_2 = L(G_2)$ die Sprachen für kontextfreie Grammatiken $G_i = (N_i, \Sigma, P_i, S_i)$ ($i = 1, 2$). O.B.d.A. nehmen wir an, dass $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

- 1) $G := (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1, S \rightarrow S_2\}, S)$ mit $S \notin N_1 \cup N_2$ ist eine kontextfreie Grammatik mit $L(G) = L_1 \cup L_2$.
- 2) $G' := (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1S_2\}, S)$ mit $S \notin N_1 \cup N_2$ ist eine kontextfreie Grammatik mit $L(G') = L_1 \cdot L_2$.
- 3) $G'' := (N_1 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow SS_1\}, S)$ mit $S \notin N_1$ ist eine kontextfreie Grammatik für L_1^* □

Wir werden zeigen, dass Abschluss unter *Schnitt* und *Komplement nicht* gilt. Dazu benötigen wir zunächst eine geeignete Methode, von einer Sprache nachzuweisen, dass sie *nicht* kontextfrei ist. Dies gelingt wieder mit Hilfe eines Pumping-Lemmas. In dessen Beweis stellt man Ableitungen als Bäume dar, sogenannte *Ableitungsbäume*.

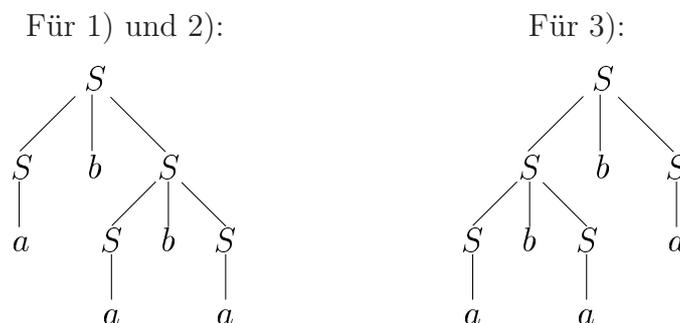
Beispiel:

$P = \{S \rightarrow SbS, S \rightarrow a\}$

Drei *Ableitungen* des Wortes *ababa*:

- 1) $S \vdash SbS \vdash abS \vdash abSbS \vdash ababS \vdash ababa$
- 2) $S \vdash SbS \vdash abS \vdash abSbS \vdash abSba \vdash ababa$
- 3) $S \vdash SbS \vdash Sba \vdash SbSba \vdash Sbaba \vdash ababa$

Die zugehörigen *Ableitungsbäume*:



Ein Ableitungsbaum kann also für mehr als eine Ableitung stehen und dasselbe Wort kann verschiedene Ableitungsbäume haben.

Wir verzichten auf eine exakte Definition von Ableitungsbäumen, da diese eher kompliziert als hilfreich ist. Stattdessen geben wir nur einige zentrale Eigenschaften an.

Allgemein:

Die Knoten des Ableitungsbaumes sind mit Elementen aus $\Sigma \cup N$ beschriftet. Dabei dürfen Terminalsymbole nur an den Blättern vorkommen (also an den Knoten ohne Nachfolger) und Nichtterminale überall (um auch partielle Ableitungen darstellen zu können). Ein mit A beschrifteter Knoten kann mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ beschriftete Nachfolgerknoten haben, wenn $A \rightarrow \alpha_1 \dots \alpha_n \in P$ ist.

Ein Ableitungsbaum, dessen Wurzel mit A beschriftet ist und dessen Blätter (von links nach rechts) mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Sigma \cup N$ beschriftet sind, beschreibt eine Ableitung $A \vdash_G^* \alpha_1 \dots \alpha_n$.

Lemma 9.2 (Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen)

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es ein $n_0 \geq 0$ so dass gilt:
für jedes $z \in L$ mit $|z| \geq n_0$ existiert eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit:

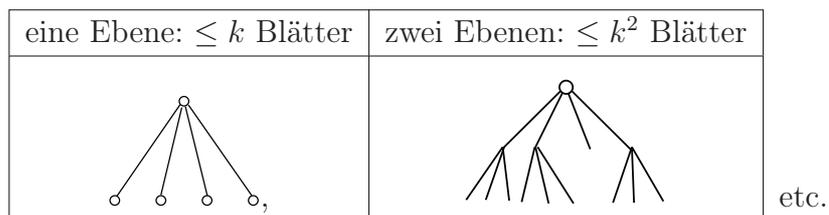
- $vx \neq \varepsilon$ und $|vwx| \leq n_0$
- $uw^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$.

Beweis. Sei G eine kontextfreie Grammatik mit $L(G) = L$. Nach Satz 8.10 und 8.12 können wir o.B.d.A. annehmen, dass G ε -frei ist und keine Kettenregeln enthält. Sei

- m die Anzahl der Nichtterminale in G ;
- k eine Schranke auf die Länge der rechten Regelseiten in G ;
- $n_0 = k^{m+1}$.

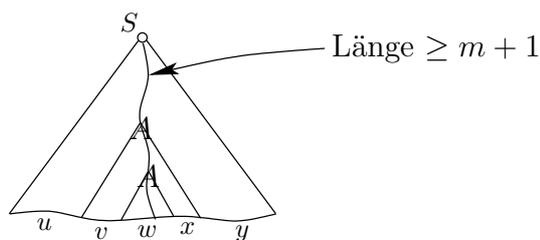
Wir verfahren nun wie folgt.

- 1) Ein Baum der Tiefe $\leq t$ und der Verzweigungszahl $\leq k$ hat maximal k^t viele Blätter:

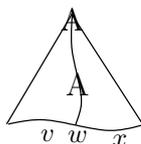


Der Ableitungsbaum für z hat $|z| \geq k^{m+1}$ Blätter, also gibt es einen Pfad (Weg von Wurzel zu Blatt) der Länge $\geq m + 1$ (gemessen in Anzahl Kanten).

- 2) Auf diesem Pfad kommen $> m + 1$ Symbole vor, davon $> m$ Nichtterminale. Da es nur m verschiedene Nichtterminale gibt, kommt ein Nichtterminal A zweimal vor. Dies führt zu folgender Wahl von u, v, w, x, y :



Wir wählen hier o.B.d.A. die erste Wiederholung eines Nichtterminals A von den Blättern aus gesehen; mit den Argumenten in 1) hat dann der Teilbaum



die Tiefe $\leq m + 1$, was $|vwx| \leq k^{m+1} = n_0$ zeigt.

3) Es gilt: $S \vdash_G^* uAy$, $A \vdash_G^* vAx$, $A \vdash_G^* w$, woraus folgt:

$$S \vdash_G^* uAy \vdash_G^* uv^iAx^i y \vdash_G^* uv^iwx^i y.$$

4) $vx \neq \varepsilon$: Da G ε -frei ist, wäre sonst $A \vdash_G^* vAx$ nur bei Anwesenheit von Regeln der Form $A \rightarrow B$ möglich. □

Wir verwenden nun das Pumpinglemma, um beispielhaft von einer Sprache nachzuweisen, dass sie nicht kontextfrei ist.

Lemma 9.3

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_2.$$

Beweis. Angenommen, $L \in \mathcal{L}_2$. Dann gibt es eine ε -freie kontextfreie Grammatik G ohne Regeln der Form $A \rightarrow B$ für L . Es sei n_0 die zugehörige Zahl aus Lemma 9.2. Wir betrachten $z = a^{n_0} b^{n_0} c^{n_0} \in L = L(G)$. Mit Satz 9.2 gibt es eine Zerlegung

$$z = uvwxy, \quad vx \neq \varepsilon \text{ und } uv^iwx^i y \in L \text{ für alle } i \geq 0.$$

1. Fall: v enthält verschiedene Symbole. Man sieht leicht, dass dann

$$uv^2wx^2y \notin a^*b^*c^* \supseteq L.$$

2. Fall: x enthält verschiedene Symbole. Dies führt zu entsprechendem Widerspruch.

3. Fall: v enthält lauter gleiche Symbole und x enthält lauter gleiche Symbole. Dann gibt es einen Symbole aus $\{a, b, c\}$, der in xv nicht vorkommt. Daher kommt dieser in $uv^0wx^0y = uwy$ weiterhin n_0 -mal vor. Aber es gilt $|uwy| < 3n_0$, was $uwy \notin L$ zeigt. □

Dieses Beispiel zeigt auch, dass die kontextfreien Sprachen eine *echte* Teilmenge der Typ 1-Sprachen sind.

Satz 9.4

$\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$.

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$ gilt (Korollar 8.11). Es bleibt zu zeigen, dass die Inklusion echt ist. Dafür betrachten wir die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$. Nach Lemma 9.3 ist $L \notin \mathcal{L}_2$. Nach Beispiel 6.3 gilt aber $L \in \mathcal{L}_1$. □

Ausserdem können wir nun zeigen, dass die kontextfreien Sprachen unter zwei wichtigen Operationen nicht abgeschlossen sind.

Korollar 9.5

Die Klasse \mathcal{L}_2 der kontextfreien Sprachen ist nicht unter Schnitt und Komplement abgeschlossen.

Beweis.

1) Die Sprachen $\{a^n b^n c^m \mid n \geq 1, m \geq 1\}$ und $\{a^m b^n c^n \mid n \geq 1, m \geq 1\}$ sind in \mathcal{L}_2 :

$$\bullet \{a^n b^n c^m \mid n \geq 1, m \geq 1\} = \underbrace{\{a^n b^n \mid n \geq 1\}}_{\in \mathcal{L}_2} \cdot \underbrace{\{c^m \mid m \geq 1\}}_{= c^+ \in \mathcal{L}_3 \subseteq \mathcal{L}_2}$$

$\in \mathcal{L}_2$ (Konkatenation)

• $\{a^m b^n c^n \mid n \geq 1, m \geq 1\}$ — analog

2) $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} = \{a^n b^n c^m \mid n, m \geq 1\} \cap \{a^m b^n c^n \mid n, m \geq 1\}$.

Wäre \mathcal{L}_2 unter \cap abgeschlossen, so würde $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \in \mathcal{L}_2$ folgen.

Widerspruch zu Teil 1) des Beweises von Satz 9.4.

3) $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$.

Wäre \mathcal{L}_2 unter Komplement abgeschlossen, so auch unter \cap , da \mathcal{L}_2 unter \cup abgeschlossen ist. Widerspruch zu 2). □

Beachte:

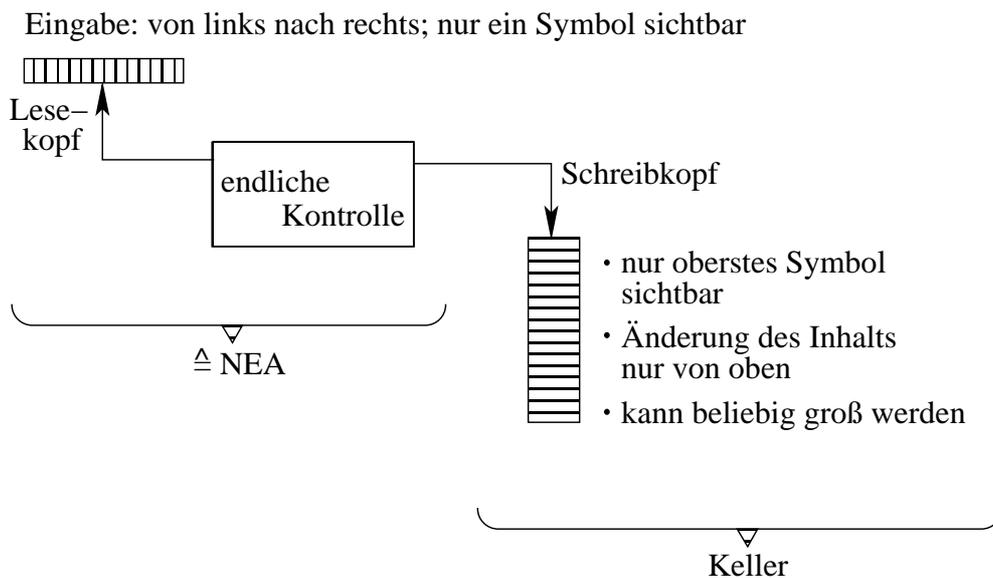
Man kann daher das Äquivalenzproblem für kontextfreie Sprachen nicht einfach auf das Leerheitsproblem reduzieren (dazu braucht man sowohl Schnitt als auch Komplement). Wie bereits erwähnt werden wir später sogar sehen, dass das Äquivalenzproblem für kontextfreie Sprachen *unentscheidbar* ist.

10. Kellerautomaten

Bisher hatten wir kontextfreie Sprachen nur mit Hilfe von Grammatiken charakterisiert. Wir haben gesehen, dass endliche Automaten *nicht* in der Lage sind, alle kontextfreien Sprachen zu akzeptieren.

Um die *Beschreibung von kontextfreien Sprachen* mit Hilfe von endlichen Automaten zu ermöglichen, muss man diese um eine unbeschränkte *Speicherkomponente*, einen sogenannten *Keller* (engl. *Stack*), erweitern. Dieser Keller speichert zwar zu jedem Zeitpunkt nur endlich viel Information, kann aber unbeschränkt wachsen.

Die folgende Abbildung zeigt eine schematische Darstellung eines *Kellerautomaten*:



Diese Idee wird in folgender Weise formalisiert.

Definition 10.1 (Kellerautomat)

Ein *Kellerautomat* (*pushdown automaton*, kurz *PDA*) hat die Form $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta)$, wobei

- Q eine endliche Menge von *Zuständen* ist,
- Σ das *Eingabealphabet* ist,
- Γ das *Kelleralphabet* ist,
- $q_0 \in Q$ der *Anfangszustand* ist,
- $Z_0 \in \Gamma$ das *Kellerstartsymbol* ist und
- $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma^* \times Q$ eine endliche *Übergangsrelation* ist.

Anschaulich bedeutet die Übergangsrelation:

(q, a, Z, γ, q') : Im Zustand q mit aktuellem Eingabesymbol a und oberstem Kellersymbol Z darf der Automat Z durch γ ersetzen und in den Zustand q' und zum nächsten Eingabesymbol übergehen.

$(q, \varepsilon, Z, \gamma, q')$: wie oben, nur dass das aktuelle Eingabesymbol nicht relevant ist und man nicht zum nächsten Eingabesymbol übergeht (der Lesekopf ändert seine Position nicht).

Im Gegensatz zu den ε -Übergängen von ε -NEAs können bei PDAs Zustände der zweiten Form im allgemeinen nicht eliminiert werden (z.B. kann ohne solche Übergänge das leere Wort nicht eliminiert werden). Man beachte, dass ein Kellerautomat nicht über Endzustände verfügt. Wie wir im folgenden sehen werden ist Akzeptanz stattdessen über den *leeren Keller* definiert.

Um die Sprache zu definieren, die von einem Kellerautomaten erkannt wird, brauchen wir den Begriff der *Konfiguration*, die den aktuellen Stand einer Kellerautomatenberechnet erfasst. Diese ist bestimmt durch.

- den *noch zu lesenden Rest* $w \in \Sigma^*$ der Eingabe (Lesekopf steht auf dem ersten Symbol von w)
- den *Zustand* $q \in Q$
- den *Kellerinhalt* $\gamma \in \Gamma^*$ (Schreiblesekopf steht auf dem ersten Symbol von γ)

Definition 10.2

Eine *Konfiguration* von \mathcal{A} hat die Form

$$\mathcal{K} = (q, w, \gamma) \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*.$$

Die Übergangsrelation ermöglicht die folgenden *Konfigurationsübergänge*:

- $(q, aw, Z\gamma) \vdash_{\mathcal{A}} (q', w, \beta\gamma)$ falls $(q, a, Z, \beta, q') \in \Delta$
- $(q, w, Z\gamma) \vdash_{\mathcal{A}} (q', w, \beta\gamma)$ falls $(q, \varepsilon, Z, \beta, q') \in \Delta$
- $\mathcal{K} \vdash_{\mathcal{A}}^* \mathcal{K}'$ gdw. $\exists n \geq 0 \exists \mathcal{K}_0, \dots, \mathcal{K}_n$ mit

$$\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}, \mathcal{K}_n = \mathcal{K}' \text{ und } \mathcal{K}_i \vdash_{\mathcal{A}} \mathcal{K}_{i+1} \text{ für } 0 \leq i < n.$$

Der Automat \mathcal{A} *akzeptiert* das Wort $w \in \Sigma^*$ gdw.

$$(q_0, w, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \varepsilon, \varepsilon) \quad (\text{Eingabewort ganz gelesen und Keller leer}).$$

Die von \mathcal{A} *erkannte Sprache* ist

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A} \text{ akzeptiert } w\}.$$

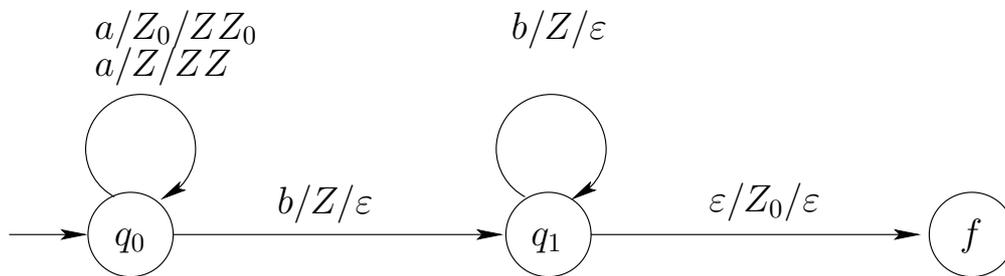
Im folgenden zwei einfach Beispiele für Kellerautomaten.

Beispiel 10.3

Ein PDA für $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$.

- $Q = \{q_0, q_1, f\}$,
- $\Gamma = \{Z, Z_0\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$ und
- $\Delta = \{(q_0, a, Z_0, ZZ_0, q_0), \text{ (erstes } a, \text{ speichere } Z)$
 $(q_0, a, Z, ZZ, q_0), \text{ (weitere } a\text{'s, speichere } Z)$
 $(q_0, b, Z, \varepsilon, q_1), \text{ (erstes } b, \text{ entnimm } Z)$
 $(q_1, b, Z, \varepsilon, q_1), \text{ (weitere } b\text{'s, entnimm } Z)$
 $(q_1, \varepsilon, Z_0, \varepsilon, f)\}$ (lösche das Kellerstartsymbol)

Wir stellen einen Kellerautomaten graphisch in der folgenden Weise dar, wobei die Kantenbeschriftung $a/Z/\gamma$ bedeutet, dass der Automat bei Z als oberstem Kellersymbol das Eingabesymbol a lesen kann und Z durch γ ersetzen.



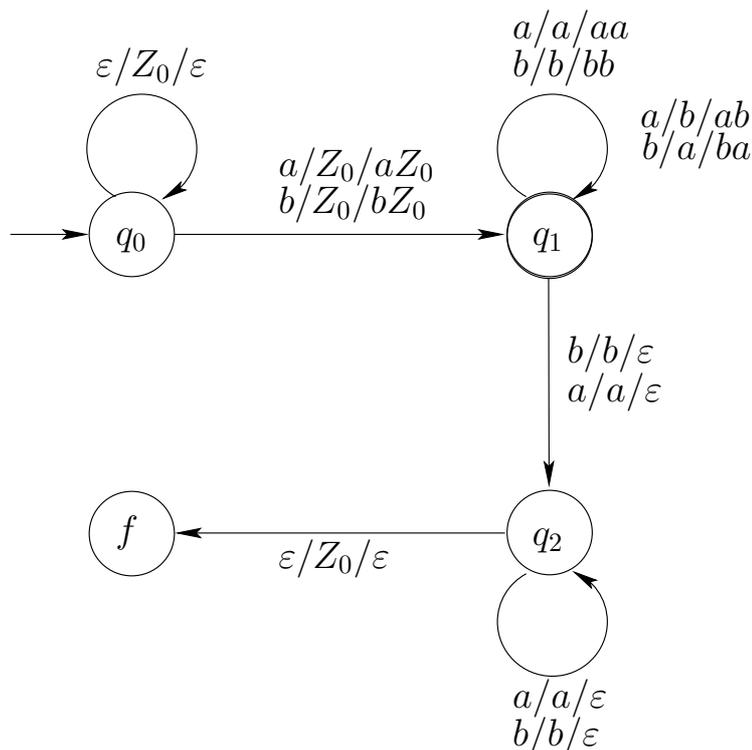
Betrachten wir beispielhaft einige Konfigurationsübergänge:

- 1) $(q_0, aabb, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_0, abb, ZZ_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_0, bb, ZZZ_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, b, ZZ_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, \varepsilon, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}} (f, \varepsilon, \varepsilon)$
 – akzeptiert
- 2) $(q_0, aab, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q_0, b, ZZZ_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, \varepsilon, ZZ_0)$
 – kein Übergang mehr möglich, nicht akzeptiert
- 3) $(q_0, abb, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_0, bb, ZZ_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, b, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}} (f, b, \varepsilon)$
 – nicht akzeptiert

Beispiel 10.4

Ein PDA für $L = \{w \overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ (wobei für $w = a_1 \dots a_n$ gilt $\overleftarrow{w} = a_n \dots a_1$).

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, f\}$,
- $\Gamma = \{a, b, Z_0\}$,
- $\Sigma = \{a, b\}$, und
- $\Delta =$



In q_1 wird die erste Worthälfte im Keller gespeichert. Der nichtdeterministische Übergang von q_1 nach q_2 „rät“ die Wortmitte. In q_2 wird die zweite Hälfte des Wortes gelesen und mit dem Keller verglichen.

Die in den Definitionen 10.1 und 10.2 eingeführte Version von Kellerautomaten akzeptiert *per leerem Keller*. Man kann stattdessen auch Akzeptanz *per Endzustand* definieren.

Definition 10.5

Ein *Kellerautomat (PDA) mit Endzuständen* ist ein Tupel

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F),$$

wobei alle Komponenten bis auf F wie in Definition 10.1 sind und $F \subseteq Q$ eine *Endzustandsmenge* ist. Ein solcher PDA *akzeptiert* ein Eingabewort $w \in \Sigma^*$ gdw. $(q_0, w, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \varepsilon, \gamma)$ für ein $q \in F$ und $\gamma \in \Gamma^*$.

Es ist nicht schwer, zu zeigen, dass PDAs mit Akzeptanz per leerem Keller und solche mit Akzeptanz per Endzustand dieselbe Sprachklasse definieren. Der Beweis wird als Übung gelassen.

Satz 10.6

Jede Sprache, die von einem PDA (per leerem Keller) erkannt wird, wird auch von einem PDA mit Endzuständen erkannt und umgekehrt.

Wir werden nun zeigen, dass man mit Kellerautomaten genau die kontextfreien Sprachen erkennen kann. Dazu führen wir zunächst den Begriff der Linksableitung ein.

Definition 10.7

Sei G eine kontextfreie Grammatik. Eine Ableitung $S = w_0 \vdash_G w_1 \vdash_G w_2 \vdash_G \cdots \vdash_G w_n$ heisst *Linksableitung* wenn sich w_{i+1} aus w_i durch Anwendung einer Regel auf das linkestehende Nichtterminal in w_i ergibt, für alle $i < n$.

Das folgende Lemma zeigt, dass sich die von einer kontextfreien Grammatik erzeugte Sprache nicht verändert, wenn man statt beliebigen Ableitungen nur noch Linksableitungen zulässt.

Lemma 10.8

Für jede kontextfreie Grammatik G gilt: $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ kann in } G \text{ mit Linksableitung erzeugt werden.}\}$

Zum Beweis von Lemma 10.8 genügt es, zu zeigen, dass jedes $w \in L(G)$ mittels einer Linksableitung erzeugt werden kann. Wir argumentieren nur informell: wenn $w \in L(G)$, dann gibt es eine Ableitung von w in G . Diese kann als Ableitungsbaum dargestellt werden. Aus dem Ableitungsbaum lässt sich nun wiederum eine Linksableitung von w ablesen (zum Beispiel durch Traversieren des Baumes in Pre-Order).

Satz 10.9

Für jede formale Sprache L sind äquivalent:

- 1) L wird von einer kontextfreien Grammatik erzeugt.
- 2) L wird von einem PDA erkannt.

Beweis.

„1 \rightarrow 2“.

Es sei $G = (N, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. Der zugehörige PDA simuliert Linksableitungen von G auf dem Keller.

Genauer gesagt definieren wir $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta)$ wobei $Q = \{q\}$, $\Gamma = \Sigma \cup N$, $q_0 = q$, $Z_0 = S$ und Δ aus folgenden Übergängen besteht:

- Übergänge zum Anwenden von Produktionen auf das oberste Kellersymbol:
für jede Regel $A \rightarrow \gamma$ den Übergang $(q, \varepsilon, A, \gamma, q)$;
- Übergänge zum Entfernen bereits erzeugter Terminalsymbole von der Kellerspitze, wenn sie in der Eingabe vorhanden sind:
für jedes Terminalsymbol $a \in \Sigma$ den Übergang $(q, a, a, \varepsilon, q)$.

Beispiel:

$P = \{S \rightarrow \varepsilon, S \rightarrow aSa, S \rightarrow bSb\}$ liefert die Übergänge:

$$\begin{array}{ll}
 (q, \varepsilon, S, \varepsilon, q), & (S \longrightarrow \varepsilon) \\
 (q, \varepsilon, S, aSa, q), & (S \longrightarrow aSa) \\
 (q, \varepsilon, S, bSb, q), & (S \longrightarrow bSb) \\
 (q, a, a, \varepsilon, q), & (a \text{ entfernen}) \\
 (q, b, b, \varepsilon, q) & (b \text{ entfernen})
 \end{array}$$

Die Ableitung $S \vdash_G aSa \vdash_G abSba \vdash_G abba$ entspricht der *Konfigurationsfolge*

$$\begin{array}{lll}
 (q, abba, S) \vdash_{\mathcal{A}} (q, abba, aSa) & \vdash_{\mathcal{A}} (q, bba, Sa) & \vdash_{\mathcal{A}} (q, bba, bSba) \vdash_{\mathcal{A}} \\
 (q, ba, Sba) \vdash_{\mathcal{A}} (q, ba, ba) & \vdash_{\mathcal{A}} (q, a, a) & \vdash_{\mathcal{A}} (q, \varepsilon, \varepsilon)
 \end{array}$$

Zu zeigen:

Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $S \vdash_G^* w$ mittels Linksableitung gdw $(q, w, S) \vdash_{\mathcal{A}} (q, \varepsilon, \varepsilon)$.

Beweis der Behauptung.

„ \Rightarrow “: Sei

$$S = w_0 \vdash_G w_1 \vdash_G \cdots \vdash_G w_n = w$$

eine Linksableitung. Für alle $i \leq n$ sei $w_i = u_i \alpha_i$ so dass u_i nur aus Terminalsymbolen besteht und α_i mit Nichtterminal beginnt oder leer ist. Jedes u_i ist Präfix von w . Sei v_i das dazugehörige Suffix, also $w = u_i v_i$.

Wir zeigen, dass

$$(q, w, S) = (q, v_0, \alpha_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v_1, \alpha_1) \vdash_{\mathcal{A}}^* \cdots \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v_n, \alpha_n) = (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

Sei $i < n$ und $A \rightarrow \gamma$ die Produktion für $w_i \vdash_G w_{i+1}$. Also beginnt α_i mit A . Dann ergibt sich $(q, v_i, \alpha_i) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v_{i+1}, \alpha_{i+1})$ durch folgende Transitionen:

- zunächst verwende $(q, \varepsilon, A, \gamma, q)$;
- verwende dann Transitionen $(q, a, a, \varepsilon, q)$ solange das oberste Stacksymbol ein Terminalsymbol a ist.

„ \Leftarrow “: Gelte umgekehrt

$$(q, w, S) = (q, v_0, \alpha_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v_1, \alpha_1) \vdash_{\mathcal{A}}^* \cdots \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v_n, \alpha_n) = (q, \varepsilon, \varepsilon).$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass

- jede der Teilableitungen $(q, v_i, \alpha_i) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v_{i+1}, \alpha_{i+1})$ genau einen Übergang der Form $(q, \varepsilon, A, \gamma, q)$ und beliebig viele der Form $(q, a, a, \varepsilon, q)$ verwendet und
- das erste Symbol von α_i ein Nichtterminal ist.

Jedes v_i ist Suffix von w . Sei u_i das dazugehörige Präfix, also $w = u_i v_i$.

Wir zeigen, dass

$$S = u_0 \alpha_0 \vdash_G u_1 \alpha_1 \vdash_G \cdots \vdash_G u_n \alpha_n.$$

Sei $i < n$ und $(q, \varepsilon, A, \gamma, q)$ der erste Übergang in $(q, v_i, \alpha_i) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, v_{i+1}, \alpha_{i+1})$ gefolgt von $(q, a_1, a_1, \varepsilon, q), \dots, (q, a_m, a_m, \varepsilon, q)$. Dann hat α_i die Form $A\alpha'_i$ und γ die Form $a_1 \cdots a_m B\gamma'$ mit $B \in N$. Anwendung der Regel $A \rightarrow \gamma$ auf $u_i \alpha_i$ ergibt $u_i \gamma \alpha'_i = u_i a_1 \cdots a_m B \gamma' \alpha'_i = u_{i+1} \alpha_{i+1}$.

„2 \rightarrow 1“.

Es sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta)$ ein PDA. Die Nichtterminalsymbole der zugehörigen Grammatik G sind alle Tripel $[p, Z, q] \in Q \times \Gamma \times Q$.

Idee:

Es soll gelten: $[p, Z, q] \vdash_G^* u \in \Sigma^*$ gdw.

1. \mathcal{A} erreicht vom Zustand p aus den Zustand q (in beliebig vielen Schritten)
2. durch Lesen von u auf dem Eingabeband und
3. Löschen von Z aus dem Keller (ohne dabei die Symbole unter Z anzutasten).

Die Produktionen beschreiben die intendierte Bedeutung jedes Nichtterminals $[p, Z, q]$ auf folgende Weise: um q von p aus unter Lesen der Eingabe $u = av$ und Löschen des Stacksymbols Z zu erreichen, braucht man eine Transition $(p, a, Z, X_1 \cdots X_n)$, die Z durch Symbole $X_1 \cdots X_n$ ersetzt und das erste Symbol a von u liest (hier ist auch „ $a = \varepsilon$ “ möglich). Nun muss man noch den neu erzeugten Stackinhalt $X_1 \cdots X_n$ loswerden. Das tut man Schritt für Schritt mittels Zerlegung des Restwortes $v = v_1 \cdots v_n$ und über Zwischenzustände p_1, \dots, p_{n-1} so dass

- $[p_0, X_1, p_1]$ unter Lesen von v_1 ;
- $[p_1, X_2, p_2]$ unter Lesen von v_2 ;
- ...
- $[p_{n-1}, X_n, q]$ unter Lesen von v_n .

(Hier ist $[p, X, q]$ jeweils gemäss den obigen Punkten 1-3 zu lesen).

Da die benötigten Zwischenzustände p_1, \dots, p_{n-1} nicht bekannt sind, fügt man einfach eine Produktion

$$[p, Z, q] \longrightarrow a[p_0, X_1, p_1] \cdots [p_{n-1}, X_n, q]$$

für alle möglichen Zustandsfolgen p_1, \dots, p_{n-1} hinzu. In einer Ableitung der resultierenden Grammatik kann man dann die Regel mit den „richtigen“ Zwischenzuständen auswählen (und eine falsche Auswahl führt einfach zu keiner Ableitung).

Formale Definition:

$$\begin{aligned}
 G &:= (N, \Sigma, P, S) \text{ mit} \\
 N &:= \{S\} \cup \{[p, Z, q] \mid p, q \in Q, Z \in \Gamma\} \\
 P &:= \{S \longrightarrow [q_0, Z_0, q] \mid q \in Q\} \cup \\
 &\quad \{[p, Z, q] \longrightarrow a \mid (p, a, Z, \varepsilon, q) \in \Delta \text{ mit } a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\} \cup \\
 &\quad \{[p, Z, q] \longrightarrow a[p_0, X_1, p_1][p_1, X_2, p_2] \cdots [p_{n-1}, X_n, q] \mid \\
 &\quad \quad (p, a, Z, X_1 \dots X_n, p_0) \in \Delta \text{ und} \\
 &\quad \quad a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, \\
 &\quad \quad p_1, \dots, p_{n-1} \in Q, \\
 &\quad \quad n \geq 1\}
 \end{aligned}$$

Beachte:

Für $n = 0$ hat man den Übergang $(p, a, Z, \varepsilon, q) \in \Delta$, welcher der Produktion $[p, Z, q] \longrightarrow a$ entspricht.

Behauptung:

Für alle $p, q \in Q, u \in \Sigma^*, Z \in \Gamma, \gamma \in \Gamma^*$ gilt:

$$(*) \quad [p, Z, q] \vdash_G^* u \text{ gdw. } (p, u, Z) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

Für $p = p_0$ und $Z = Z_0$ folgt daraus:

$$\vdash_G [q_0, Z_0, q] \vdash_G^* u \text{ gdw. } S(q_0, u, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

d.h. $u \in L(G)$ gdw. $u \in L(\mathcal{A})$.

Der Beweis dieser Behauptung kann durch Induktion über die Länge der Konfigurationsfolge („ \Rightarrow “) bzw. über die Länge der Ableitung („ \Leftarrow “) geführt werden. \square

Beispiel:

Gegeben sei der PDA für $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ aus Beispiel 10.3. Die Berechnung des PDA

$$(q_0, ab, Z_0) \xrightarrow{(q_0, a, Z_0, Z Z_0, q_0)} \vdash_{\mathcal{A}} (q_0, b, Z Z_0) \xrightarrow{(q_0, b, Z, \varepsilon, q_1)} \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, \varepsilon, Z_0) \xrightarrow{(q_1, \varepsilon, Z_0, \varepsilon, f)} \vdash_{\mathcal{A}} (f, \varepsilon, \varepsilon)$$

entspricht der Ableitung

$$S \vdash_G [q_0, Z_0, f] \vdash_G a[q_0, Z, q_1][q_1, Z_0, f] \vdash_G ab[q_1, Z_0, f] \vdash_G ab.$$

Aus Satz 10.9 ergibt sich leicht folgendes Korollar. Wir nennen zwei PDAs \mathcal{A} und \mathcal{A}' äquivalent wenn $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$.

Korollar 10.10

Zu jedem PDA \mathcal{A} gibt es einen PDA \mathcal{A}' so dass $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}')$ und \mathcal{A}' nur einen Zustand hat.

Beweis. Gegeben einen PDA \mathcal{A} kann man erst die Konstruktion aus dem Teil „2 \longrightarrow 1“ des Beweises von Satz 10.9 anwenden und dann die aus dem Teil „1 \longrightarrow 2“. Man erhält einen äquivalenten PDA der nach Konstruktion nur einen einzigen Zustand enthält. \square

Wegen der gerade gezeigten Äquivalenz zwischen kontextfreien Sprachen und PDA-akzeptierbaren Sprachen kann man Eigenschaften von kontextfreien Sprachen mit Hilfe von Eigenschaften von Kellerautomaten zeigen. Als Beispiel betrachten wir den Durchschnitt von kontextfreien Sprachen mit regulären Sprachen. Wir wissen: Der Durchschnitt zweier kontextfreier Sprachen muss nicht kontextfrei sein. Dahingegen gilt:

Satz 10.11

Es sei $L \subseteq \Sigma^$ kontextfrei und $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann ist $L \cap R$ kontextfrei.*

Beweis. Es sei $L = L(\mathcal{A})$ für einen PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$ (o.B.d.A. mit Endzuständen) und $R = L(\mathcal{A}')$ für einen DEA $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, q'_0, \delta', F')$. Wir wenden eine Produktkonstruktion an, um einen PDA zu konstruieren, der $L \cap R$ erkennt:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &:= (Q \times Q', \Sigma, \Gamma, (q_0, q'_0), Z_0, \Delta', F \times F') \text{ mit} \\ \Delta' &:= \{((p, p'), a, Z, \gamma, (q, q')) \mid (p, a, Z, \gamma, q) \in \Delta \text{ und } \delta(p', a) = q'\} \cup \\ &\quad \{((p, p'), \varepsilon, Z, \gamma, (q, p')) \mid (p, \varepsilon, Z, \gamma, q) \in \Delta\} \end{aligned}$$

Man zeigt nun leicht (durch Induktion über k):

$$((p, p'), uv, \gamma) \vdash_{\mathcal{B}}^k ((q, q'), v, \beta) \quad \text{gdw.} \quad (p, uv, \gamma) \vdash_{\mathcal{A}}^k (q, v, \beta) \text{ und } p' \xrightarrow{u}_{\mathcal{A}'} q' \quad \square$$

Beachte: mit zwei PDAs als Eingabe funktioniert eine solche Produktkonstruktion nicht, da die beiden PDAs den Keller im allgemeinen nicht „synchron“ nutzen (der eine kann das obere Kellersymbol löschen, während der andere Symbole zum Keller hinzufügt).

Deterministische Kellerautomaten

Analog zu endlichen Automaten kann man auch bei Kellerautomaten eine deterministische Variante betrachten. Intuitiv ist der Kellerautomat aus Beispiel 10.3 deterministisch, da es zu jeder Konfiguration höchstens eine Folgekonfiguration gibt. Der Kellerautomat aus Beispiel 10.4 ist hingegen nicht-deterministisch, da er die Wortmitte „rät“. Interessanterweise stellt es sich heraus, dass bei im Gegensatz zu DEAs/NEAs bei PDAs die deterministische Variante echt schwächer ist als die nicht-deterministische. Daher definieren die deterministischen PDAs eine eigene Sprachklasse, die *deterministisch kontextfreien Sprachen*.

Deterministische PDAs akzeptieren immer per Endzustand (aus gutem Grund, wie wir noch sehen werden).

Definition 10.12 (deterministischer Kellerautomat)

Ein *deterministischer Kellerautomat (dPDA)* ist ein PDA mit Endzuständen

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$$

der folgende Eigenschaften erfüllt:

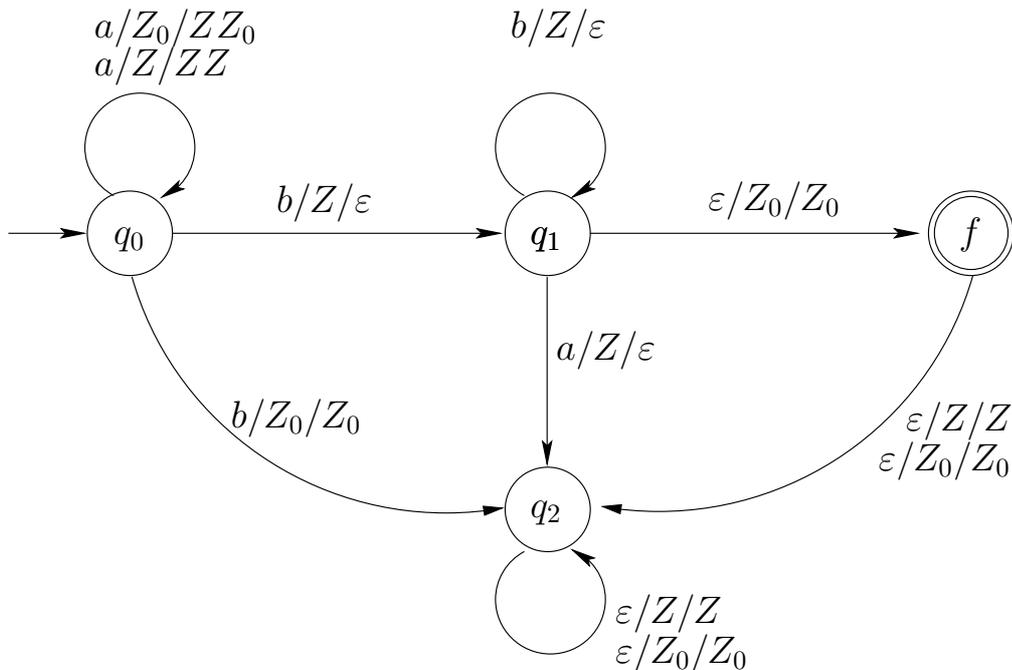
1. Für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$ und $Z \in \Gamma$ gibt es genau eine Transition der Form (q, a, Z, γ, q') oder $(q, \varepsilon, Z, \gamma, q')$;
2. Wenn eine Transition das Kellerstartsymbol Z_0 entfernt, so muss sie es direkt wieder zurückschreiben; alle Transitionen, in denen Z_0 vorkommt, müssen also die Form (q, a, Z_0, Z_0, q') haben.

Man kann leicht sehen, dass es zu jeder Konfiguration eines dPDA, bei der der Keller nicht leer ist, genau eine Folgekonfiguration gibt. Die Bedingung 2 ist notwendig, damit der Keller tatsächlich nie leer wird (denn eine Konfiguration mit leerem Keller kann keine Folgekonfiguration haben). Wie ein normaler PDA mit Endzuständen akzeptiert ein dPDA \mathcal{A} ein Wort w gdw. $(q_0, w, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q_f, \varepsilon, \gamma)$ für ein $q_f \in F$ und $\gamma \in \Gamma^*$.

Beispiel 10.13

Als Beispiel für einen dPDA betrachte die folgende Variante des PDAs aus Beispiel 10.3, die ebenfalls $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ erkennt:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, f\}$;
- $\Gamma = \{Z, Z_0\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Delta =$



Im Unterschied zum Automaten aus Beispiel 10.3 ist f ein Endzustand geworden, der Übergang von q_1 nach f entfernt Z_0 nicht mehr vom Keller (weil das nicht erlaubt wäre) und der „Papierkorbzustand“ q_2 ist hinzugekommen.

Da die Arbeitsweise von dPDAs durchaus etwas subtil ist, hier zwei Hinweise zum vorangegangenen Beispiel:

- Auf manchen Eingaben gibt es mehr als eine Berechnung. Als Beispiel betrachte man die Eingabe $aabb$. Nachdem diese gelesen wurde, befindet sich der PDA im Zustand q_1 , der kein Endzustand ist. Man kann jedoch den Endzustand f in einem weiteren Schritt erreichen, also wird die Eingabe $aabb$ akzeptiert. Danach kann man im Prinzip noch den Nichtendzustand q_2 erreichen und in diesem beliebig oft loopen (was aber nicht sinnvoll ist).
- Trotz des Determinismus können manche Eingaben wie z.B. ba nicht vollständig gelesen werden.

Eine interessante Eigenschaft von deterministischen PDAs ist, dass für sie das Wortproblem in *Linearzeit* (also sehr effizient) entschieden werden kann. Aus diesem Grund spielen dPDAs im Gebiet des Compilerbaus eine wichtige Rolle.

Definition 10.14

Eine formale Sprache L heißt *deterministisch kontextfrei* wenn es einen dPDA \mathcal{A} gibt mit $L(\mathcal{A}) = L$. Die Menge aller deterministisch kontextfreien Sprachen bezeichnen wir mit \mathcal{L}_2^d .

Folgende Einordnung der deterministisch kontextfreien Sprachen ist leicht vorzunehmen.

Satz 10.15

$$\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2^d \subseteq \mathcal{L}_2.$$

Beweis. Es gilt $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2^d$, da jeder DEA \mathcal{A} als dPDA ohne ε -Übergänge und mit nur einem Kellersymbol Z_0 betrachtet werden kann, der zudem seinen Keller nie modifiziert: aus jedem Übergang $\delta(q, a) = q'$ des DEA wird die Transition (q, a, Z_0, Z_0, q') des dPDA. Die Inklusion ist echt, da mit Beispiel 10.13 $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \in \mathcal{L}_2^d$, wohingegen $L \notin \mathcal{L}_3$. Die Inklusion $\mathcal{L}_2^d \subseteq \mathcal{L}_2$ gilt wegen Satz 10.6. □

Wie bereits erwähnt sind dPDAs echt schwächer als PDAs, d.h. die deterministisch kontextfreien Sprachen sind eine *echte Teilmenge* der kontextfreien Sprachen. Der Beweis beruht auf dem folgenden Resultat. Wir verzichten hier auf den etwas aufwendigen Beweis und verweisen z.B. auf [Koz06].

Satz 10.16

\mathcal{L}_2^d ist unter Komplement abgeschlossen.

Zur Erinnerung: die kontextfreien Sprachen selbst sind mit Korollar 9.5 nicht unter Komplement abgeschlossen. Man kann zeigen, dass die deterministisch kontextfreien Sprachen nicht unter Schnitt, Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Stern abgeschlossen sind.

Satz 10.17

$$\mathcal{L}_2^d \subset \mathcal{L}_2.$$

Beweis. Mit Satz 10.16 ist der folgende sehr einfache Beweis möglich: wäre $\mathcal{L}_2^d = \mathcal{L}_2$, so wäre mit Satz 10.16 \mathcal{L}_2 unter Komplement abgeschlossen, was jedoch ein Widerspruch zu Korollar 9.5 ist.

Dieser Beweis liefert jedoch keine konkrete Sprache, die kontextfrei aber nicht deterministisch kontextfrei ist. Eine solche findet man beispielsweise wie folgt: in der Übung zeigen wir, dass die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \forall v \in \{a, b\}^* : w \neq vv\}$$

kontextfrei ist (durch Angeben einer Grammatik), ihr Komplement

$$\bar{L} = \{w \in \{a, b\}^* \mid \exists v \in \{a, b\}^* : w = vv\}$$

aber nicht (Pumping Lemma für kontextfreie Sprachen). Wäre $L \in \mathcal{L}_2^d$, so wäre mit Satz 10.16 auch $\bar{L} \in \mathcal{L}_2^d \subseteq \mathcal{L}_2$, womit ein Widerspruch hergestellt ist. □

Auch die Sprache $\{w \overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$ aus Beispiel 10.4 ist kontextfrei, aber nicht deterministisch kontextfrei, der Beweis ist allerdings aufwändig. Intuitiv ist der Grund aber, dass das nicht-deterministische „Raten“ der Wortmitte essentiell ist. Dies wird auch dadurch illustriert, dass die Sprache $\{w c \overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$, bei der die Wortmitte explizit durch das Symbol c angezeigt wird, sehr einfach mit einem dPDA erkannt werden kann.

Zum Abschluss bemerken wir noch, dass das akzeptieren per leerem Keller bei dPDAs zu Problemen führt.

Lemma 10.18

Es gibt keinen dPDA, der die endliche (also reguläre) Sprache $L = \{a, aa\}$ per leerem Keller erkennt.

Beweis. Angenommen, der dPDA \mathcal{A} erkennt L per leerem Keller. Da $a \in L$ gibt es eine Konfigurationsfolge

$$\Omega = (q_0, a, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, w_1, \gamma_1) \vdash_{\mathcal{A}} \cdots \vdash_{\mathcal{A}} (q_n, w_n, \gamma_n)$$

mit $w_n = \gamma_n = \varepsilon$. Also gibt es auch Konfigurationsfolged

$$\Omega' = (q_0, aa, Z_0) \vdash_{\mathcal{A}} (q_1, u_1, \gamma_1) \vdash_{\mathcal{A}} \cdots \vdash_{\mathcal{A}} (q_n, u_n, \gamma_n)$$

mit $u_n = a$ und $\gamma_n = \varepsilon$ und da \mathcal{A} deterministisch ist das die *einzig*e Konfigurationsfolge, die das Präfix a der Eingabe aa verarbeitet. Wegen $\gamma_n = \varepsilon$ hat (q_n, u_n, γ_n) keine Folgekonfiguration, also wird aa nicht akzeptiert (dies kann per Definition nur nach Lesen der gesamten Eingabe geschehen). Widerspruch. \square

Man kann diese Probleme beheben, indem man ein explizites Symbol für das Wortende einführt, das auch in Transitionen von dPDAs verwendet werden kann. Mit einem solchen Symbol sind Akzeptanz per Endzustand und Akzeptanz per leerem Keller auch für dPDAs äquivalent.

III. Berechenbarkeit

Einführung

Aus der Sicht der Theorie der *formalen Sprachen* (Teil I + II dieses Skriptes) geht es in diesem Teil darum, die Typ-0- und die Typ-1-Sprachen zu studieren und folgende Fragen zu beantworten:

- Was sind geeignete Automatenmodelle?
- Welche Abschlusseigenschaften gelten?
- Wie lassen sich die zentralen Entscheidungsprobleme (Wortproblem, Leerheitsproblem, Äquivalenzproblem) lösen?

Eine viel wichtigere Sicht auf den Inhalt von Teil III ist aber eine andere, nämlich als Einführung in die *Theorie der Berechenbarkeit*. Hierbei handelt es sich um eine zentrale Teildisziplin der theoretischen Informatik, in der Fragen wie die folgenden studiert werden:

- Gibt es Probleme, die prinzipiell nicht berechenbar sind?
- Was für Berechnungsmodelle gibt es?
- Sind alle Berechnungsmodelle (verschiedene Rechnerarchitekturen, Programmiersprachen, mathematische Modelle) gleich mächtig?
- Welche Ausdrucksmittel von Programmiersprachen sind verzichtbar, weil sie zwar der Benutzbarkeit dienen, aber die Berechnungsstärke nicht erhöhen?

In diesem Zusammenhang interessieren wir uns für

- die *Berechnung (partieller oder totaler) Funktionen*

$$f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$$

wobei k die *Stelligkeit* der Funktion bezeichnet; Beispiele sind etwa:

- Die konstante Nullfunktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{N}$;
- Die binäre Additionsfunktion $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x, y) = x + y$;

Manchmal betrachten wir auch Funktionen $f : (\Sigma^*)^k \rightarrow \Sigma^*$, wobei Σ ein Alphabet ist. Ein Beispiel ist die Konkatenationsfunktion.

- *Entscheidungsprobleme*, also Fragen, die nur mit “ja” oder “nein” beantwortet werden können, wie beispielsweise das Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken: gegeben eine Grammatik G , ist $L(G) = \emptyset$?

Wir werden Entscheidungsprobleme als Mengen $P \subseteq \Sigma^*$ formalisieren, für ein geeignetes Alphabet Σ . Ein Entscheidungsproblem ist also nichts anderes als eine formale Sprache! Das erwähnte Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken würde dann dargestellt als Menge

$$\{\text{code}(G) \mid G \text{ ist kontextfreie Grammatik mit } L(G) = \emptyset\}$$

wobei $\text{code}(G)$ eine geeignete Kodierung der Grammatik G als Wort ist.

Intuitiv heißt eine Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ *berechenbar* wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ nach endlicher Zeit den Funktionswert $f(x_1, \dots, x_k)$ ausgibt. Ein Entscheidungsproblem $P \subseteq \Sigma^*$ heißt *entscheidbar* wenn es einen Algorithmus gibt, der bei Eingabe w nach endlicher Zeit “ja” zurückgibt wenn $w \in P$ und “nein” sonst. Man beachte: diese Beschreibungen von Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit sind so noch *keine* formalen Definitionen sind, da wir nicht eindeutig festgelegt haben, was unter dem Begriff “Algorithmus” zu verstehen ist.

Um sich klarzumachen, dass eine gegebene Funktion berechenbar oder ein Problem entscheidbar ist, genügt es, einen entsprechenden Algorithmus für die Funktion bzw. das Problem anzugeben. Dies kann in Form eines Pascal-, Java- oder C-Programmes oder in Form einer *abstrakten Beschreibung* der Vorgehensweise bei der Berechnung geschehen. Zum Beispiel hatten wir in den Teilen I und II die Entscheidbarkeit von verschiedenen Problemen (Wortproblem, Leerheitsproblem, Äquivalenzproblem, ...) dadurch begründet, dass wir auf abstrakte Weise beschrieben haben, wie man die Probleme mit Hilfe eines Rechenverfahrens entscheiden kann. Um etwa das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken zu lösen, kann man zunächst die Grammatik in Chomsky-Normalform wandeln (wir haben im Detail beschrieben, wie diese Wandlung realisiert werden kann) und dann den CYK-Algorithmus anwenden (den wir in Form von Pseudocode beschrieben haben). Aus dieser und ähnlichen Beschreibungen kann man jeweils leicht ein Pascal-, Java-, etc. Programm zur Entscheidung des Problems gewinnen. Für derartige Argumente wird keine formale Definition des Begriffes “Algorithmus” benötigt, denn jede vernünftige Definition dieser Art würde die erwähnte Programme einschließen.

Eine fundamentale Einsicht der Theorie der Berechenbarkeit ist, dass es wohldefinierte (und für die Informatik hochgradig relevante!) Funktionen gibt, die nicht berechenbar sind, und analog dazu Entscheidungsprobleme, die nicht entscheidbar sind. Beim Nachweis der Nichtberechenbarkeit bzw. Nichtentscheidbarkeit ist es nicht mehr ausreichend, einen intuitiven und nicht näher spezifizierten Begriff von Algorithmus zu verwenden: die Aussage, dass es *keinen Algorithmus für ein Entscheidungsproblem gibt*, bezieht sich implizit auf *alle* Algorithmen (für jeden Algorithmus gilt: er entscheidet nicht das betrachtete Problem). Aus diesem Grund benötigt man für das Studium der *Grenzen der Berechenbarkeit* eine formale Definition dessen, was man unter einem Algorithmus

versteht. Zunächst gibt es scheinbar sehr viele Kandidaten für das zugrunde gelegte *Berechnungsmodell*: Eine Programmiersprache? Welche der vielen Sprachen ist geeignet? Imperativ, funktional, objektorientiert? Verwendet man ein hardwarenahes Modell, wie etwa das Modell eines Mikroprozessors? Oder ein abstraktes mathematisches Modell?

Es stellt sich heraus, dass ein geeignetes Berechnungsmodell folgende Eigenschaften erfüllen sollte:

- 1) es sollte **einfach** sein, damit formale Beweise erleichtert werden (z.B. nicht die Programmiersprache Java),
- 2) es sollte **berechnungsuniversell** sein, d.h. alle intuitiv berechenbaren Funktionen können damit berechnet werden (bzw. alle intuitiv entscheidbaren Mengen entschieden werden können)—also keine endlichen Automaten, denn deren Berechnungsstärke ist viel zu schwach.

Wir werden drei Berechnungsmodelle betrachten:

- Turingmaschinen als besonders einfaches aber dennoch berechnungsuniverselles Modell
- WHILE-Programme als Abstraktion imperativer Programmiersprachen (im Prinzip handelt es sich um eine möglichst einfache, aber immernoch berechnungsuniverselle solche Sprache)
- μ -rekursive Funktionen als funktionsbasiertes, mathematisches Berechnungsmodell.

Es gibt noch eine Vielzahl anderer Modelle: Registermaschinen, GOTO-Programme, k -Zählermaschinen mit $k \geq 2$, Java-Programme, usw. Es hat sich aber interessanterweise herausgestellt, dass all diese vollkommen unterschiedlichen Modelle *äquivalent* sind, d.h. dieselbe Klasse von Funktionen berechnen (bzw. Problemen entscheiden). Zudem ist es bisher niemandem gelungen, ein formales Berechnungsmodell zu finden, das

- realistisch erscheint (also im Prinzip in der wirklichen Welt realisierbar ist),
- Funktionen berechnen kann, die in den oben genannten Modellen nicht berechenbar sind.

Aus diesen beiden Gründen geht man davon aus, dass die genannten Modelle *genau den intuitiven Berechenbarkeitsbegriff* formalisieren. Diese Überzeugung nennt man die:

Church-Turing-These:

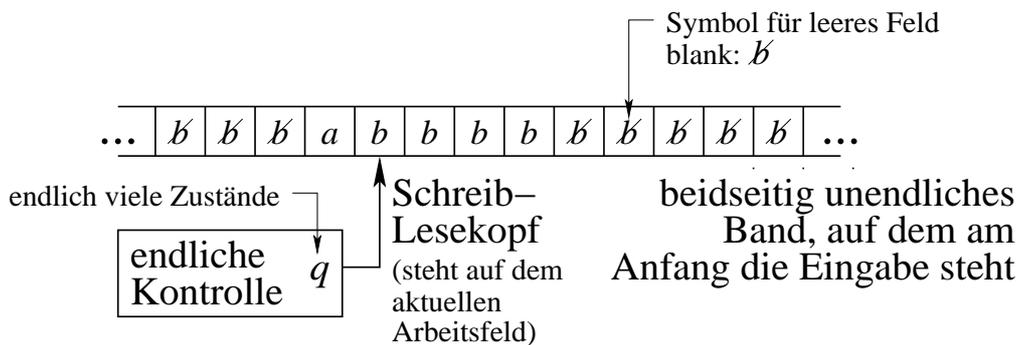
Die (intuitiv) berechenbaren Funktionen sind genau die mit Turingmaschinen (und damit mit WHILE-, Java-Programmen, Registermaschinen, ...) berechenbaren Funktionen.

Man könnte die These äquivalent auch für Entscheidungsprobleme formulieren. Man spricht hier von einer *These* und nicht von einem *Satz*, da es nicht möglich ist, diese Aussage formal zu beweisen. Dies liegt daran, dass der intuitive Berechenbarkeitsbegriff ja nicht formal definierbar ist. Es gibt aber gute Indizien, die für die Richtigkeit der These sprechen, insbesondere die große Vielzahl existierender Berechnungsmodelle, die sich als äquivalent herausgestellt haben.

11. Turingmaschinen

Turingmaschinen wurden um 1936 von dem englischen Mathematiker und Informatiker Alan Turing als besonders einfaches Berechnungsmodell vorgeschlagen. In den Worten des bekannten Komplexitätstheoretikers Christos Papadimitriou: “It is amazing how little you need to have everything”. Wir verwenden Turingmaschinen einerseits als universelles Berechnungsmodell und andererseits als Werkzeug zum Definieren von formalen Sprachen. Insbesondere werden wir sehen, dass Turingmaschinen genau die Typ 0-Sprachen erkennen und eine entsprechend eingeschränkte Turingmaschine als Automatenmodell für Typ 1-Sprachen verwendet werden kann.

Die schematische Darstellung einer Turingmaschine ist wie folgt:



Das Arbeitsband ist beidseitig unendlich. Zu jedem Zeitpunkt sind jedoch nur *endlich viele* Symbole auf dem Band verschieden von \flat . Das Verhalten der Turingmaschine hängt ab vom aktuellen Zustand und vom Alphabetsymbol, das sich unter dem Schreib-Lesekopf findet. Ein Schritt der Maschine besteht darin, das Zeichen unter dem Schreib-Lesekopf zu ersetzen und dann den Kopf nach rechts oder links (oder gar nicht) zu bewegen.

Definition 11.1 (Turingmaschine)

Eine *Turingmaschine* über dem Eingabealphabet Σ hat die Form $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$, wobei

- Q endliche Zustandsmenge ist,
- Σ das Eingabealphabet ist,
- Γ das Arbeitsalphabet ist mit $\Sigma \subseteq \Gamma$, $\flat \in \Gamma \setminus \Sigma$,
- $q_0 \in Q$ der Anfangszustand ist,
- $F \subseteq Q$ die Endzustandsmenge ist und
- $\Delta \subseteq Q \times \Gamma \times \Gamma \times \{r, l, n\} \times Q$ die Übergangsrelation ist.

Dabei bedeutet der Übergang $(q, a, a', \overset{r}{l}, q')$:

- Im Zustand q
- mit a auf dem gerade gelesenen Feld (Arbeitsfeld)

kann die Turingmaschine M

- das Symbol a durch a' ersetzen,
- in den Zustand q' gehen und
- den Schreib-Lesekopf entweder um ein Feld nach rechts (r), links (l) oder gar nicht (n) bewegen.

Die Maschine M heißt *deterministisch*, falls es für jedes Paar $(q, a) \in Q \times \Gamma$ höchstens ein Tupel der Form $(q, a, \dots, \dots, \dots) \in \Delta$ gibt.

NTM steht im folgenden für (möglicherweise) nichtdeterministische Turingmaschinen und DTM für deterministische.

Bei einer DTM gibt es also zu jedem Berechnungszustand höchstens einen Folgezustand, während es bei einer NTM mehrere geben kann.

Einen Berechnungszustand (*Konfiguration*) einer Turingmaschine kann man beschreiben durch ein Wort $\alpha q \beta$ mit $\alpha, \beta \in \Gamma^*$, $q \in Q$:

- q ist der momentane Zustand
- α ist die Beschriftung des Bandes links vom Arbeitsfeld
- β ist die Beschriftung des Bandes beginnend beim Arbeitsfeld nach rechts

Dabei werden (um endliche Wörter α , β zu erhalten) unendlich viele blanks weggelassen, d.h. α und β umfassen mindestens den Bandabschnitt, auf dem Symbole $\neq \flat$ stehen.

Beispiel:

Der Zustand der Maschine zu Beginn des Abschnitts wird durch die Konfiguration $aqbbbb$, aber auch durch $\flat baqbbbb \flat$ beschrieben.

Formal werden Zustandsübergänge durch die Relation " \vdash_M " auf der Menge aller Konfigurationen beschrieben. Genauer gesagt ermöglicht die Übergangsrelation Δ die folgenden *Konfigurationsübergänge*:

Es seien $\alpha, \beta \in \Gamma^*$, $a, b, a' \in \Gamma$, $q, q' \in Q$. Es gilt

$$\begin{array}{llll}
 \alpha qa\beta & \vdash_M & \alpha a' q' \beta & \text{falls } (q, a, a', r, q') \in \Delta \\
 \alpha q & \vdash_M & \alpha a' q' & \text{falls } (q, \flat, a', r, q') \in \Delta \\
 \alpha b qa\beta & \vdash_M & \alpha q' ba' \beta & \text{falls } (q, a, a', l, q') \in \Delta \\
 qa\beta & \vdash_M & q' \flat a' \beta & \text{falls } (q, a, a', l, q') \in \Delta \\
 \alpha qa\beta & \vdash_M & \alpha q' a' \beta & \text{falls } (q, a, a', n, q') \in \Delta \\
 \alpha q & \vdash_M & \alpha q' a' & \text{falls } (q, \flat, a', n, q') \in \Delta
 \end{array}$$

Weitere Bezeichnungen:

- Gilt $k \vdash_M k'$, so heißt k' *Folgekonfiguration* von k .
- Die Konfiguration $\alpha q \beta$ heißt *akzeptierend*, falls $q \in F$.
- Die Konfiguration $\alpha q \beta$ heißt *Stoppkonfiguration*, falls sie keine Folgekonfiguration hat.
- Eine *Berechnung* von M ist eine endliche oder unendliche Konfigurationsfolge

$$k_0 \vdash_M k_1 \vdash_M k_2 \vdash_M \dots$$

Offensichtlich gibt es für DTMs nur eine einzige maximale Berechnung, die in einer fixen Konfiguration k_0 beginnt; für NTMs kann es dagegen mehrere solche Berechnungen geben.

Die folgende Definition formalisiert beide Anwendungen von Turingmaschinen: das Berechnen von Funktionen und das Erkennen von Sprachen. Im ersten Fall steht die Eingabe (w_1, \dots, w_n) in Form des Wortes $w_1 \# w_2 \# \dots \# w_n$ auf dem Band, wobei sich der Kopf zu Anfang auf dem ersten (linkestehenden) Symbol von w_1 befindet. Nachdem die Maschine eine Stoppkonfiguration erreicht hat, findet sich die Ausgabe ab der Kopfposition bis zum ersten Symbol aus $\Gamma \setminus \Sigma$. Beim Erkennen von Sprachen steht das Eingabewort w auf dem Band und der Kopf befindet sich anfangs über dem ersten Symbol von w . Ein positives Berechnungsergebnis wird dann über das Stoppen in einem Endzustand signalisiert.

Definition 11.2 (Turing-berechenbar, Turing-erkennbar)

- 1) Die partielle Funktion $f : (\Sigma^*)^n \rightarrow \Sigma^*$ heißt *Turing-berechenbar*, falls es eine DTM M gibt mit
 - a) der Definitionsbereich $\text{dom}(f)$ von f besteht aus den Tupeln $(w_1, \dots, w_n) \in (\Sigma^*)^n$ so dass M ab der Konfiguration

$$k_0 = q_0 w_1 \# w_2 \# \dots \# w_n$$

eine Stoppkonfiguration erreicht.

- b) wenn $(x_1, \dots, x_n) \in \text{dom}(f)$, dann hat die von k_0 erreichte Stoppkonfiguration k die Form $uqxv$ mit
 - $x = f(w_1, \dots, w_n)$
 - $v \in (\Gamma \setminus \Sigma) \cdot \Gamma^* \cup \{\varepsilon\}$

- 2) Die von der NTM M *erkannte Sprache* ist

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid q_0 w \vdash_M^* k, \text{ wobei } k \text{ akzeptierende Stoppkonfiguration ist}\}.$$

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *Turing-erkennbar*, falls es eine NTM M gibt mit $L = L(M)$.

Nach Punkt b) dürfen vor und nach der Ausgabe des Funktionswertes noch Überbleibsel der Berechnung stehen. Beispielsweise entspricht die Stoppkonfiguration $aaaqbaabc\#abcba$ der Ausgabe $baabc$ wenn $\Sigma = \{a, b, c\}$. Per Definition werden Endzustände nur für das Erkennen von Sprachen verwendet werden, aber *nicht* für das Berechnen von Funktionen.

Beachte:

- 1) Wir verwenden *partielle* Funktionen, da Turingmaschinen nicht anhalten müssen; für manche Eingaben ist der Funktionswert daher *nicht definiert*.
- 2) Bei berechenbaren Funktionen betrachten wir nur *deterministische* Maschinen, da sonst der Funktionswert nicht eindeutig sein müsste.
- 3) Bei $|\Sigma| = 1$ kann man Funktionen von $(\Sigma^*)^n \rightarrow \Sigma^*$ als Funktionen von $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ auffassen (a^k entspricht k). Wir unterscheiden im folgenden nicht immer explizit zwischen beiden Arten von Funktionen.
- (4) Es gibt *zwei Arten*, auf die eine Turingmaschine ein Eingabewort *verwerfen* kann: entweder sie erreicht eine Stoppkonfiguration mit einem nicht-Endzustand oder sie stoppt nicht.

Beispiel:

Die Funktion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto 2n$$

ist Turing-berechenbar. Wie kann eine Turingmaschine die Anzahl der a 's auf dem Band verdoppeln?

Idee:

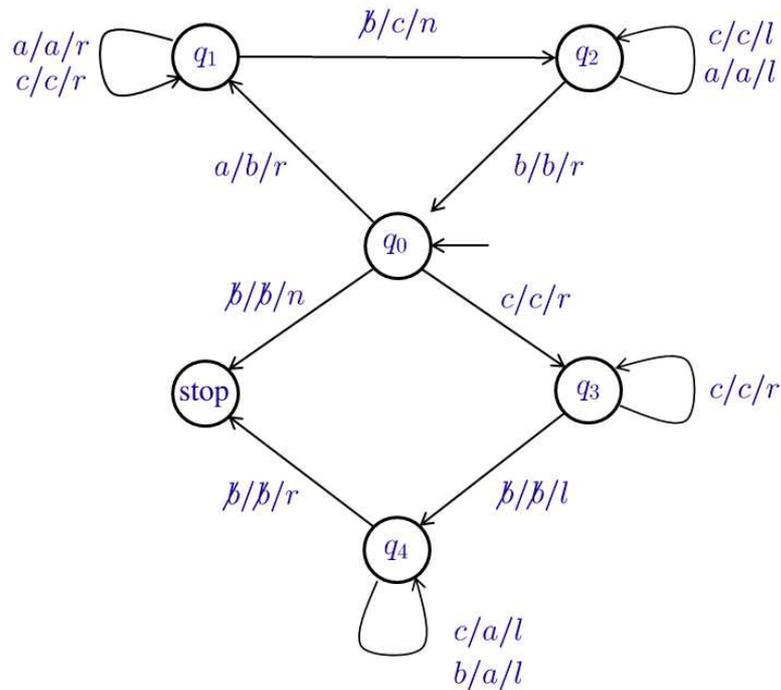
- Ersetze das erste a durch b ,
- laufe nach rechts bis zum ersten blank, ersetze dieses durch c ,
- laufe zurück bis zum zweiten a (unmittelbar rechts vom b), ersetze dieses durch b ,
- laufe nach rechts bis zum ersten blank etc.
- Sind alle a 's aufgebraucht, so ersetze noch die b 's und c 's wieder durch a 's.

Dies wird durch die folgende Übergangsrelation realisiert:

$(q_0, \ \not{a}, \ \not{a}, \ n, \ \text{stop}),$	$2 \cdot 0 = 0$
$(q_0, \ a, \ b, \ r, \ q_1),$	ersetze a durch b (\star)
$(q_1, \ a, \ a, \ r, \ q_1),$	laufe nach rechts über a 's
$(q_1, \ c, \ c, \ r, \ q_1),$	und bereits geschriebene c 's
$(q_1, \ \not{a}, \ c, \ n, \ q_2),$	schreibe weiteres c
$(q_2, \ c, \ c, \ l, \ q_2),$	laufe zurück über c 's und
$(q_2, \ a, \ a, \ l, \ q_2),$	a 's
$(q_2, \ b, \ b, \ r, \ q_0),$	bei erstem b eins nach rechts und weiter wie (\star) oder
$(q_0, \ c, \ c, \ r, \ q_3),$	alle a 's bereits ersetzt
$(q_3, \ c, \ c, \ r, \ q_3),$	laufe nach rechts bis Ende der c 's
$(q_3, \ \not{a}, \ \not{a}, \ l, \ q_4),$	letztes c erreicht
$(q_4, \ c, \ a, \ l, \ q_4),$	ersetze c 's und b 's
$(q_4, \ b, \ a, \ l, \ q_4),$	durch a 's
$(q_4, \ \not{a}, \ \not{a}, \ r, \ \text{stop})$	bleibe am Anfang der erzeugten $2n$ a 's stehen

Beachte, dass “stop” hier einen ganz normalen Zustand bezeichnet. Da er in keinem Tupel der Übergangsrelation ganz links erscheint, ist jede Konfiguration der Form $\alpha\text{stop}\beta$ eine Stoppkonfiguration.

In graphischer Darstellung stellen wir obige Turingmaschine wie folgt dar. Hierbei bedeutet beispielsweise die Kantenbeschriftung $a/b/r$, dass das a auf dem Arbeitsfeld durch b ersetzt wird und sich der Kopf einen Schritt nach rechts bewegt.



Wie bei den endlichen Automaten kennzeichnen wir den Startzustand durch einen eingehenden Pfeil und Endzustände durch einen Doppelkreis. Da obige DTM eine Funktion berechnet (im Gegensatz zu: eine Sprache erkennt), spielen die Endzustände hier jedoch keine Rolle.

Man sieht, dass das Programmieren von Turingmaschinen recht umständlich ist. Wie bereits erwähnt, betrachtet man solche einfachen (und unpraktischen) Modelle, um das Führen von Beweisen zu erleichtern. Wir werden im folgenden häufig nur die Arbeitsweise einer Turingmaschine beschreiben, ohne die Übergangsrelation in vollem Detail anzugeben.

Beispiel:

Die Sprache $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ ist Turing-erkennbar. Die Turingmaschine, die L erkennt, geht wie folgt vor:

- Sie ersetzt das erste a durch a' , das erste b durch b' und das erste c durch c' ;
- Läuft zurück und wiederholt diesen Vorgang;

- Falls dabei ein a rechts von einem b oder c steht, verwirft die TM direkt (indem sie in eine nicht-akzeptierende Stoppkonfiguration wechselt); ebenso, wenn ein b rechts von einem c steht;
- Dies wird solange gemacht, bis nach erzeugtem c' ein β steht.
- Zum Schluß wird zurückgelaufen und überprüft, dass keine unersetzten a oder b übrig geblieben sind.

Eine solche Turingmaschine erkennt tatsächlich L : sie akzeptiert gdw.

1. die Eingabe dieselbe Anzahl a 's wie b 's wie c 's hat (denn es wurde jeweils dieselbe Anzahl ersetzt und danach waren keine a 's, b ' und c 's mehr übrig);
2. in der Eingabe alle a 's vor b 's vor c 's stehen.

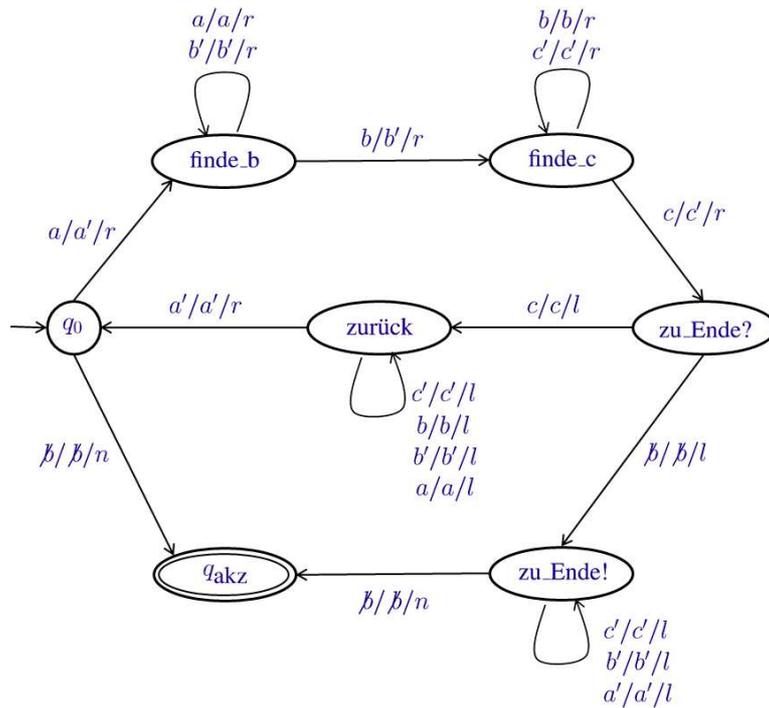
Im Detail definiert man die Turingmaschine M wie folgt:

$$M = (\{q_0, q_{akz}, finde_b, finde_c, zu_Ende_?, zu_Ende_!, zur\ddot{u}ck\}, \\ \{a, b, c\}, \\ \{a, a', b, b', c, c', \beta\}, \\ q_0, \Delta, \{q_{akz}\}) \text{ mit } \Delta =$$

$(q_0,$	$\beta,$	$\beta,$	$N,$	$q_{akz}),$
$(q_0,$	$a,$	$a',$	$R,$	$finde_b),$
$(finde_b,$	$a,$	$a,$	$R,$	$finde_b),$
$(finde_b,$	$b',$	$b',$	$R,$	$finde_b),$
$(finde_b,$	$b,$	$b',$	$R,$	$finde_c),$
$(finde_c,$	$b,$	$b,$	$R,$	$finde_c),$
$(finde_c,$	$c',$	$c',$	$R,$	$finde_c),$
$(finde_c,$	$c,$	$c',$	$R,$	$zu_Ende_?),$
$(zu_Ende_?,$	$c,$	$c,$	$L,$	$zur\ddot{u}ck),$
$(zur\ddot{u}ck,$	$c',$	$c',$	$L,$	$zur\ddot{u}ck),$
$(zur\ddot{u}ck,$	$b,$	$b,$	$L,$	$zur\ddot{u}ck),$
$(zur\ddot{u}ck,$	$b',$	$b',$	$L,$	$zur\ddot{u}ck),$
$(zur\ddot{u}ck,$	$a,$	$a,$	$L,$	$zur\ddot{u}ck),$
$(zur\ddot{u}ck,$	$a',$	$a',$	$R,$	$q_0),$
$(zu_Ende_?,$	$\beta,$	$\beta,$	L	$zu_Ende_!),$
$(zu_Ende_!,$	$c',$	$c',$	$L,$	$zu_Ende_!),$
$(zu_Ende_!,$	$b',$	$b',$	$L,$	$zu_Ende_!),$
$(zu_Ende_!,$	$a',$	$a',$	$L,$	$zu_Ende_!),$
$(zu_Ende_!,$	$\beta,$	$\beta,$	$N,$	$q_{akz})\}$

Beachte: wenn die Maschine z.B. im Zustand $finde_c$ ist und ein a liest, so ist sie in einer Stoppkonfiguration. Da $finde_c$ kein Endzustand ist, handelt es sich um eine verwerfende Stoppkonfiguration. Also verwirft die Maschine, wenn in der Eingabe nach einer Folge von a 's noch ein b erscheint.

In graphischer Darstellung sieht diese Maschine wie folgt aus:



Varianten von Turingmaschinen:

In der Literatur werden verschiedene Versionen von Turingmaschine definiert, die aber alle äquivalent zueinander sind, d.h. dieselben Sprachen erkennen und dieselben Funktionen berechnen. Hier zwei Beispiele:

- Turingmaschinen mit nach links begrenztem und nur nach rechts unendlichem Arbeitsband
- Turingmaschinen mit mehreren Bändern und Schreib-Leseköpfen

Die Äquivalenz dieser Modelle ist ein Indiz für die Gültigkeit der Church-Turing-These.

Wir betrachten das zweite Beispiel genauer und zeigen Äquivalenz zur in Definition 11.1 eingeführten 1-Band-TM.

Definition 11.3 (*k*-Band-TM)

Eine *k*-Band-NTM hat die Form $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$ mit

- $Q, \Sigma, \Gamma, q_0, F$ wie in Definition 11.1 und
- $\Delta \subseteq Q \times \Gamma^k \times \Gamma^k \times \{r, l, n\}^k \times Q$.

Dabei bedeutet $(q, (a_1, \dots, a_k), (b_1, \dots, b_k), (d_1, \dots, d_k), q') \in \Delta$:

- Vom Zustand q aus
- mit a_1, \dots, a_k auf den Arbeitsfeldern der k Bänder

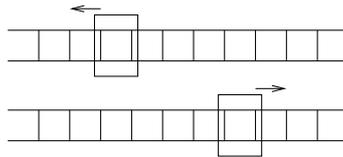
kann M

- das Symbol a_i auf dem i -ten Band durch b_i ersetzen,
- in den Zustand q' gehen und
- die Schreib-Leseköpfe der Bänder entsprechend d_i bewegen.

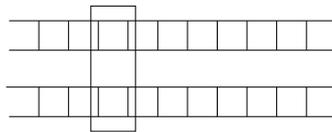
Das erste Band wird (o.B.d.A.) als Ein- und Ausgabeband verwendet.

Beachte:

Wichtig ist hier, dass sich die Köpfe der verschiedenen Bänder unabhängig bewegen können:



Wären die Köpfe gekoppelt, so hätte man im Prinzip nicht mehrere Bänder, sondern ein Band mit mehreren Spuren:



k Spuren erhält man einfach, indem man eine normale NTM (nach Definition 11.1) verwendet, die als Bandalphabet Γ^k statt Γ hat.

Offenbar kann man jede 1-Band-NTM (nach Definition 11.1) durch eine k -Band-NTM ($k > 1$) simulieren, indem man nur das erste Band wirklich verwendet. Der nächste Satz zeigt, dass auch die Umkehrung gilt:

Satz 11.4

Wird die Sprache L durch eine k -Band-NTM erkannt, so auch durch eine 1-Band-NTM.

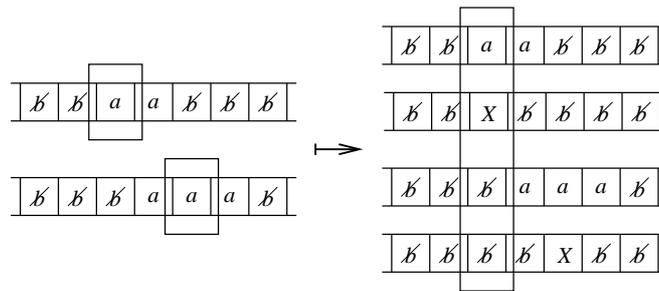
Beweis. Es sei M eine k -Band-NTM. Gesucht ist eine 1-Band-NTM M' mit $L(M) = L(M')$. Wähle ein beliebiges $X \in \Gamma$.

Arbeitsalphabet von M' : $\Gamma^{2k} \cup \Sigma \cup \{b\}$;

- $\Sigma \cup \{b\}$ wird für Eingabe benötigt;
- Γ^{2k} sorgt dafür, dass $2k$ Spuren auf dem Band von M' zur Verfügung stehen.

Idee: Jeweils 2 Spuren kodieren ein Band von M .

- Die erste Spur enthält die Bandbeschriftung.
- Die zweite Spur enthält eine Markierung X (und sonst blanks), die zeigt, wo das Arbeitsfeld des Bandes ist, z.B.



Die 1-Band TM M' macht jeweils mehrere Schritte, um einen einzelnen Schritt von M zu simulieren. Im Detail arbeitet M' wie folgt.

Initialisierung: Zunächst wird die Anfangskonfiguration

$$q_0 a_1 \dots a_m$$

von M' in die Repräsentation der entsprechenden Anfangskonfiguration von M umgewandelt (durch geeignete Übergänge):

\emptyset	\emptyset	a_1	a_2	\dots	a_m	\emptyset	Spur 1 und 2 kodieren
\emptyset	\emptyset	X	\emptyset	\dots	\emptyset	\emptyset	Band 1
\emptyset	\emptyset	\emptyset	\emptyset	\dots	\emptyset	\emptyset	Spur 3 und 4 kodieren
\emptyset	\emptyset	X	\emptyset	\dots	\emptyset	\emptyset	Band 2
\vdots							

Simulation eines Überganges von M' :

- Von links nach rechts suche die mit X markierten Felder. Dabei merke man sich (im Zustand von M') die Symbole, die jeweils über dem X stehen. Außerdem zählt man (im Zustand von M'), wie viele X man schon gelesen hat, um festzustellen, wann das k -te (und letzte) X erreicht ist. Man ermittelt so das aktuelle Tupel (a_1, \dots, a_k) .
- entscheide nichtdeterministisch, welcher Übergang

$$(q, (a_1, \dots, a_k), (b_1, \dots, b_k), (d_1, \dots, d_k), q') \in \Delta$$

von M stattfindet.

- Von rechts nach links gehend ersetze die a_i bei den X -Marken jeweils durch das entsprechende b_i und verschiebe die X -Marken gemäß d_i .
- Bleibe bei der am weitesten links stehenden X -Markierung und gehe in Zustand q' .

In dieser Konstruktion hat M' im Prinzip dieselben Zustände wie M . Also stoppt M auf Eingabe w in akzeptierender Stoppkonfiguration gdw. M' in akzeptierender Stoppkonfiguration stoppt. □

Bemerkung 11.5.

- 1) War M deterministisch, so liefert obige Konstruktion auch eine deterministische 1-Band-Turingmaschine.
- 2) Diese Konstruktion kann auch verwendet werden, wenn man sich für die berechnete Funktion interessiert. Dazu muss man am Schluss (wenn M in Stoppkonfiguration ist) in der Maschine M' noch die Ausgabe geeignet aufbereiten.

Wegen Satz 11.4 und Bemerkung 11.5 können wir von nun an ohne Beschränkung der Allgemeinheit bei der Konstruktion von Turingmaschinen eine beliebige (aber feste) Zahl von Bändern verwenden.

Bei der Definition von Turing-berechenbar haben wir uns von vornherein auf *deterministische* Turingmaschinen beschränkt. Der folgende Satz zeigt, dass man dies auch bei Turing-erkennbaren Sprachen machen kann, ohne an Ausdrucksstärke zu verlieren.

Satz 11.6

Zu jeder NTM gibt es eine DTM, die dieselbe Sprache erkennt.

Beweis. Es sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$ eine NTM. Wegen Satz 11.4 und Bemerkung 11.5 genügt es, eine deterministische 3-Band-Turingmaschine M' zu konstruieren, so dass $L(M) = L(M')$.

Die Maschine M' soll für wachsendes n auf dem dritten Band jeweils alle Berechnungen

$$k_0 \vdash_M k_1 \vdash_M k_2 \vdash_M \dots \vdash_M k_n$$

beginnend mit der Startkonfiguration $k_0 = q_0w$ erzeugen, also erst alle solchen Berechnungen der Länge 1, dann alle der Länge 2, usw.

Die Kontrolle, dass tatsächlich alle solchen Folgen erzeugt werden, wird auf dem zweiten Band vorgenommen. Das erste Band speichert das Eingabewort w damit man stets weiß, was k_0 sein muss.

Genauer: Es sei

$$r = \text{maximale Anzahl von Transitionen in } \Delta \text{ pro festem Paar } (q, a) \in Q \times \Gamma$$

Dies entspricht dem maximalen Verzweigungsgrad der nichtdeterministischen Berechnung und kann direkt aus Δ abgelesen werden.

Eine Indexfolge i_1, \dots, i_n mit $i_j \in \{1, \dots, r\}$ beschreibt dann von k_0 aus für n Schritte die Auswahl der jeweiligen Transition, und somit von k_0 aus eine feste Berechnung

$$k_0 \vdash_M k_1 \vdash_M \dots \vdash_M k_n$$

(Wenn es in einer Konfiguration k_j weniger als i_j mögliche Nachfolgerkonfigurationen gibt, dann beschreibt i_1, \dots, i_n keine Berechnung und wird einfach übersprungen.)

Zählt man alle endlichen Wörter über $\{1, \dots, r\}$ (die nichts anderes sind als die o.g. Indexfolgen) in aufsteigender Länge auf und erzeugt zu jedem Wort $i_1 \dots i_n$ die zugehörige Berechnung, so erhält man eine Aufzählung aller endlichen Berechnungen.

M' realisiert dies auf den drei Bändern wie folgt:

- Auf Band 1 bleibt die Eingabe gespeichert.
- Auf dem zweiten Band werden sukzessive alle Wörter $i_1 \dots i_n \in \{1, \dots, r\}^*$ erzeugt (z.B. durch normales Zählen zur Basis r).
- Für jedes dieser Wörter wird auf dem dritten Band die zugehörige Berechnung erzeugt (wenn sie existiert). Erreicht man hierbei eine akzeptierende Stoppkonfiguration von M , so geht auch M' in eine akzeptierende Stoppkonfiguration.

□

12. Zusammenhang zwischen Turingmaschinen und Grammatiken

Wir zeigen zunächst, dass die *Turing-erkennbaren Sprachen* genau die *Typ-0-Sprachen* sind und klären dann einige verbliebene Fragen zu Typ 0-Sprachen und Typ 1-Sprachen.

Der Zusammenhang zwischen *Typ-0-Sprachen* und *Turing-erkennbaren Sprachen* beruht darauf, dass es eine Entsprechung von Ableitungen einer Typ-0-Grammatik einerseits und Berechnungen von Turingmaschinen andererseits gibt. Beim Übergang von der Turingmaschine zur Grammatik dreht sich allerdings die Richtung um:

- eine akzeptierende Berechnung beginnt mit dem zu akzeptierenden Wort
- eine Ableitung endet mit dem erzeugten Wort

Wir werden im folgenden sehen, wie man diese Schwierigkeit löst.

Satz 12.1

Eine Sprache L gehört zu \mathcal{L}_0 *gdw.* sie Turing-erkennbar ist.

Beweis. „ \Rightarrow “. Es sei $L = L(G)$ für eine Typ-0-Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$. Wir geben eine 2-Band-NTM an, die $L(G)$ erkennt (und nach Satz 11.4 äquivalent zu einer 1-Band-NTM ist).

1. Band: speichert Eingabe w

2. Band: es wird nichtdeterministisch und Schritt für Schritt eine Ableitung von G erzeugt.

Es wird verglichen, ob auf Band 2 irgendwann w (d.h. der Inhalt von Band 1) entsteht. Wenn ja, so geht man in akzeptierende Stoppkonfiguration, sonst werden weitere Ableitungsschritte vorgenommen.

Die Maschine geht dabei wie folgt vor:

- 1) Schreibe S auf Band 2, gehe nach links auf das $\$$ vor S .
- 2) Gehe auf Band 2 nach rechts und wähle (nichtdeterministisch) eine Stelle aus, an der die linke Seite der anzuwendenden Produktion beginnen soll.
- 3) Wähle (nichtdeterministisch) eine Produktion $\alpha \rightarrow \beta$ aus P aus, die angewendet werden soll
- 4) Überprüfe, ob α tatsächlich die Beschriftung des Bandstücks der Länge $|\alpha|$ ab der gewählten Bandstelle ist.
- 5) Falls der Test erfolgreich war, so ersetze α durch β .

Vorher müssen bei $|\alpha| < |\beta|$ die Symbole rechts von α um $|\beta| - |\alpha|$ Positionen nach rechts

bzw. bei $|\alpha| > |\beta|$ um $|\alpha| - |\beta|$ Positionen nach links geschoben werden.

6) Gehe nach links bis zum ersten $\#$ und vergleiche, ob die Beschriftung auf dem Band 1 mit der auf Band 2 übereinstimmt.

7) Wenn ja, so gehe in akzeptierenden Stoppzustand. Sonst fahre fort bei 2).

„ \Leftarrow “. Es sei $L = L(M)$ für eine NTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$.

Wir konstruieren eine Grammatik G , die jedes Wort $w \in L(M)$ wie folgt erzeugt:

1. Phase: Erst wird w mit „genügend vielen“ $\#$ -Symbolen links und rechts davon erzeugt (dies passiert für jedes w , auch für $w \notin L(M)$).

„Genügend viele“ bedeutet dabei: so viele, wie M beim Akzeptieren von w vom Arbeitsband benötigt.

2. Phase: Auf dem so erzeugten Arbeitsband simuliert G die Berechnung von M bei Eingabe w .

3. Phase: War die Berechnung akzeptierend, so erzeuge nochmals das ursprüngliche w .

Damit man in der zweiten Phase das in der dritten Phase benötigte w nicht vergisst, verwendet man als Nichtterminalsymbole Tupel aus

$$(\Sigma \cup \{\#\}) \times \Gamma$$

wobei das Tupel $[a, b]$ zwei Zwecken dient:

- in der ersten Komponente merkt man sich die ursprüngliche Eingabe w und
- in der zweiten Komponente simuliert man die Berechnung (die die Eingabe ja überschreiben kann).

Formale Definition:

$$N = \{S, A, B, E\} \cup Q \cup ((\Sigma \cup \{\#\}) \times \Gamma),$$

wobei

- S, A, B zum Aufbau des Rechenbandes am Anfang,
- E zum Löschen am Schluss,
- Q zur Darstellung des aktuellen Zustandes,
- $\Sigma \cup \{\#\}$ zum Speichern von w und
- Γ zur M -Berechnung

dienen.

Regeln:

1. Phase: Erzeuge w und ein genügend großes Arbeitsband.

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow Bq_0A \\ A &\longrightarrow [a, a]A \text{ für alle } a \in \Sigma \\ A &\longrightarrow B \\ B &\longrightarrow [\mathcal{B}, \mathcal{B}]B \\ B &\longrightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Man erhält also somit für alle $a_1 \dots a_n \in \Sigma^*, k, l, \geq 0$:

$$S \vdash_G^* [\mathcal{B}, \mathcal{B}]^k q_0 [a_1, a_1] \dots [a_n, a_n] [\mathcal{B}, \mathcal{B}]^l$$

2. Phase: simuliert TM-Berechnung in der „zweiten Spur“:

- $p[a, b] \longrightarrow [a, b']q$
falls $(p, b, b', r, q) \in \Delta, a \in \Sigma \cup \{\mathcal{B}\}$
- $[a, c]p[a', b] \longrightarrow q[a, c][a', b']$
falls $(p, b, b', l, q) \in \Delta, a, a' \in \Sigma \cup \{\mathcal{B}\}, c \in \Gamma$
- $p[a, b] \longrightarrow q[a, b']$
falls $(p, b, b', n, q) \in \Delta, a \in \Sigma \cup \{\mathcal{B}\}$

Beachte:

Da wir in der ersten Phase genügend viele Blanks links und rechts von $a_1 \dots a_n$ erzeugen können, muss in der zweiten Phase das „Nachschieben“ von Blanks am Rand nicht mehr behandelt werden.

3. Phase: Aufräumen und erzeugen von $a_1 \dots a_n$, wenn die TM akzeptiert hat

- $q[a, b] \longrightarrow EaE$ für $a \in \Sigma, b \in \Gamma$
 $q[\mathcal{B}, b] \longrightarrow E$ für $b \in \Gamma$
falls $q \in F$ und es keine Transition der Form $(q, b, \dots, \dots) \in \Delta$ gibt (d.h. akzeptierende Stoppkonfiguration erreicht)
- $E[a, b] \longrightarrow aE$ für $a \in \Sigma, b \in \Gamma$
(Aufräumen nach rechts)
- $[a, b]E \longrightarrow Ea$ für $a \in \Sigma, b \in \Gamma$
(Aufräumen nach links)
- $E[\mathcal{B}, b] \longrightarrow E$ für $b \in \Gamma$
(Entfernen des zusätzlich benötigten Arbeitsbandes nach rechts)
- $[\mathcal{B}, b]E \longrightarrow E$ für $b \in \Gamma$
(Entfernen des zusätzlich benötigten Arbeitsbandes nach links)
- $E \longrightarrow \varepsilon$

Man sieht nun leicht, dass für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$w \in L(G) \text{ gdw. } M \text{ akzeptiert } w. \quad \square$$

Von den Sprachklassen aus der Chomsky-Hierarchie sind nun alle bis auf \mathcal{L}_1 durch geeignete Automaten/Maschinenmodelle charakterisiert. Im folgenden identifizieren wir auch ein geeignetes Maschinenmodell für \mathcal{L}_1 . Nach Definition enthalten monotone (Typ 1) Grammatiken nur Regeln, die *nicht verkürzend* sind, also Regeln $u \rightarrow v$ mit $|v| \geq |u|$. Wenn man ein Terminalwort w mit einer solchen Grammatik ableitet, so wird die Ableitung also niemals ein Wort enthalten, dessen Länge größer als $|w|$ ist.

Diese Beobachtung legt folgende Modifikation von Turingmaschinen nahe: die Maschinen dürfen nicht mehr als $|w|$ Zellen des Arbeitsbandes verwenden, also nur auf dem Bandabschnitt arbeiten, auf dem anfangs die Eingabe steht. Um ein Überschreiten der dadurch gegebenen Bandgrenzen zu verhindern, verwendet man Randmarker ϕ , $\$$.

Definition 12.2 (linear beschränkter Automat)

Ein *linear beschränkter Automat (LBA)* ist eine NTM $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$, so dass

- $\$, \phi \in \Gamma \setminus \Sigma$
- Übergänge (q, ϕ, \dots) sind nur in der Form (q, ϕ, ϕ, r, q') erlaubt (linker Rand darf nicht überschritten werden).
- Übergänge $(q, \$, \dots)$ sind nur in der Form $(q, \$, \$, l, q')$ erlaubt.
- ϕ und $\$$ dürfen nicht geschrieben werden.

Ein gegebener LBA \mathcal{A} erkennt die Sprache

$$L(\mathcal{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \phi q_0 w \$ \vdash^* k, \text{ wobei } k \text{ akzeptierende Stoppkonfiguration ist}\}.$$

Offensichtlich muß auch ein LBA nicht unbedingt terminieren. Wie bei Turingmaschinen gilt nach der obigen Definition: terminiert ein LBA \mathcal{A} auf einer gegebenen Eingabe w nicht, so ist $w \notin L(\mathcal{A})$.

Korollar 12.3

Eine Sprache L gehört zu \mathcal{L}_1 gdw. sie von einem LBA erkannt wird.

Beweis.

„ \Rightarrow “: Verwende die Konstruktion aus dem Beweis von Satz 12.1.

Da die Produktionen von monotonen Grammatiken nichtkürzend sind (mit Ausnahme $S \rightarrow \varepsilon$), muss man auf dem zweiten Band nur ableitbare Wörter bis zur Länge $|w|$ erzeugen (aus längeren kann nie mehr w abgeleitet werden). Daher kommt man mit $|w|$ vielen Feldern aus.

Beachte:

Zwei Bänder liefern nicht ein doppelt so langes Band, sondern ein größeres Arbeitssalphabet, vergleiche Beweis von Satz 11.4.

„ \Leftarrow “: Durch Modifikation der Beweisidee von Satz 12.1 gelingt es, zu einem LBA eine Grammatik zu konstruieren, die nur nichtkürzende Regeln hat.

Idee:

Da man mit $|w|$ Arbeitsfeldern auskommt, muss man keine $[\cancel{b}, \cancel{b}]$ links und rechts von w erzeugen. Dadurch fallen dann auch die folgenden kürzenden Regeln weg:

$$E[\cancel{b}, \cancel{b}] \longrightarrow E$$

$$[\cancel{b}, \cancel{b}]E \longrightarrow E$$

Es gibt allerdings noch einige technische Probleme:

- Man muss die Randmarker $\cancel{\phi}$ und $\cancel{\$}$ einführen und am Schluss löschen.
- Man muss das Hilfssymbol E und den Zustand q löschen.

Lösung:

Führe die Symbole $\cancel{\phi}$, $\cancel{\$}$ sowie E und den Zustand q nicht als zusätzliche Symbole ein, sondern kodiere sie in die anderen Symbole hinein.

z.B. statt $[a, b]q[a', b'] [a'', b'']$ verwende $[a, b][q, a', b'] [a'', b'']$.

Basierend auf dieser Idee kann man die Konstruktion aus dem Beweis von Satz 12.1 so modifizieren, dass eine monotone Grammatik erzeugt wird.

□

Wir analysieren nun die Abschlusseigenschaften von Typ 0- und Typ 1-Sprachen und betrachten die Entscheidbarkeit und Komplexität von Wortproblem, Leerheitsproblem und Äquivalenzproblem. Wir beginnen mit den Typ 0-Sprachen.

Satz 12.4

- 1) \mathcal{L}_0 ist abgeschlossen unter $\cup, \cdot, *$ und \cap .
- 2) \mathcal{L}_0 ist nicht abgeschlossen unter Komplement.

Beweis.

- 1) Für die regulären Operationen $\cup, \cdot, *$ zeigt man dies im Prinzip wie für \mathcal{L}_2 durch Konstruktion einer entsprechenden Grammatik.

Damit sich die Produktionen der verschiedenen Grammatiken nicht gegenseitig beeinflussen, genügt es allerdings nicht mehr, nur die Nichtterminalsymbole der Grammatiken disjunkt zu machen.

Zusätzlich muss man die Grammatiken in die folgende Form bringen:

Die Produktionen sind von der Form

$$\begin{array}{ll} u \longrightarrow v & \text{mit } u \in N_i^+ \text{ und } v \in N_i^* \\ X_a \longrightarrow a & \text{mit } X_a \in N_i \text{ und } a \in \Sigma \end{array}$$

Für den Schnitt verwendet man Turingmaschinen:

Die NTM für $L_1 \cap L_2$ verwendet zwei Bänder und simuliert zunächst auf dem ersten die Berechnung der NTM für L_1 und dann auf dem anderen die der NTM für L_2 .

Wenn beide zu akzeptierenden Stoppkonfigurationen der jeweiligen Turingmaschinen führen, so geht die NTM für $L_1 \cap L_2$ in eine akzeptierende Stoppkonfiguration.

Beachte:

Es kann sein, dass die NTM für L_1 auf einer Eingabe w nicht terminiert, die NTM für $L_1 \cap L_2$ also gar nicht dazu kommt, die Berechnung der NTM für L_2 zu simulieren. Aber dann ist ja w auch nicht in $L_1 \cap L_2$.

- 2) Wir werden später sehen, dass Turing-erkennbare Sprachen nicht unter Komplement abgeschlossen sind (Satz 17.6). \square

Wir werden später außerdem zeigen, dass für Turing-erkennbaren Sprachen (und damit für \mathcal{L}_0) das Wortproblem, Leerheitsproblem und Äquivalenzproblem unentscheidbar sind (Sätze 15.5, 15.7, 15.8). Die Begriffe "entscheidbar" und "unentscheidbar" werden wir in Kürze formal definieren. Intuitiv bedeutet Unentscheidbarkeit, dass es keinen Algorithmus gibt, der das Problem löst.

Satz 12.5

Für \mathcal{L}_0 sind das Leerheitsproblem, das Wortproblem und das Äquivalenzproblem unentscheidbar.

Wir wenden uns nun den Typ 1-Sprachen zu und beginnen mit den Abschlußeigenschaften. Genauso wie die Typ 3-Sprachen sind die Typ 1-Sprachen unter allen betrachteten Operationen abgeschlossen.

Satz 12.6

\mathcal{L}_1 ist abgeschlossen unter $\cup, \cdot, *, \cap$ und Komplement.

Beweis. Für $\cup, \cdot, *$ und \cap verwende Grammatiken bzw. LBAs, analog zu \mathcal{L}_0 .

Komplement: der Beweis ist schwierig und wird an dieser Stelle nicht geführt. Abschluß unter Komplement von \mathcal{L}_1 war lange ein offenes Problem und wurde dann in den 1980ern unabhängig von zwei Forschern bewiesen (Immerman und Szelepcsényi). \square

Satz 12.7

Für monotone Grammatiken sind

1. das Wortproblem entscheidbar
2. das Leerheitsproblem und das Äquivalenzproblem unentscheidbar.

Beweis. (1) Da die Produktionen von monotonen Grammatiken (bis auf Spezialfall $S \rightarrow \varepsilon$) nicht verkürzend sind, muss man zur Entscheidung „ $w \in L(G)$?“ nur systematisch die Menge aller aus S ableitbaren Wörter aus $(N \cup \Sigma)^*$ der Länge $\leq |w|$

erzeugen und dann nachsehen, ob w in dieser Menge ist. Dieses Verfahren terminiert, da es nur *endlich viele* solche Wörter gibt.

(2) Werden wir später beweisen (Satz 16.6).

□

Es ist ein sehr schwieriges offenes Forschungsproblem, ob deterministische LBAs genauso stark wie nichtdeterministische LBAs sind.

13. LOOP-Programme und WHILE-Programme

In diesem Abschnitt betrachten wir Berechnungsmodelle, die an imperative Programmiersprachen angelehnt, aber auf wesentliche Elemente reduziert sind. Dies dient zweierlei Zweck: erstens werden wir eine abstrakte Programmiersprache identifizieren, die dieselbe Berechnungsstärke wie Turingmaschinen aufweist. Dies ist ein gutes Indiz für die Gültigkeit der Church-Turing These und zeigt, dass es sinnvoll ist, Berechenbarkeit anhand von Turingmaschinen (anstelle von "echten Programmiersprachen") zu studieren. Zweitens erlauben uns die erzielten Resultate, in präziser Weise diejenigen Elemente von imperativen Programmiersprachen zu identifizieren, die für die Berechnungsvollständigkeit verantwortlich sind. Wir trennen sie damit vom bloßem "Beiwerk", das zwar angenehm für die Programmierung ist, aber in Bezug auf die Berechnungsstärke eigentlich verzichtbar.

Wir definieren zunächst eine sehr einfache Programmiersprache LOOP und erweitern sie in einem zweiten Schritt zur Programmiersprache WHILE. Wir betrachten in diesem Abschnitt nur Funktionen f der Form

$$f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}.$$

Dies entspricht dem Spezialfall $|\Sigma| = 1$ bei Wortfunktionen, ist aber keine echte Einschränkung, da es berechenbare Kodierungsfunktionen π gibt, die Wörter über beliebigen Alphabeten Σ als natürliche Zahlen darstellen (und umgekehrt), d.h. bijektive Abbildungen $\pi : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$, so dass sowohl π als auch die inverse Funktion π^{-1} berechenbar sind.

LOOP-Programme

Wir betrachten nun eine einfache imperative Programmiersprache, die genau die primitiv rekursiven Funktionen berechnen kann.

LOOP-Programme sind aus den folgenden Komponenten aufgebaut:

- Variablen: x_0, x_1, x_2, \dots
- Konstanten: $0, 1, 2, \dots$ (also die Elemente von \mathbb{N})
- Trennsymbole: $;$ und $:=$
- Operationssymbole: $+$ und $-$
- Schlüsselwörter: LOOP, DO, END

Die folgende Definition beschreibt die wohlgeformten LOOP-Programme im Detail.

Definition 13.1 (Syntax LOOP)

Die *Syntax* von LOOP-Programmen ist induktiv definiert:

- 1) Jede Wertzuweisung

$$x_i := x_j + c \text{ und}$$

$$x_i := x_j \overset{\cdot}{-} c$$

für $i, j \geq 0$ und $c \in \mathbb{N}$ ist ein LOOP-Programm.

- 2) Falls P_1 und P_2 LOOP-Programme sind, so ist auch

$$P_1; P_2 \quad (\text{Hintereinanderausführung})$$

ein LOOP-Programm.

- 3) Falls P ein LOOP-Programm ist und $i \geq 0$, so ist auch

$$\text{LOOP } x_i \text{ DO } P \text{ END} \quad (\text{Loop-Schleife})$$

ein LOOP-Programm.

Die *Semantik* dieser einfachen Sprache ist wie folgt definiert:

Bei einem LOOP-Programm, das eine k -stellige Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ berechnen soll:

- werden die Variablen x_1, \dots, x_k mit den Eingabewerten n_1, \dots, n_k vorbesetzt;
- erhalten alle anderen Variablen eingangs den Wert 0;
- ist die Ausgabe der Wert der Variable x_0 nach Ausführung des Programms.

Die einzelnen Programmkonstrukte haben die folgende Bedeutung:

- 1) $x_i := x_j + c$

Der neue Wert der Variablen x_i ist die Summe des alten Wertes von x_j und c .

$$x_i := x_j \overset{\cdot}{-} c$$

Der neue Wert der Variablen x_i ist der Wert von x_j minus c , falls dieser Wert ≥ 0 ist und 0 sonst (das nennt man auch *modifizierte Subtraktion*, angezeigt durch den Punkt über dem Minuszeichen).

- 2) $P_1; P_2$

Hier wird zunächst P_1 und dann P_2 ausgeführt.

- 3) LOOP x_i DO P END

Das Programm P wird so oft ausgeführt, wie der Wert von x_i zu Beginn angibt. Änderungen des Wertes von x_i während der Ausführung von P haben keinen Einfluss auf die Anzahl der Schleifendurchläufe.

LOOP-Programme lassen zunächst nur Addition und Subtraktion von Konstanten zu, aber nicht von Variablen. Wir werden aber sehen, dass man letzteres ebenfalls ausdrücken kann. Loop-Schleifen entsprechen einer einfachen Variante der aus vielen Programmiersprachen bekannten For-Schleifen.

Definition 13.2 (LOOP-berechenbar)

Die Funktion

$$f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$$

heißt *LOOP-berechenbar*, falls es ein LOOP-Programm P gibt, das f in dem folgenden Sinne berechnet:

- *Gestartet* mit n_1, \dots, n_k in den Variablen x_1, \dots, x_k (und 0 in den restlichen Variablen)
- *stoppt* P mit dem Wert $f(n_1, \dots, n_k)$ in der Variablen x_0 .

Beispiel:

Die Additionsfunktion ist LOOP-berechenbar:

```
x0 := x1 + 0;
LOOP x2 DO x0 := x0 + 1 END
```

Basierend auf der Additionsfunktion ist auch die Multiplikationsfunktion LOOP-berechenbar. Folgendes Programm steht natürlich eigentlich für die Schachtelung zweier Loop-Schleifen:

```
LOOP x2 DO x0 := x0 + x1 END
```

Man nutzt hier aus, dass x_0 Eingangs den Wert 0 hat.

Einige andere Programmkonstrukte typischer imperativer Programmiersprachen lassen sich mittels Loop-Schleifen simulieren. Wir betrachten zwei Beispiele:

- Absolute Wertzuweisungen: $x_i := c$ wird simuliert durch

```
LOOP xi DO xi := xi - 1 END;
xi := xi + c
```

- IF $x = 0$ THEN P END kann simuliert werden durch:

```
y := 1;
LOOP x DO y := 0 END;
LOOP y DO P END
```

wobei y eine neue Variable ist, die nicht in P vorkommt ist.

Im folgenden verwenden wir diese zusätzlichen Konstrukte sowie LOOP-berechenbare arithmetische Operationen o.B.d.A. direkt in LOOP-Programmen. Gemeint ist dann natürlich das LOOP-Programm, dass man durch Ersetzen der verwendeten Konstrukte und Operationen durch die definierenden LOOP-Programme erhält.

Beispiel: Die ganzzahlige Divisionsfunktion ist LOOP-berechenbar:

```
LOOP x1 DO
  x3 := x3 + x2;
  IF x3 - x1 = 0 THEN x0 := x0 + 1 END
END
```

Man nutzt hier aus, dass sowohl x_0 als auch die Hilfsvariable x_3 eingangs den Wert 0 haben. Die Bedingung $x_3 - x_1 = 0$ verwenden wir zum Testen von $x_1 \geq x_3$. Letzteres könnte man also auch o.B.d.A. als Bedingung innerhalb des IF-Konstruktes zulassen.

Im Gegensatz zu Turing-Maschinen terminieren LOOP-Programme offensichtlich immer, da für jede Schleife eine feste Anzahl von Durchläufen durch den anfänglichen Wert der Schleifenvariablen festgelegt wird. Daher sind alle durch LOOP-Programme berechneten Funktionen total. Es folgt sofort, dass *nicht* jede Turing-berechenbare Funktion auch LOOP-berechenbar ist. Wie aber steht es mit der LOOP-berechenbarkeit totaler Funktionen? Das folgende Resultat zeigt, LOOP-Programme auch bezüglich solcher Funktionen nicht berechnungsvollständig sind.

Satz 13.3

Es gibt totale berechenbare Funktionen, die nicht LOOP-berechenbar sind.

Beweis. Wir definieren die Länge von LOOP-Programmen induktiv über deren Aufbau:

- 1) $|x_i := x_j + c| := i + j + c + 1$
 $|x_i := x_j - c| := i + j + c + 1$
- 2) $|P; Q| := |P| + |Q| + 1$
- 3) $|\text{LOOP } x_i \text{ DO } P \text{ END}| := |P| + i + 1$

Für eine gegebene Länge n gibt es nur endlich viele LOOP-Programme dieser Länge: neben der Programmlänge ist mit obiger Definition auch die Menge der möglichen vorkommenden Variablen und Konstantensymbole beschränkt. Deshalb ist die folgende Funktion total:

$$f(x, y) := 1 + \max\{g(y) \mid g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ wird von einem LOOP-Programm der Länge } x \text{ berechnet}\}$$

Behauptung 1:

Die Funktion

$$d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } z \mapsto f(z, z)$$

ist nicht LOOP-berechenbar, denn:

Sei P ein LOOP-Programm, das d berechnet und sei $n = |P|$.

Wir betrachten $d(n) = f(n, n)$. Nach Definition ist $f(n, n)$ größer als jeder Funktionswert, den ein LOOP-Programm der Länge n bei Eingabe n berechnet. Dies widerspricht der Tatsache, dass d von P berechnet wird.

Behauptung 2:

Die Funktion d ist Turing-berechenbar, denn:

Bei Eingabe z kann eine TM die *endlich vielen* LOOP-Programme der Länge z aufzählen und jeweils auf die Eingabe z anwenden (wir werden später noch formal beweisen, dass

eine TM jedes LOOP-Programm simulieren kann). Da alle diese Aufrufe terminieren, kann man in endlicher Zeit den maximalen so erhaltenen Funktionswert berechnen (und dann um eins erhöhen). \square

Die im Beweis von Satz 13.3 angegebene Funktion ist unter Bezugnahme auf LOOP-Programme definiert und daher eher technischer Natur. Eine prominente Funktion, die ebenfalls nicht durch LOOP-Programme berechenbar ist, deren Definition sich aber nicht auf LOOP-Programme bezieht, ist die sogenannte *Ackermannfunktion* A , die wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} A(0, y) &:= y + 1 \\ A(x + 1, 0) &:= A(x, 1) \\ A(x + 1, y + 1) &:= A(x, A(x + 1, y)) \end{aligned}$$

Es handelt sich hier um eine geschachtelte Induktion: in der letzten Zeile wird der Wert für das zweite Argument durch die Funktion selbst berechnet. Intuitiv ist diese Funktion wohldefiniert, da in jedem Schritt entweder das erste Argument verringert wird oder gleich bleibt, wobei dann aber das zweite Argument verringert wird. Ein formaler, induktiver Beweis der Wohldefiniertheit ist nicht schwierig.

Man kann leicht zeigen, dass A Turing-berechenbar ist (zum Beispiel, indem man die Definition von A direkt in eine rekursive Funktion in einer beliebigen Programmiersprache "übersetzt"). Der Beweis, dass A nicht LOOP-berechenbar ist, beruht auf einem ähnlichen Argument wie der Beweis von Satz 13.3: die Funktionswerte der Ackermannfunktion *wachsen schneller* als bei jeder LOOP-berechenbaren Funktion. Die Beweisdetails sind allerdings etwas technischer, siehe [Schö97].

WHILE-Programme

Wir erweitern LOOP-Programme nun um eine *While-Schleife* und erhalten so WHILE-Programme. Die While-Schleife unterscheidet sich von der Loop-Schleife dadurch, dass die Anzahl der Durchläufe nicht von Anfang an feststeht. Dieser Unterschied ist fundamental, denn im Gegensatz zu LOOP-Programmen stellen sich WHILE-Programme als berechnungsvollständig heraus. Intuitiv ist es also nicht möglich, eine berechnungsvollständige Programmiersprache allein auf For-Schleifen aufzubauen, wohingegen While-Schleifen ausreichend sind (wir werden noch sehen, dass sich For-Schleifen mittels While-Schleifen ausdrücken lassen).

Definition 13.4 (Syntax von WHILE-Programmen)

Die Syntax von WHILE-Programmen enthält alle Konstrukte in der Syntax von LOOP-Programmen und zusätzlich

- 4) Falls P ein WHILE-Programm ist und $i \geq 0$, so ist auch

$$\text{WHILE } x_i \neq 0 \text{ DO } P \text{ END} \quad (\textit{While-Schleife})$$

ein WHILE-Programm.

Die *Semantik* dieses Konstrukts ist wie folgt definiert:

- Das Programm P wird solange iteriert, bis x_i den Wert 0 erhält.
- Geschieht das nicht, so terminiert diese Schleife nicht.

Offensichtlich müssen WHILE-Programme im Gegensatz zu LOOP-Programmen nicht unbedingt terminieren. Man könnte bei der Definition der WHILE-Programme auf das LOOP-Konstrukt verzichten, da es durch WHILE simulierbar ist:

LOOP x DO P END

kann simuliert werden durch:

$y := x + 0;$
 WHILE $y \neq 0$ DO $y := y - 1; P$ END

wobei y eine neue Variable ist.

Definition 13.5 (WHILE-berechenbar)

Eine (partielle) k -stellige Funktion $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ heißt *WHILE-berechenbar*, falls es ein WHILE-Programm P gibt, das f in dem folgenden Sinne berechnet:

- *Gestartet* mit n_1, \dots, n_k in den Variablen x_1, \dots, x_k (und 0 in den restlichen Variablen)
- *stoppt* P mit dem Wert $f(n_1, \dots, n_k)$ in der Variablen x_0 , falls dieser Wert definiert ist.
- Sonst stoppt P nicht.

Beispiel:

Die Funktion

$$f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \text{ mit } (x, y) \mapsto \begin{cases} x - y & \text{falls } x \geq y \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist WHILE-berechenbar durch das folgende Programm:

```

WHILE  $x_2 \neq 0$  DO
  IF  $x_1 \neq 0$  THEN
     $x_1 := x_1 - 1;$ 
     $x_2 := x_2 - 1;$ 
  END
END;
 $x_0 := x_1$ 
    
```

Satz 13.6

Jede WHILE-berechenbare Funktion ist Turing-berechenbar.

Beweisskizze. Sei P ein WHILE-Programm, das eine k -stellige Funktion berechnet. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass alle Variablen x_0, \dots, x_k auch wirklich in P vorkommen. Wir zeigen per Induktion über den Aufbau von Q , dass es zu jedem Teilprogramm Q von P eine Mehrband-DTM M_Q gibt, die in folgendem Sinne Q entspricht:

- Wenn ℓ der maximale Index ist, so dass Q die Variable x_ℓ verwendet und die Bänder 1 bis $\ell + 1$ von M_Q eingangs die Werte der Variablen x_0, \dots, x_ℓ vor Ausführung des Teilprogrammes Q enthalten,
- dann terminiert M_Q gdw. das Teilprogramm Q auf den gegebenen Variablenwerten terminiert und
- wenn M_Q terminiert, dann finden sich danach auf den Bändern 1 bis $\ell + 1$ die Werte der Variablen x_0, \dots, x_ℓ nach Ausführung des Teilprogrammes Q .

Weitere Arbeitsbänder werden nicht verwendet. Die Induktion liefert schliesslich eine DTM M_P für P selbst. Man kann M_P nun leicht in eine DTM M umwandeln, die im Sinne von Definition 11.2 dieselbe Funktion wie P berechnet:

- Zunächst wird der Inhalt $w_1 \# w_2 \# \dots \# w_k$ des ersten Bandes gelesen und w_1 auf Band 2 geschrieben, w_2 auf Band 3, usw. Danach wird Band 1 gelöscht (entspricht der Initialisierung der Variablen x_0 mit 0).
- Nun wird M_P gestartet.
- Wenn M_P terminiert, wird der Schreib-Lesekopf auf Band 1 ganz an das linke Ende bewegt (denn die Ausgabe muss ja nach Definition 11.2 direkt beim Kopf beginnen).

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass in P alle Loop-Schleifen durch While-Schleifen ersetzt wurden. Die Konstruktion der DTMs M_Q ist nun wie folgt:

- Sei Q von der Form $x_i := x_j + c$ oder $x_i := x_j - c$. Es ist leicht, die benötigten Turingmaschinen M_Q zu konstruieren.
- Sei Q von der Form $Q_1; Q_2$. Man erhält die Maschine M_Q durch Hintereinanderausführung von M_{Q_1} und M_{Q_2} .
- Sei Q von der Form WHILE $x_i \neq 0$ DO Q' END. Die Turingmaschine M_Q prüft zunächst, ob Band $i + 1$ leer ist (was $x_i = 0$ entspricht). Ist dies der Fall, so terminiert M_Q . Andernfalls wird $M_{Q'}$ gestartet und danach von vorn begonnen.

□

Satz 13.7

Jede Turing-berechenbare Funktion ist WHILE-berechenbar.

Beweisskizze. Um diesen Satz zu beweisen, kodieren wir Konfigurationen von Turingmaschinen, dargestellt als Wörter der Form

$$\alpha q \beta \text{ für } \alpha, \beta \in \Gamma^* \text{ und } q \in Q,$$

in drei natürliche Zahlen.

Diese werden dann in den drei Programmvariablen x_1, x_2, x_3 des WHILE-Programms gespeichert:

- x_1 repräsentiert α ,
- x_2 repräsentiert q ,
- x_3 repräsentiert β .

Es sei o.B.d.A. $\Gamma = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $Q = \{q_0, \dots, q_k\}$ mit q_0 Startzustand, d.h. wir können Alphabetssymbole und Zustände über ihren Index als natürliche Zahl beschreiben.

Die Konfiguration

$$a_{i_1} \dots a_{i_l} q_m a_{j_1} \dots a_{j_r}$$

wird dargestellt als

$$x_1 = (i_1, \dots, i_l)_b \quad := \sum_{\nu=1}^l i_\nu \cdot b^{l-\nu}$$

$$x_2 = m$$

$$x_3 = (j_r, \dots, j_1)_b \quad := \sum_{\rho=1}^r j_\rho \cdot b^{\rho-1},$$

wobei $b = |\Gamma| + 1$ ist, d.h.

- $a_{i_1} \dots a_{i_l}$ repräsentiert x_1 in b -ärer Zahlendarstellung und
- $a_{j_r} \dots a_{j_1}$ (Reihenfolge!) repräsentiert x_3 in b -ärer Zahlendarstellung.

Ist beispielsweise $b = |\Gamma| + 1 = 10$, also $\Gamma = \{a_1, \dots, a_9\}$, so wird die Konfiguration

$$a_4 a_2 a_7 a_1 q_3 a_1 a_8 a_3 \quad \text{dargestellt durch} \quad x_1 = 4271, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 381.$$

Wir brauchen $b = |\Gamma| + 1$ statt $b = |\Gamma|$, da wir die Ziffer 0 nicht verwenden können: die unterschiedlichen Strings a_0 und $a_0 a_0$ hätten die Kodierungen 0 und 00, also dieselbe Zahl.

Die elementaren Operationen auf Konfigurationen, die zur Implementierung von Berechnungsschritten der simulierten TM benötigt werden, lassen sich mittels einfacher arithmetischer Operationen realisieren:

Herauslesen des aktuellen Symbols a_{j_1}

Ist $x_3 = (j_r, \dots, j_1)_b$, so ist $j_1 = x_3 \bmod b$.

Ändern dieses Symbols zu a_j

Der neue Wert von x_3 ist $(j_r, \dots, j_2, j)_b = \text{div}((j_r, \dots, j_2, j_1)_b, b) \cdot b + j$

Verschieben des Schreib-Lesekopfes

kann durch ähnliche arithmetische Operationen realisiert werden.

All diese Operationen sind offensichtlich WHILE-berechenbar (sogar LOOP!).

Das WHILE-Programm, welches die gegebene DTM simuliert, arbeitet wie folgt:

- 1) Aus der Eingabe wird die Kodierung der Startkonfiguration der DTM in den Variablen x_1, x_2, x_3 erzeugt.

Wenn also beispielsweise eine binäre Funktion berechnet werden soll und die Eingabe $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$ ist, so muß die Startkonfiguration $q_0aaa\cancel{b}aaaaa$ erzeugt werden, repräsentiert durch $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 111112111$ wenn $a_1 = a$ und $a_2 = \cancel{b}$.

- 2) In einer WHILE-Schleife wird bei jedem Durchlauf ein Schritt der TM-Berechnung simuliert (wie oben angedeutet)

- In Abhängigkeit vom aktuellen Zustand (Wert von x_2) und
- dem gelesenen Symbol, d.h. von $x_3 \bmod b$
- wird mit den oben dargestellten arithmetischer Operationen das aktuelle Symbol verändert und
- der Schreib-Lesekopf bewegt.

Die WHILE-Schleife terminiert, wenn der aktuelle Zustand zusammen mit dem gelesenen Symbol keinen Nachfolgezustand hat.

All dies ist durch einfache (WHILE-berechenbare) arithmetische Operationen realisierbar.

- 3) Aus dem Wert von x_3 nach Terminierung der WHILE-Schleife wird der Ausgabe wert herausgelesen und in die Variable x_0 geschrieben.

Dazu braucht man eine weitere WHILE-Schleife: starte mit $x_0 = 0$; extrahiere wiederholt Symbole aus x_3 ; solange es sich dabei um a handelt, inkrementiere x_0 ; sobald ein anderes Symbol gefunden wird oder x_3 erschöpft ist, gib den Wert von x_0 zurück. \square

14. Primitiv rekursive Funktionen und μ -rekursive Funktionen

Sowohl die LOOP-berechenbaren Funktionen als auch die WHILE-berechenbaren Funktionen lassen sich auch auf gänzlich andere Weise definieren, wobei nicht der Mechanismus der Berechnung, sondern die Funktion selbst in den Mittelpunkt gestellt wird. Genauer gesagt betrachten wir die Klasse der sogenannten primitiv rekursiven Funktionen, die sich als identisch zu den LOOP-berechenbaren Funktionen herausstellen, und die Klasse der μ -rekursiven Funktionen, die sich als identisch zu den WHILE-berechenbaren Funktionen herausstellen. Beide Klassen waren historisch unter den ersten betrachteten Berechnungsmodellen und spielen in der Theorie der Berechenbarkeit und der Komplexitätstheorie noch heute eine wichtige Rolle. Insbesondere kann man sie als mathematisches Modell von funktionalen Programmiersprachen auffassen. Auch in diesem Kapitel betrachten wir ausschliesslich k -stellige Funktionen $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$.

Primitiv Rekursive Funktionen

Die Klasse der *primitiv rekursiven Funktionen* besteht aus den Funktionen, die man aus den folgenden *Grundfunktionen* durch Anwenden der folgenden Operationen erhält.

Grundfunktionen:

1. Konstante Nullfunktionen null_k beliebiger Stelligkeit $k \geq 0$, also z.B. die dreistellige Funktion null_3 mit $\text{null}_3(x_1, x_2, x_3) = 0$ für alle x_1, x_2, x_3 .
2. Projektionsfunktionen $\text{proj}_{k \rightarrow i}$ beliebiger Stelligkeit k auf das i -te Argument, $1 \leq i \leq k$, z.B. die dreistellige Funktion $\text{proj}_{3 \rightarrow 1}$ für die Projektion auf das erste Argument, also $\text{proj}_{3 \rightarrow 1}(x_1, x_2, x_3) = x_1$ für alle x_1, x_2, x_3 .
3. Die einstellige Nachfolgerfunktion succ .

Operationen:

1. Komposition (Einsetzung) von Funktionen.

Genauer gesagt entsteht eine k -stellige Funktion f aus k -stelligen Funktionen h_1, \dots, h_n unter Anwendung einer n -stelligen Funktion g wenn

$$f(x_1, \dots, x_k) = g(h_1(x_1, \dots, x_k), \dots, h_n(x_1, \dots, x_k))$$

2. Primitive Rekursion.

Primitive Rekursion bedeutet hier einen rekursiven Abstieg über das letzte Funktionsargument, also darf $f(\dots, n+1)$ definiert werden unter Verwendung von $f(\dots, n)$. Um das etwas präziser zu machen, sei g eine k -stellige Funktion und

h eine $k + 2$ -stellige Funktion. Dann entsteht die $k + 1$ -stellige Funktion f per primitiver Rekursion aus g und h wenn

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_k, 0) &= g(x_1, \dots, x_k) \\ f(x_1, \dots, x_k, n + 1) &= h(f(x_1, \dots, x_k, n), x_1, \dots, x_k, n) \end{aligned}$$

Die Funktion g definiert also den Rekursionsanfang und h den Rekursionsschritt. Bei der Berechnung des Funktionswertes im Rekursionsschritt hat man zur Verfügung: alle Argumente inklusive Rekursionsargument sowie den per rekursivem Aufruf ermittelten Wert.

Beispiel 14.1

Addition kann durch primitive Rekursion wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} \text{add}(x, 0) &= x & &= g(x) \\ \text{add}(x, y + 1) &= \text{add}(x, y) + 1 & &= h(\text{add}(x, y), x, y) \end{aligned}$$

Das heißt also: add entsteht durch primitive Rekursion aus den Funktionen

- $g(x) = \text{proj}_{1 \rightarrow 1}(x)$, also die Identitätsfunktion als Projektion;
- $h(x, y, z) = \text{succ}(\text{proj}_{3 \rightarrow 1}(x, y, z))$.

Multiplikation erhält man durch primitive Rekursion aus der Addition:

$$\begin{aligned} \text{mult}(x, 0) &= 0 \\ \text{mult}(x, y + 1) &= \text{add}(\text{mult}(x, y), x) \end{aligned}$$

Exponentiation erhält man durch primitive Rekursion aus der Multiplikation:

$$\begin{aligned} \text{exp}(x, 0) &= 1 \\ \text{exp}(x, y + 1) &= \text{mult}(\text{exp}(x, y), x) \end{aligned}$$

Es ergibt sich die Exponentiation x^y .

Man zeigt leicht per Induktion über den Aufbau primitiv rekursiver Funktionen, dass jede primitiv rekursive Funktion *total* ist. Es gilt der folgende Satz.

Satz 14.2

Die Klasse der primitiv rekursiven Funktionen stimmt mit der Klasse der LOOP-berechenbaren Funktionen überein.

Beweis.

- (I) Alle primitiv rekursiven Funktionen sind LOOP-berechenbar. Wir zeigen dies per Induktion über den Aufbau der primitiv rekursiven Funktionen:
- Für die *Grundfunktionen* ist klar, dass sie LOOP-berechenbar sind.

- Komposition:

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_k), \dots, h_m(x_1, \dots, x_k))$$

Es seien P_1, \dots, P_m, P LOOP-Programme für h_1, \dots, h_m, g .

Durch Speichern der Eingabewerte und der Zwischenergebnisse in unbenutzten Variablen kann man zunächst die Werte von h_1, \dots, h_m mittels P_1, \dots, P_m berechnen und dann auf diese Werte P anwenden. Genauer:

```

 $y_1 := x_1; \dots; y_n := x_n;$ 
Führe  $P_1$  aus
 $z_1 := x_0;$ 
 $x_i := 0;$  für alle in  $P_1$  verwendeten Variablen  $x_i$ 
 $x_1 := y_1; \dots; x_n := y_n;$ 
Führe  $P_2$  aus
     $\vdots$ 
 $z_m := x_m;$ 
 $x_i := 0;$  für alle in  $P_m$  verwendeten Variablen  $x_i$ 
 $x_1 := z_1; \dots; x_m := z_m;$ 
Führe  $P$  aus
    
```

- primitive Rekursion:

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= g(x_1, \dots, x_{n-1}) && \text{falls } x_n = 0 \\ f(x_1, \dots, x_n) &= h(f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - 1), x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - 1) && \text{falls } x_n > 0 \end{aligned}$$

Die Funktion f kann durch das LOOP-Programm

```

 $z_1 := 0;$ 
 $z_2 := g(x_1, \dots, x_{n-1});$  (★)
LOOP  $x_1$  DO
     $z_2 := h(z_2, x_1, \dots, x_{n-1}, z_1);$  (★)
     $z_1 := z_1 + 1$ 
END
 $x_0 := z_2$ 
    
```

berechnet werden.

Dabei sind die mit (★) gekennzeichneten Anweisungen Abkürzungen für Programme, welche Ein- und Ausgaben geeignet kopieren und die Programme für g und h anwenden.

Die Variablen z_1, z_2 sind neue Variablen, die in den Programmen für g und h nicht vorkommen.

- (II) Alle LOOP-berechenbaren Funktionen sind primitiv rekursiv.

Da der Beweis technisch etwas aufwendiger ist, beschränken wir uns auf eine Skizze. Für ein gegebenes LOOP-Programm P zeigt man per Induktion über die Teilprogramme von P , dass es zu jedem Teilprogramm Q von P eine „äquivalente“ primitiv rekursive Funktion gibt.

Leider ist es nicht ausreichend, „äquivalent“ als „liefert dieselbe Ausgabe/denselben Funktionswert“ zu interpretieren, da P zusätzliche Hilfsvariablen verwenden kann, deren Werte zwischen den Teilprogrammen von P weitergegeben werden (siehe Beweis von Satz 13.6). Ein adäquater Äquivalenzbegriff muss darum die Ein- und Ausgabewerte *aller* in P verwendeten Variablen x_0, \dots, x_n berücksichtigen.

Da aber jede primitiv rekursive Funktion nur einen einzelnen Funktionswert zurückliefert und so etwas wie „Hilfsvariablen“ nicht zur Verfügung steht, ist es notwendig, n Variablenwerte als eine einzige Zahl zu kodieren.

Wir benötigen also eine primitiv rekursive Bijektion

$$c^{(n)} : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N} \quad (n \geq 2)$$

sowie die zugehörigen Umkehrfunktionen

$$c_0^{(n)}, \dots, c_{n-1}^{(n)}.$$

Für $n = 2$ kann man beispielsweise die folgende Funktion verwenden:

$$c^{(2)} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad (x, y) \mapsto 2^x \cdot (2y + 1) \dot{-} 1$$

sowie ihre Umkehrfunktionen

$$c_0^{(2)}(z) = \max\{x \in \mathbb{N} \mid 2^x \mid (z + 1)\}$$

$$c_1^{(2)}(z) = \left(\left(\frac{z + 1}{2^{c_0^{(2)}(z)}} \right) \dot{-} 1 \right) / 2$$

wobei $x|y$ für Teilbarkeit steht, also $x|y = 1$ wenn x durch y ganzzahlig teilbar ist und $x|y = 0$ sonst. Man kann zeigen, dass $c^{(2)}$ in der Tat eine Bijektion ist und dass sowohl $c^{(2)}$ als auch die Umkehrfunktionen primitiv rekursiv sind. Durch wiederholtes Anwenden erweitert man $c^{(2)}$ leicht auf die gewünschte Bijektion $c^{(n)}$.

Man übersetzt nun jedes Teilprogramm Q von P in eine *einstellige* primitiv rekursive Funktion, indem man die Komposition folgender Schritte bildet: 1) aus dem Eingabewert die Werte aller Variablen dekodieren; 2) Q simulieren; und 3) alle Variablenwerte wieder in einen einzigen Wert kodieren.

□

μ -rekursive Funktionen

Aus Satz 14.2 folgt natürlich, dass die primitiv rekursiven Funktionen nicht berechnungsvollständig sind. In diesem Abschnitt erweitern wir die primitiv rekursiven Funktionen zu den μ -rekursiven Funktionen. Dieser Schritt entspricht dem Übergang von LOOP-Programmen zu WHILE-Programmen und liefert insbesondere Berechnungsvollständigkeit.

Die Erweiterung der primitiv rekursiven Funktionen wird durch Hinzunahme des sogenannten μ -Operators erreicht. Die durch diesen Operator beschriebene Operation wird auch als *Minimalisierung* bezeichnet. Intuitiv ist das letzte Argument einer k -stelligen Funktion g als Minimalisierungsargument festgelegt und das Resultat der Minimalisierung von g ist das kleinste x so dass $g(\dots, x) = 0$. So ein x muß natürlich nicht existieren, so dass sich mit dem μ -Operator auch echt partielle Funktionen definieren lassen. Die Semantik von Komposition und primitiver Rekursion lässt sich leicht auf partielle Funktionen erweitern. Zum Beispiel ist die Komposition $f(x_1, \dots, x_n) = g(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$ undefiniert wenn

- eines der $h_i(x_1, \dots, x_n)$ undefiniert ist oder
- alle h_i -Werte definiert sind, aber g von diesen Werten undefiniert ist.

Auch bei primitiver Rekursion setzen sich undefinierte Werte fort.

Wir wollen nun den μ -Operator formaler definieren. Eine k -stellige Funktion f entsteht aus einer $k+1$ -stelligen Funktion g durch Anwendung des μ -Operators (wir bezeichnen f dann mit μg) wenn

$$f(x_1, \dots, x_k) = \min\{n \mid g(x_1, \dots, x_k, n) = 0 \text{ und } g(x_1, \dots, x_k, m) \text{ ist definiert für alle } m < n\}.$$

Dabei ist $\min \emptyset$ undefiniert. Man beachte, dass das Ergebnis der Minimalisierung also in zwei Fällen undefiniert ist: (i) wenn kein n existiert, so dass $g(x_1, \dots, x_k, n) = 0$ gilt und (ii) wenn für das kleinste n mit $g(x_1, \dots, x_k, n) = 0$ gilt: es gibt ein m mit $0 \leq m < n$ und $g(x_1, \dots, x_k, m)$ undefiniert.

Beispiel 14.3

- Die 1-stellige, überall undefinierte Funktion undef kann definiert werden als

$$\text{undef}(x) = \mu g(x) \text{ mit } g(x, y) = \text{succ}(y).$$

$\mu g(x)$ liefert also unabhängig von der Eingabe x das kleinste y , so dass $y + 1 = 0$; so ein y existiert aber offensichtlich nicht.

- Um die Funktion

$$\text{div}(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1/x_2 & \text{falls } x_1/x_2 \in \mathbb{N} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

als μ -rekursive Funktion zu definieren, überlegt man sich zunächst leicht, dass die symmetrische Differenz $\text{sdiff}(x_1, x_2) = (x_1 \dot{-} x_2) + (x_2 \dot{-} x_1)$ primitiv rekursiv ist. Dann definiert man

$$\text{div}(x_1, x_2) = \mu g(x_1, x_2) \text{ mit } g(x_1, x_2, y) = \text{sdiff}(x_1, \text{mult}(x_2, y)).$$

$\mu g(x_1, x_2)$ liefert also das kleinste y , so dass die symmetrische Differenz zwischen x_1 und $x_2 \cdot y$ gleich 0 ist. Offensichtlich ist y genau der gesuchte Teiler bzw. undefiniert wenn dieser in \mathbb{N} nicht existiert.

Die Klasse der μ -rekursiven Funktionen besteht aus den Funktionen, die man aus den primitiv rekursiven Grundfunktionen durch Anwenden von Komposition, primitiver Rekursion und des μ -Operators erhält.

Satz 14.4

Die Klasse der μ -rekursiven Funktionen stimmt mit der Klasse der WHILE-berechenbaren Funktionen überein.

Beweis. Wir müssen hierzu den Beweis von Satz 14.2 um die Behandlung des zusätzlichen μ -Operators/WHILE-Konstrukts ergänzen. Wir beschränken uns dabei auf den Nachweis, dass alle μ -rekursiven Funktionen auch WHILE-berechenbar sind.

Es sei $f = \mu g$ und P (nach Induktionsvoraussetzung) ein WHILE-Programm für g . Dann berechnet das folgende Programm die Funktion f :

```
 $x_0 := 0;$   
 $y := g(x_1, \dots, x_n, x_0);$  (realisierbar mittels  $P$ )  
WHILE  $y \neq 0$  DO  
   $x_0 := x_0 + 1;$   
   $y := g(x_1, \dots, x_n, x_0);$  (realisierbar mittels  $P$ )  
END
```

Dieses Programm terminiert nicht, wenn eine der Berechnungen der Funktion g mittels des Programmes P nicht terminiert oder wenn y in der WHILE-Schleife niemals den Wert 0 annimmt. In beiden Fällen ist nach Definition von unbeschränkter Minimalisierung aber auch der Wert von μg nicht definiert.

□

Satz 14.4 liefert einen weiteren Anhaltspunkt für die Gültigkeit der Church-Turing These.

15. Entscheidbare und Unentscheidbare Probleme

Wir wechseln nun von Funktionen und dem mit Ihnen verknüpften Berechenbarkeitsbegriff zu Entscheidungsproblemen und dem damit assoziierten Begriff der Entscheidbarkeit. In der Informatik erfordern viele Probleme nur eine ja/nein Antwort anstatt der Berechnung eines "echten" Funktionswertes, z.B.:

- Das Leerheitsproblem für NEAs: gegeben ein NEA \mathcal{A} , ist $L(\mathcal{A}) = \emptyset$?
- Das Wortproblem für kontextfreie Grammatiken: gegeben eine kontextfreie Grammatik G und ein Wort w , ist $w \in L(G)$?
- Das Erreichbarkeitsproblem in gerichteten Graphen: gegeben ein gerichteter Graph G und zwei Knoten x, y , ist y von x aus in G erreichbar?
- etc

Derartige Probleme nennen wir Entscheidungsprobleme. Wir formalisieren sie nicht als Funktionen, sondern als Menge von Wörtern über einem geeigneten Alphabet Σ , also als formale Sprache $L \subseteq \Sigma^*$. Das assoziierte ja/nein-Problem ist dann: ist ein gegebenes Wort $w \in \Sigma^*$ enthalten in L ?

Als Beispiel für die Formalisierung eines Entscheidungsproblems als formale Sprache betrachten wir das *Äquivalenzproblem* für kontextfreie Grammatiken. Jede Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ kann als Wort $\text{code}(G) \in \Gamma^*$ über einem festen (d.h. nicht von G abhängigen) Alphabet Γ aufgefasst werden. Das Äquivalenzproblem für kontextfreie Grammatiken ist dann die Sprache

$$\{\text{code}(G_1)\#\text{code}(G_2) \mid G_1, G_2 \text{ kontextfrei}, L(G_1) = L(G_2)\} \subseteq \Gamma^*,$$

wobei $\#$ einfach ein Trennsymbol ist, das es erlaubt, die beiden Eingaben zu unterscheiden.

In diesem Kapitel beweisen wir das fundamentale Resultat, dass es (natürliche und wohldefinierte) Entscheidungsprobleme gibt, die nicht entscheidbar sind, d.h. für die kein Algorithmus existiert, der das gewünschte ja/nein-Resultat berechnet. Wir verwenden hier wieder Turing-Maschinen als zugrundeliegendes Berechnungsmodell, begründet durch die Church-Turing-These und die in den vorhergehenden Abschnitten dargestellte Äquivalenz zu anderen Berechnungsmodellen.

Definition 15.1 (entscheidbar)

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *entscheidbar*, falls es eine DTM gibt, die bei Eingabe von $w \in \Sigma^*$

- in akzeptierender Stoppkonfiguration anhält wenn $w \in L$
- in nicht-akzeptierender Stoppkonfiguration anhält wenn $w \notin L$

Die Eingabe w entspricht dabei wieder der Startkonfiguration q_0w . Wir sagen dann auch, dass die DTM die Sprache L *entscheidet* und ein *Entscheidungsverfahren* für L ist.

Entscheidbarkeit entspricht intuitiv der Existenz eines Algorithmus, der das Entscheidungsproblem (in endlicher Zeit) löst. Ein Vergleich der Definitionen 11.2 (Punkt 2) und 15.1 zeigt, dass jede DTM, die eine Sprache L entscheidet, offensichtlich auch L erkennt. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, da für das Entscheiden zusätzlich gefordert ist, dass die DTM auch für Eingaben $w \notin L$ anhält.

Entscheidbarkeit kann als Spezialfall der Berechenbarkeit *totaler* Funktionen gesehen werden: eine Sprache L ist entscheidbar gdw. ihre *charakteristische Funktion*, also die totale Funktion χ_L , definiert durch

$$\chi_L(w) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } w \in L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechenbar ist.

Man sieht leicht, dass die Klasse der entscheidbaren Sprachen unter Komplement abgeschlossen ist. Diese Eigenschaft werden wird im Folgenden verwenden.

Satz 15.2

Für alle $L \subseteq \Sigma^$ gilt: ist L entscheidbar, so ist auch das Komplement $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$ entscheidbar.*

Beweis. Eine DTM M , die L berechnet, wird wie folgt zu einer DTM für \bar{L} modifiziert: setze $F = Q \setminus F$ (tausche Endzustände und Nicht-Endzustände). Diese Konstruktion liefert das gewünschte Resultat, weil M deterministisch ist und auf jeder Eingabe terminiert. □

Entscheidbarkeitsbeweise haben wir im Prinzip schon viele geführt, dafür jedoch meist keine Turingmaschinen sondern abstrakte algorithmische Beschreibungen oder Pseudocode verwendet, siehe z.B. das Wortproblem für monotone Grammatiken in Satz 12.7.

Aber wie zeigt man, dass ein Problem *nicht* entscheidbar ist? Wir werden zwei Verfahren kennenlernen: Diagonalisierung und Reduktion. Unser erstes Unentscheidbarkeitsresultat wird Diagonalisierung verwenden. Haben wir aber erstmal die Unentscheidbarkeit einiger Probleme bewiesen, so ist danach meist Reduktion der einfachere Weg, um die Unentscheidbarkeit weiterer Probleme nachzuweisen.

Für die Diagonalisierung müssen wir Turingmaschinen als Eingaben für Turingmaschinen verwenden. Zu diesem Zweck überzeugen wir uns zunächst, dass Turingmaschinen leicht als Wörter kodiert werden können.

Konventionen:

- *Arbeitsalphabete* der betrachteten Turingmaschinen sind endliche Teilmengen von $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$, wobei a_0 das blank Symbol ist (wir schreiben wie gehabt β).
- *Zustandsmengen* sind endliche Teilmengen von $\{q_0, q_1, q_2, \dots\}$, wobei q_0 stets der *Anfangszustand* ist.

Es sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_1, \Delta, F)$ eine Turingmaschine, die obige Konventionen erfüllt.

1) Eine *Transition*

$$t = (q_i, a_j, a_{j'}, m, q_{i'})$$

wird *kodiert* durch

$$\text{code}(t) = \text{bin}(i)\#\text{bin}(j)\#\text{bin}(j')\#m\#\text{bin}(i')$$

wobei $\text{bin}(n)$ die Binärdarstellung einer Zahl ist.

2) Besteht Δ aus den Transitionen t_1, \dots, t_k und ist $F = \{q_{i_1}, \dots, q_{i_r}\}$ und $\Sigma = \{a_{j_1}, \dots, a_{j_s}\}$, so wird M *kodiert* durch $\text{code}(M) =$

$$\text{code}(t_1)\#\#\dots\#\#\text{code}(t_k)\#\#\#\text{bin}(i_1)\#\dots\#\text{bin}(i_r)\#\#\#\text{bin}(j_1)\#\dots\#\text{bin}(j_s).$$

Beachte, dass die einzelnen Transitionen durch $\#\#$ getrennt sind und die Kodierung der Übergangsrelation durch $\#\#\#$ abgeschlossen wird.

Wir wenden uns nun der Existenz unentscheidbarer Probleme zu. Es ist natürlich zunächst einmal gar nicht klar, ob es solche Probleme überhaupt gibt.

Satz 15.3

Es gibt unentscheidbare Probleme.

Beweis. Fixiere ein beliebiges (nicht leeres) Alphabet Σ . Wir zeigen: es gibt nur abzählbar viele verschiedene DTMs mit Eingabealphabet Σ , aber überabzählbar viele verschiedene Sprachen über Σ . Wäre jede Sprache über Σ entscheidbar, so müssten also mindestens zwei verschiedene solche Sprachen von derselben DTM entschieden werden, was nicht möglich ist.

Der erste Teil ist offensichtlich: jede DTM lässt sich als Wort über dem endlichen Alphabet $\{0, 1, \ell, n, r, \#\}$ darstellen und die Menge aller solcher Wörter ist offensichtlich abzählbar.

Für den zweiten Teil nehmen wir zum Zwecke eines Widerspruchs an, dass es nur abzählbar viele Sprachen über Σ gibt. Sei w_0, w_1, \dots eine Aufzählung aller Wörter über Σ und L_0, L_1, \dots eine Aufzählung aller Sprachen über Σ . Die *Diagonalisierungssprache* L_D ist definiert durch

$$w_i \in L_D \text{ gdw. } w_i \notin L_i.$$

Der Begriff "Diagonalisierung" bezieht sich auf die Darstellung der Zugehörigkeit der Wörter w_0, w_1, \dots zu den Sprachen L_0, L_1, \dots als zweidimensionale Matrix: der Eintrag einer Matrixzelle ist 1 wenn das Wort zur Sprache gehört und 0 sonst. L_D unterscheidet sich nun von *jeder* Sprache L_i genau im Wort w_i , d.h. genau auf der Diagonalen der Matrix.

Damit ist auch offensichtlich, dass L_D nicht in der Liste L_0, L_1, \dots vorkommt, im Widerspruch dazu, dass L_0, L_1, \dots eine Aufzählung aller Sprachen über Σ ist. \square

Der obige Beweis ist sehr ähnlich zu Cantors klassischem Beweis für die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen. Ein ähnliches Diagonalisierungsargument haben wir auch im Beweis von Satz 13.3 verwendet, um zu zeigen, dass es totale berechenbare Funktionen gibt, die nicht LOOP-berechenbar sind. Der Beweis von Satz 15.3 ist nicht konstruktiv, d.h. er liefert keine konkrete unentscheidbare Sprache. Das ist natürlich sehr unbefriedigend. Wir werden darum im folgenden ein etwas raffinierteres Diagonalisierungsargument verwenden, um konkrete unentscheidbare Sprachen zu identifizieren. Die verwendete Beweistechnik geht zurück auf Alan Turing.

Zunächst verbessern wir unsere Kodierung von DTMs als Wörter, so dass diese surjektiv ist, d.h. jedes Wort kann als Kodierung einer DTM aufgefasst werden. Das ist natürlich zunächst nicht der Fall, lässt sich aber sehr leicht erreichen: wähle eine beliebige aber feste DTM M_0 . Jedem Wort, das gemäß des obigen Schemas nicht der Kodierung einer DTM entspricht, weisen wir *per Konvention* die DTM M_0 zu. Man beachte, dass sich aus einem gegebenen Wort $w \in \{0, 1, \ell, n, r, \#\}^*$ trotzdem leicht die kodierte DTM extrahieren lässt. Wir bezeichnen die durch ein Wort $w \in \{0, 1, \ell, n, r, \#\}^*$ kodierte DTM mit M_w .

Zunächst betrachten wir ein konkretes, aber etwas merkwürdiges unentscheidbares Problem, das sogenannte *spezielle Wortproblem*. Es besteht darin, für ein gegebenes Wort w zu entscheiden, ob $w \in L(M_w)$, also mit anderen Worten: ob eine DTM ihre eigene Kodierung als Eingabe akzeptiert. Man beachte, dass die "Diagonale" (Identität der Maschine und der Eingabe) hier quasi in die Problemdefinition eingebaut ist.

Satz 15.4

Das spezielle Wortproblem für DTMs ist unentscheidbar.

Beweis. Mit Satz 15.2 ist es ausreichend, zu zeigen, dass das Komplement des speziellen Wortproblems unentscheidbar ist, also die Sprache

$$L_{\overline{W}} = \{w \mid w \notin L(M_w)\}.$$

Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, $L_{\overline{W}}$ wäre entscheidbar. Dann gibt es eine konkrete DTM M , die $L_{\overline{W}}$ entscheidet und es gibt ein Wort $w \in \{0, 1, \ell, n, r, \#\}^*$ mit $M = M_w$. Es gilt nun:

$$\begin{array}{ll} w \in L(M_w) & \text{gdw. } w \in L_{\overline{W}} & \text{(denn } L(M_w) = L_{\overline{W}}) \\ & \text{gdw. } w \notin L(M_w) & \text{(nach Def. } L_{\overline{W}}) \end{array}$$

Widerspruch. □

Aus der Unentscheidbarkeit des speziellen Wortproblems für DTMs kann man die Unentscheidbarkeit weiterer, natürlicherer Probleme herleiten. Wir betrachten zunächst das (allgemeine) Wortproblem für DTMs.

Satz 15.5

Das Wortproblem für DTM ist unentscheidbar, d.h. es gibt kein Entscheidungsverfahren dafür, ob eine gegebene DTM M ein gegebenes Eingabewort w akzeptiert.

Beweis. Wäre das Wortproblem entscheidbar, so auch das spezielle Wortproblem. Um für ein gegebenes Wort w zu entscheiden, ob $w \in L(M_w)$, müsste man dann nämlich nur die DTM für das (allgemeine) Wortproblem starten und ihr als Eingabe w (als Kodierung der DTM M_w) sowie nochmals w (als Eingabe für M_w) übergeben. □

Aus Satz 15.5 folgt auch die Unentscheidbarkeit des Wortproblems für Typ 0-Grammatiken, da die im Beweis von Satz 12.1 beschriebene Übersetzung derartiger Grammatiken in DTMs *effektiv* ist, d.h. mittels DTMs implementierbar. Dadurch könnte ein Entscheidungsverfahren für Typ 0-Grammatiken leicht in ein Entscheidungsverfahren für DTMs umgewandelt werden.

Als nächstes betrachten wir ein weiteres klassisches Problem für Turingmaschinen: das Halteproblem. Wenn man “DTM” mit “Programm” gleichsetzt, so entspricht das Halteproblem einer wichtigen Fragestellung aus der Programmanalyse: lässt sich automatisch feststellen, ob ein Programm auf einer gegebenen Eingabe stoppt (oder in eine Endlosschleife gerät)? Das folgende Unentscheidbarkeitsresultat zeigt, dass das unmöglich ist.

Satz 15.6

Das Halteproblem für DTM ist unentscheidbar, d.h. es gibt kein Entscheidungsverfahren dafür, ob eine gegebene DTM M auf einer gegebenen Eingabe w anhält.

Beweis. Wir zeigen: wäre das Halteproblem entscheidbar, so auch das Wortproblem.

Um von einer gegebenen DTM M und einem gegebenen Wort w zu entscheiden, ob $w \in L(M)$, könnte man dann nämlich wie folgt vorgehen:

Modifiziere M zu einer TM \hat{M} :

- \hat{M} verhält sich zunächst wie M .
- Stoppt M mit *akzeptierender* Stoppkonfiguration, so stoppt auch \hat{M} .
 Stoppt M mit *nichtakzeptierender* Stoppkonfiguration, so geht \hat{M} in Endlosschleife.

Damit gilt:

$$M \text{ akzeptiert } w \quad \text{gdw.} \quad \hat{M} \text{ hält auf Eingabe } w.$$

Mit dem Entscheidungsverfahren für das Halteproblem, angewandt auf \hat{M} und w , könnte man also das Wortproblem „ist w in $L(M)$ “ entscheiden. □

Satz 15.7

Das Leerheitsproblem für DTM ist unentscheidbar.

Beweis. Da das Halteproblem unentscheidbar ist, ist mit Satz 15.2 auch dessen Komplement unentscheidbar. Wäre aber das Leerheitsproblem entscheidbar, so auch das Komplement des Halteproblems.

Um bei gegebener DTM M zu entscheiden, ob M auf Eingabe w *nicht* hält, konstruiert man die DTM \hat{M} wie folgt:

- \hat{M} löscht ihre Eingabe und ersetzt sie durch w .
- Danach verhält sich \hat{M} wie M .
- Stoppt die Berechnung, so akzeptiert \hat{M} (die ursprüngliche Eingabe).

Offenbar hält M *nicht* auf Eingabe w gdw. $L(\hat{M}) = \emptyset$. Man muss also nur das Entscheidungsverfahren für das Leerheitsproblem auf \hat{M} anwenden. □

Satz 15.8

Das Äquivalenzproblem für DTM ist unentscheidbar.

Beweis. Offenbar kann man leicht eine DTM \hat{M} konstruieren mit $L(\hat{M}) = \emptyset$.

Wäre das Äquivalenzproblem

$$L(M_1) = L(M_2)?$$

entscheidbar, so könnte man durch den Test

$$L(M) = L(\hat{M})?$$

das Leerheitsproblem für M entscheiden. □

Das in den Beweisen der Sätze 15.5 bis 15.8 gewählte Vorgehen nennt man *Reduktion*:

- Das Lösen eines Problems P_1 (z.B. Halteproblem) wird auf das Lösen eines Problem P_2 (z.B. Äquivalenzproblem) reduziert.
- Wäre daher P_2 entscheidbar, so auch P_1 .
- Weiß man bereits, dass P_1 unentscheidbar ist, so folgt daher, dass auch P_2 unentscheidbar ist.

Reduktionen sind ein sehr wichtiges Hilfsmittel, um die Unentscheidbarkeit von Problemen nachzuweisen. In der Tat wird dieser Ansatz wesentlich häufiger verwendet als Diagonalisierung (die aber trotzdem unverzichtbar ist, um sich erstmal ein originäres unentscheidbares Problem zu schaffen, dass man dann reduzieren kann). Formal lassen sich Reduktionen wie folgt definieren.

Definition 15.9 (Reduktion)

1) Eine *Reduktion* von $L_1 \subseteq \Sigma^*$ auf $L_2 \subseteq \Sigma^*$ ist eine (totale) berechenbare Funktion

$$f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*,$$

so dass für alle $w \in \Sigma^*$:

$$w \in L_1 \quad \text{gdw.} \quad f(w) \in L_2.$$

2) Wir schreiben

$$L_1 \leq L_2 \quad (L_1 \text{ ist auf } L_2 \text{ reduzierbar}),$$

falls es eine Reduktion von L_1 nach L_2 gibt.

Offensichtlich ist die Komposition zweier berechenbarer Funktionen wieder eine berechenbare Funktion. Daher ist " \leq " eine *Ordnungsrelation*:

Lemma 15.10

Wenn $L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq L_3$, dann $L_1 \leq L_3$.

Das folgende Lemma gibt die wichtigsten Zusammenhänge zwischen Reduzierbarkeit und (Un)entscheidbarkeit an.

Lemma 15.11

- 1) $L_1 \leq L_2$ und L_2 entscheidbar $\Rightarrow L_1$ entscheidbar.
- 2) $L_1 \leq L_2$ und L_1 unentscheidbar $\Rightarrow L_2$ unentscheidbar.

Beweis.

- 1) Um „ $w \in L_1$ “ zu entscheiden,
 - berechnet man $f(w)$ und
 - entscheidet „ $f(w) \in L_2$ “.

2) Folgt unmittelbar aus 1). □

Wir werden im Folgenden noch einige Beispiele für Reduktionen sehen. Zunächst zeigen wir mit Hilfe einer Reduktion des Halteproblems folgendes sehr starke Resultat:

Jede *nichttriviale semantische Eigenschaft* von Programmen (DTM) ist *unentscheidbar*.

- *Semantisch* heißt hier: Die Eigenschaft hängt nicht von der syntaktischen Form des Programms (der DTM), sondern nur von der erkannten Sprache ab.
- *Nichttrivial*: Es gibt Turing-erkennbare Sprachen, die die Eigenschaft erfüllen, aber nicht alle Turing-erkennbaren Sprachen erfüllen sie.

Zum Beispiel ist eine semantische und nichttriviale Eigenschaft, ob die von einer DTM erkannte Sprache leer ist. Also ist die Unentscheidbarkeit des Leerheitsproblems eine konkrete Instanz des hier bewiesenen, sehr allgemeinen Resultates. Da nach der Church-Turing-These DTMs äquivalent zu anderen Berechnungsmodellen wie etwa WHILE-Programmen sind, kann man diese Aussage intuitiv so verstehen, dass *alle interessanten Eigenschaften*, die das *Verhalten von Programmen* betreffen, unentscheidbar sind. Dies hat weitreichende Konsequenzen im Gebiet der Programmverifikation, wo man Programme automatisch auf ihre Korrektheit prüfen möchte.

Ein Beispiel für eine *nicht* semantische Eigenschaft ist zum Beispiel: die DTM macht auf dem leeren Wort mehr als 100 Schritte.

Wir setzen im Folgenden semantische Eigenschaften von DTMs mit Eigenschaften der von ihnen erkannten Sprachen gleich: eine *Eigenschaft Turing-erkennbarer Sprachen* ist eine Menge

$$E \subseteq \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ ist Turing-erkennbar}\}.$$

Eine Sprache L erfüllt E falls $L \in E$.

Es folgt das angekündigte Resultat.

Satz 15.12 (Satz von Rice)

Es sei E eine Eigenschaft Turing-erkennbarer Sprachen, so dass gilt:

$$\emptyset \subsetneq E \subsetneq \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ ist Turing-erkennbar}\}.$$

Dann ist die Sprache

$$L(E) := \{\text{code}(M) \mid M \text{ DTM mit } L(M) \in E\}$$

unentscheidbar.

Beweis. Sei E wie in Satz 15.12. Wir geben eine Reduktion des Halteproblems auf die Sprache $L(E)$ an, müssen also folgendes zeigen.

Gegeben eine DTM M und ein Eingabewort w für M kann man eine DTM \hat{M} konstruieren, so dass gilt:

$$M \text{ hält auf } w \quad \text{gdw.} \quad L(\hat{M}) \in E.$$

Die Reduktionsfunktion f aus Definition 15.9 bildet also die Eingabe (M, w) für das Halteproblem auf $f(M, w) = \hat{M}$ ab. Beachte, dass die Funktion f berechenbar sein muss, d.h. die Konstruktion von \hat{M} aus M muss effektiv mittels einer DTM realisierbar sein.

Zur Konstruktion von \hat{M} verwenden wir

- (a) eine Sprache $L_E \in E$ und eine dazugehörige DTM M_E mit $L(M_E) = L_E$ (so eine Sprache und DTM existieren, da E nichttrivial)
- (b) die Annahme, dass die leere Sprache E nicht erfüllt (dazu später mehr).

Konstruiere nun zu gegebener DTM M und Eingabe w für M die DTM \hat{M} wie folgt:

- \hat{M} speichert zunächst die Eingabe \hat{w} zur späteren Verwendung
- danach schreibt \hat{M} das Wort w auf das Eingabeband und verhält sich genau wie M
- wenn M terminiert, so wird die ursprüngliche Eingabe \hat{w} auf dem Eingabeband wiederhergestellt; dann verhält sich \hat{M} wie die Maschine M_E .

Man kann prüfen, dass \hat{M} sich wie gewünscht verhält:

1. wenn M auf w anhält, dann erkennt \hat{M} die Sprache L_E , also $L(\hat{M}) \in E$;
2. wenn M auf w nicht anhält, dann erkennt \hat{M} die leere Sprache, also $L(\hat{M}) \notin E$.

Wir gehen nun noch kurz auf die obige Annahme (b) ein. Wenn die leere Sprache E erfüllt, dann betrachten wir stattdessen die Komplementäreigenschaft

$$\bar{E} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid L \text{ ist Turing-erkennbar}\} \setminus E$$

Diese wird dann nicht von der leeren Sprache erfüllt und wir können wie oben zeigen, dass $L(\bar{E})$ unentscheidbar. Unentscheidbarkeit von $L(E)$ folgt dann mit Satz 15.2 und der Beobachtung, dass

$$L(\bar{E}) = \overline{L(E)} \cap \text{CODE}.$$

□

Im folgenden wenden wir nochmals Diagonalisierung an, um eine Lücke in unserem Wissen über formale Sprachen zu schließen. Wir zeigen, dass die Typ 1-Sprachen eine *echte* Teilmenge der Typ 0-Sprachen sind.

Satz 15.13

$$\mathcal{L}_1 \subsetneq \mathcal{L}_0.$$

Beweis. Es sei

- G_0, G_1, \dots eine effektive (d.h. mit TM machbare) Aufzählung aller monotonen Grammatiken mit Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b\}$
- und w_0, w_1, \dots eine effektive Aufzählung aller Wörter über Σ .

Wir definieren nun $L \subseteq \{a, b\}^*$ als

$$L = \{w_i \mid i \geq 0 \wedge w_i \notin L(G_i)\} \quad (\text{Diagonalisierung!}).$$

- L ist Turing-erkennbar und damit aus \mathcal{L}_0 . In der Tat ist L sogar entscheidbar: bei Eingabe w kann eine DTM
 - durch Aufzählen der w_0, w_1, \dots den Index i mit $w = w_i$ bestimmen
 - durch Aufzählen der G_0, G_1, \dots dann auch die Grammatik G_i konstruieren
 - dann das Wortproblem für $w_i \in L(G_i)$ für Typ 1-Sprachen entscheiden (siehe Satz 12.7)

- L ist nicht kontextsensitiv. Anderenfalls gäbe es einen Index k mit $L = L(G_k)$.
Nun ist aber

$$\begin{array}{lll} w_k \in L(G_k) & \underline{\text{gdw.}} & w_k \in L & \text{(denn } L(G_k) = L) \\ & \underline{\text{gdw.}} & w_k \notin L(G_k) & \text{(nach Def. } L) \end{array}$$

Widerspruch.

□

16. Weitere unentscheidbare Probleme

Die bisher als unentscheidbar nachgewiesenen Probleme beziehen sich allesamt auf (semantische) Eigenschaften von Turingmaschinen bzw. von Programmen. Derartige Probleme spielen im Gebiet der automatischen Programmverifikation eine wichtige Rolle. Es gibt aber auch eine große Zahl von unentscheidbaren Problemen, die (direkt) nichts mit Programmen zu tun haben. In diesem Abschnitt betrachten wir einige ausgewählte Probleme dieser Art.

Das folgende von Emil Post definierte Problem ist oft sehr nützlich, um mittels Reduktion die Unentscheidbarkeit weiterer Probleme zu zeigen.

Definition 16.1 (Postsches Korrespondenzproblem)

Eine Instanz des *Postschen Korrespondenzproblems* (PKP) ist gegeben durch eine endliche Folge

$$P = (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$$

von Wortpaaren mit $x_i, y_i \in \Sigma^*$, für ein endliches Alphabet Σ .

Eine *Lösung* des Problems ist eine *Indexfolge* i_1, \dots, i_m mit

- $m > 0$ und
- $i_j \in \{1, \dots, k\}$,

so dass gilt: $x_{i_1} \cdots x_{i_m} = y_{i_1} \cdots y_{i_m}$.

Beispiel:

1) $P_1 = (a, aaa), (abaa, ab), (aab, b)$

hat z.B. die Folgen 2, 1 und 1, 3 als Lösungen

$$\begin{array}{ll} abaa|a & a|aab \\ ab|aaa & aaa|b \end{array}$$

und damit auch 2, 1, 1, 3 sowie 2, 1, 2, 1, 2, 1, ...

2) $P_2 = (ab, aba), (baa, aa), (aba, baa)$

hat keine Lösung: jede Lösung müsste mit dem Index 1 beginnen, da in allen anderen Paaren das erste Symbol von x_i and y_i verschieden ist. Danach kann man nur mit dem Index 3 weitermachen (beliebig oft). Dabei bleibt die Konkatenation $y_{i_1} \cdots y_{i_m}$ stets länger als die Konkatenation $x_{i_1} \cdots x_{i_m}$.

Um die Unentscheidbarkeit des PKP zu zeigen, führen wir zunächst ein Zwischenproblem ein, das *modifizierte PKP* (MPKP):

Hier muss für die Lösung zusätzlich $i_1 = 1$ gelten, d.h. das Wortpaar, mit dem man beginnen muss, ist festgelegt.

Lemma 16.2

Das MPKP kann auf das PKP reduziert werden.

Beweis. Es sei $P = (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ eine Instanz des MPKP über dem Alphabet Σ . Es seien $\#, \$$ Symbole, die nicht in Σ vorkommen.

Wir definieren die Instanz \widehat{P} des PKP über $\widehat{\Sigma} = \Sigma \cup \{\#, \$\}$ wie folgt:

$$\widehat{P} := (x'_0, y'_0), (x'_1, y'_1), \dots, (x'_k, y'_k), (x'_{k+1}, y'_{k+1}),$$

wobei gilt:

- Für $1 \leq i \leq k$ entsteht x'_i aus x_i , indem man *hinter jedem* Symbol ein $\#$ einfügt. Ist z.B. $x_i = abb$, so ist $x'_i = a\#b\#b\#$.
- Für $1 \leq i \leq k$ entsteht y'_i aus y_i , indem man *vor jedem* Symbol ein $\#$ einfügt.
- $x'_0 := \#x'_1$ und $y'_0 := y'_1$
- $x'_{k+1} := \$$ und $y'_{k+1} := \#\$$

Offenbar ist die Reduktion berechenbar. Es bleibt zu zeigen, dass gilt:

„Das MPKP P hat eine Lösung.“ gdw. „Das PKP \widehat{P} hat eine Lösung.“

„ \Rightarrow “. Wenn i_1, \dots, i_m Lösung für das MPKP P , dann muß $i_1 = 1$ sein. Man überprüft leicht, dass dann $1, i_2 + 1, \dots, i_m + 1, k + 2$ eine Lösung für das PKP \widehat{P} ist (beachte: wir beginnen die Zählung der Paare immer bei 1, der Index 1 meint im Fall von \widehat{P} also das Paar (x'_0, y'_0)).

„ \Leftarrow “. Sei i_1, \dots, i_m Lösung für das PKP \widehat{P} . Dann ist $i_1 = 1$ weil in allen Paaren außer dem ersten die Wörter x'_i, y'_i mit unterschiedlichen Symbolen beginnen. Außerdem muß es ein $\ell \in \{1, \dots, m\}$ geben mit $i_\ell = k + 2$ weil vor Anwendung des Paares $k + 2$ die linke Konkatenation $x'_{i_1}x'_{i_2} \cdots x'_{i_j}$ immer mit $\#$ Ende, die rechte Konkatenation $y'_{i_1}x'_{i_2} \cdots y'_{i_j}$ jedoch nicht. Sei ℓ minimal mit dieser Eigenschaft. Man prüft leicht, daß $1, i_2 - 1, \dots, i_{\ell-1} - 1$ Lösung für das MPKP P ist. \square

Beispiel:

$P = (a, aba), (bab, b)$ ist als MPKP lösbar mit Lösung 1, 2. Die Sequenz 2,1 liefert zwar identische Konkatenationen, ist aber im MPKP nicht zulässig. Die Konstruktion liefert:

$$\widehat{P} = \begin{matrix} (x'_0, y'_0) & (x'_1, y'_1) & (x'_2, y'_2) & (x'_3, y'_3) \\ (\#a\#, \#a\#b\#a), & (a\#, \#a\#b\#a), & (b\#a\#b\#, \#b), & (\$, \#\$) \end{matrix}$$

Die Lösung 1, 2 von P liefert die Lösung 1, 3, 4 von \widehat{P} :

$$\begin{array}{l} \#a\# \ b\#a\#b\#\$ \\ \#a\# \ b\#a\#\#b\#\$ \end{array}$$

Die Sequenz 2,1 liefert keine Lösung von \widehat{P} : wegen der Verwendung des $\#$ -Symbols muss jede Lösung von \widehat{P} mit Index 0 anfangen. Dies entspricht wie gewünscht Lösungen von P , die mit Index 1 beginnen.

Wäre daher das PKP entscheidbar, so auch das MPKP. Um die Unentscheidbarkeit des PKP zu zeigen, genügt es also zu zeigen, dass das MPKP unentscheidbar ist.

Lemma 16.3

Das Halteproblem kann auf das MPKP reduziert werden.

Beweis. Gegeben sei eine DTM $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Delta, F)$ und ein Eingabewort $w \in \Sigma^*$.

Wir müssen zeigen, wie eine TM eine gegebene Eingabe M, w in eine Instanz $P_{M,w}$ des MPKP überführen kann, so dass gilt:

M hält auf Eingabe w gdw. $P_{M,w}$ hat eine Lösung.

Wir verwenden für das MPKP $P_{M,w}$ das Alphabet $\Gamma \cup Q \cup \{\#\}$ mit $\# \notin \Gamma \cup Q$. Das MPKP $P_{M,w}$ besteht aus den folgenden Wortpaaren:

1) Anfangsregel:

$$(\#, \#q_0w\#)$$

2) Kopierregeln:

$$(a, a) \text{ für alle } a \in \Gamma \cup \{\#\}$$

3) Übergangsregeln:

$$\begin{aligned} & (qa, q'a') \text{ falls } (q, a, a', n, q') \in \Delta \\ & (qa, a'q') \text{ falls } (q, a, a', r, q') \in \Delta \\ & (bqa, q'ba') \text{ falls } (q, a, a', l, q') \in \Delta \text{ und } b \in \Gamma \\ & (\#qa, \#q'ba') \text{ falls } (q, a, a', l, q') \in \Delta \\ & (q\#, q'a'\#) \text{ falls } (q, \#, a', n, q') \in \Delta \\ & (q\#, a'q'\#) \text{ falls } (q, \#, a', r, q') \in \Delta \\ & (bq\#, q'ba'\#) \text{ falls } (q, \#, a', l, q') \in \Delta \\ & (\#q\#, \#q'ba'\#) \text{ falls } (q, \#, a', l, q') \in \Delta \end{aligned}$$

4) Löseregeln:

$$(aq, q) \text{ und } (qa, q) \text{ für alle } a \in \Gamma \text{ und } q \in Q \text{ Stoppzustand}$$

(O.B.d.A. hänge in M das Stoppen nur vom erreichten Zustand, aber nicht vom gerade gelesenen Bandsymbol ab; ein *Stoppzustand* ist dann ein Zustand q , so dass die TM in q bei jedem gelesenen Symbol anhält.)

5) Abschlussregel:

$$(q\#\#, \#) \text{ für alle } q \in Q \text{ mit } q \text{ Stoppzustand}$$

Falls M bei Eingabe w hält, so gibt es eine Berechnung

$$k_0 \vdash_M k_1 \vdash_M \dots \vdash_M k_t$$

mit $k_0 = q_0w$ und $k_t = u\hat{q}v$ mit \hat{q} Endzustand.

Daraus kann man eine Lösung des MPKP bauen. Zunächst erzeugt man

$$\begin{aligned} & \#k_0\#k_1\#k_2\#\dots\# \\ & \#k_0\#k_1\#k_2\#\dots\#k_t\# \end{aligned}$$

- Dabei beginnt man mit $(\#, \#k_0\#)$.
 - Durch Kopierregeln erzeugt man die Teile von k_0 und k_1 , die sich nicht unterscheiden.
 - Der Teil, der sich unterscheidet, wird durch die entsprechende Übergangsregel realisiert.

z.B. $(q, a, a', r, q') \in \Delta$ und $k_0 = \#qab\#$

$$\begin{aligned} & \#|a|q|a|b|b|\# \\ & \#a|q|a|b|b|\#|a|a',q'|b|b|\# \end{aligned}$$

Man erhält so:

$$\begin{aligned} & \#k_0\# \\ & \#k_0\#k_1\# \end{aligned}$$

- Nun macht man dies so weiter, bis die Stoppkonfiguration k_t mit Stoppzustand \hat{q} erreicht ist. Durch Verwenden von Löseregeln und Kopierregeln löscht man nacheinander die dem Stoppzustand benachbarten Symbole von k_t , z.B.:

$$\begin{aligned} & \dots\#a\hat{q}|b|\#|\hat{q}|b|\# \\ & \dots\#a\hat{q}|b|\#|\hat{q}|b|\#|\hat{q}| \end{aligned}$$

- Danach wendet man die Abschlussregel an:

$$\begin{aligned} & \dots\#|\hat{q}\# \# \\ & \dots\# \hat{q}\#|\# \end{aligned}$$

Umgekehrt zeigt man leicht, dass jede Lösung des MPKP einer haltenden Folge von Konfigurationsübergängen entspricht, welche mit k_0 beginnt:

- Man muss mit k_0 beginnen, da wir das MPKP betrachten.
- Durch Kopier- und Übergangsregeln kann man die erzeugten Wörter offensichtlich nicht gleich lang machen.
- Daher muss ein Stoppzustand erreicht werden, damit Löseregeln und Abschlussregeln eingesetzt werden können.

□

Da das Halteproblem unentscheidbar ist, folgt die Unentscheidbarkeit des MPKP und damit (wegen Lemma 16.2) die Unentscheidbarkeit des PKP.

Satz 16.4

Das PKP ist unentscheidbar.

Wir verwenden dieses Resultat, um Unentscheidbarkeit von Problemen für kontextfreie und kontextsensitive Sprachen nachzuweisen. Wir zeigen zunächst:

Lemma 16.5

Das Schnitt-Leerheitsproblem für kontextfreie Grammatiken ist unentscheidbar, d.h. gegeben zwei kontextfreie Grammatiken G_1, G_2 ist nicht entscheidbar, ob gilt:

$$L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset.$$

Beweis. Wir reduzieren das PKP auf das Komplement des Schnitt-Leerheitsproblems, d.h. wir zeigen:

Zu jeder gegebenen Instanz P des PKP kann eine TM kontextfreie Grammatiken $G_P^{(l)}, G_P^{(r)}$ konstruieren, so dass gilt:

$$P \text{ hat Lösung} \quad \text{gdw.} \quad L(G_P^{(l)}) \cap L(G_P^{(r)}) \neq \emptyset.$$

Da das PKP unentscheidbar ist und ein Problem entscheidbar ist gdw. sein Komplement entscheidbar ist, folgt die Aussage des Lemmas.

Es sei $P = (x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$. Wir definieren $G_P^{(l)} = (N_l, \Sigma_l, P_l, S_l)$ mit

- $N_l = \{S_l\}$,
- $\Sigma_l = \Sigma \cup \{1, \dots, k\}$ und
- $P_l = \{S_l \rightarrow x_i S_l i, S_l \rightarrow x_i i \mid 1 \leq i \leq k\}$.

$G_P^{(r)}$ wird entsprechend definiert. Es gilt:

$$L(G_P^{(l)}) = \{x_{i_1} \dots x_{i_m} i_m \dots i_1 \mid m \geq 1, i_j \in \{1, \dots, k\}\}$$

$$L(G_P^{(r)}) = \{y_{i_1} \dots y_{i_m} i_m \dots i_1 \mid m \geq 1, i_j \in \{1, \dots, k\}\}$$

Daraus folgt nun unmittelbar:

$$L(G_P^{(l)}) \cap L(G_P^{(r)}) \neq \emptyset$$

$$\text{gdw.} \quad \exists m \geq 1 \exists i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, k\} : x_{i_1} \dots x_{i_m} i_m \dots i_1 = y_{i_1} \dots y_{i_m} i_m \dots i_1$$

$$\text{gdw.} \quad P \text{ hat Lösung.} \quad \square$$

Beachte, dass man das Schnitt-Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen nicht einfach auf das Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen reduzieren kann, denn die kontextfreien Sprachen sind nicht unter Schnitt abgeschlossen.

Wir wissen jedoch bereits, dass jede kontextfreie Sprache auch kontextsensitiv ist und dass die kontextsensitiven Sprachen unter Schnitt abgeschlossen sind (Satz 12.6). Daraus folgt der folgende Satz. Zur Erinnerung: monotone Grammatiken erzeugen die kontextsensitiven Sprachen.

Satz 16.6

Für monotone Grammatiken sind das Leerheitsproblem und das Äquivalenzproblem unentscheidbar.

Beweis. Es existiert eine einfache Reduktion des Schnitt-Leerheitsproblems kontextfreier Grammatiken auf das Leerheitsproblem monotoner Grammatiken: gegeben kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2 , konstruiere monotone Grammatik G mit $L(G) = L(G_1) \cap L(G_2)$ (zum Beispiel mittels Umweg über linear beschränkte Automaten), entscheide dann ob $L(G) = \emptyset$.

Das Leerheitsproblem ist ein Spezialfall des Äquivalenzproblems, da

$$L(G) = \emptyset \text{ gdw. } L(G) = L(G_\emptyset) \quad (G_\emptyset : \text{kontextsensitive Grammatik mit } L(G_\emptyset) = \emptyset).$$

□

Zur Erinnerung: im Gegensatz zum Leerheitsproblem für kontextsensitive Sprachen hatten wir gezeigt, dass das Leerheitsproblem für kontextfreie Sprachen entscheidbar ist. Das Äquivalenzproblem ist allerdings bereits für kontextfreie Sprachen unentscheidbar. Die hier gezeigten Unentscheidbarkeitsresultate gelten natürlich auch für linear beschränkte Automaten bzw. Kellerautomaten, da man mittels einer TM Grammatiken in das entsprechende Automatenmodell übersetzen kann (und umgekehrt).

Satz 16.7

Für kontextfreie Grammatiken ist das Äquivalenzproblem unentscheidbar.

Beweis.

1. Man kann sich leicht überlegen, dass die Sprachen $L(G_P^{(l)})$ und $L(G_P^{(r)})$ aus dem Beweis von Lemma 16.5 durch deterministische Kellerautomaten akzeptiert werden können.
2. Die von deterministischen Kellerautomaten akzeptierten kontextfreien Sprachen sind (im Unterschied zu den kontextfreien Sprachen selbst) unter Komplement abgeschlossen.

D.h. es gibt auch einen deterministischen Kellerautomaten und damit eine kontextfreie Grammatik für

$$\overline{L(G_P^{(l)})}$$

(siehe z.B. [Wege93], Satz 8.1.3).

3. Es sei \overline{G} die kontextfreie Grammatik mit $L(\overline{G}) = \overline{L(G_P^{(l)})}$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} L(G_P^{(l)}) \cap L(G_P^{(r)}) = \emptyset & \text{ gdw. } L(G_P^{(r)}) \subseteq L(\overline{G}) \\ & \text{ gdw. } L(G_P^{(r)}) \cup L(\overline{G}) = L(\overline{G}) \\ & \text{ gdw. } L(G_\cup) = L(\overline{G}), \end{aligned}$$

wobei G_\cup die kontextfreie Grammatik für $L(G_P^{(r)}) \cup L(\overline{G})$ ist.

4. Wäre also das Äquivalenzproblem für kontextfreie Grammatiken entscheidbar, so auch

$$L(G_P^{(l)}) \cap L(G_P^{(r)}) \neq \emptyset$$

und damit das PKP.

□

An dieser Stelle haben wir die Entscheidbarkeit von Wortproblem, Leerheitsproblem und Äquivalenzproblem für die verschiedenen in dieser Vorlesung behandelten Maschinenmodelle und Grammatiktypen vollständig geklärt. Eine zusammenfassende Tabelle findet sich in Anhang C.

17. Semi-Entscheidbarkeit und Rekursive Aufzählbarkeit

Wir betrachten die Semi-Entscheidbarkeit von Entscheidungsproblemen, die eine natürliche Abschwächung von Entscheidbarkeit darstellt, sowie den eng verwandten Begriff der rekursiven Aufzählbarkeit. Dabei geht es um die Frage ob man, wenn ein Problem L schon nicht entscheidbar ist, wenigstens einen Algorithmus finden kann, der

- auf *positiven* Eingaben stets terminiert (Semi-Entscheidbarkeit) bzw.
- alle (im allgemeinen unendlich viele) positiven Eingaben systematisch aufzählt und ausgibt (rekursive Aufzählbarkeit).

Wir werden sehen, dass dies für manche unentscheidbare Probleme möglich ist, für andere aber nicht. Dadurch ergeben sich verschiedene Grade der Unlösbarkeit. Wir werden auch einen Zusammenhang zur Erkennbarkeit von Sprachen mittels Turingmaschinen herstellen und einige verbliebene Fragen bezüglich Typ 0- und Typ 1-Sprachen klären.

Definition 17.1 (Semi-entscheidbar, rekursiv aufzählbar)

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt

- 1) *semi-entscheidbar*, falls es eine DTM gibt, die bei Eingabe $w \in \Sigma^*$
 - terminiert, falls $w \in L$ ist
 - nicht terminiert sonst.

Eine solche DTM nennen wir ein *Semi-Entscheidungsverfahren* für L .

- 2) *rekursiv aufzählbar*, falls L von einer Aufzähl-Turingmaschine aufgezählt wird. Diese ist wie folgt definiert:

Eine *Aufzähl-Turingmaschine* M ist eine DTM, die einen speziellen Ausgabezustand q_{Ausgabe} hat.

Eine *Ausgabekonfiguration* ist von der Form

$$uq_{\text{Ausgabe}}wav \text{ mit } u, v \in \Gamma^*, w \in \Sigma^* \text{ und } a \in \Gamma \setminus \Sigma.$$

Diese Konfiguration hat w als *Ausgabe*.

Die durch M *aufgezählte Relation* ist

$$R = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ ist Ausgabe einer Ausgabekonfiguration, die von } M \text{ ausgehend von Startkonfiguration } q_0 \text{ erreicht wird}\}.$$

Wir nennen M dann ein *Aufzählverfahren* für L .

Im Gegensatz zu einem Entscheidungsverfahren terminiert ein Semi-Entscheidungsverfahren also nur auf positiven Eingaben. In der Tat ist Terminierung ja sogar die verwendete Akzeptanzbedingung. Man überlegt sich leicht, dass eine Sprache L semi-entscheidbar

ist gdw. L der Definitionsbereich einer berechenbaren einstelligen partiellen Funktion ist. Beachte auch, dass es bei Aufzähl-TMs erlaubt ist, dass dasselbe Wort mehrfach aufgezählt wird.

Als Beispiel für die obigen Begriffe überlegen wir uns kurz, dass jede Typ 0-Sprache sowohl semi-entscheidbar als auch rekursiv aufzählbar ist. Sei G eine Typ 0-Grammatik. Eine DTM M , die ein Semi-Entscheidungsverfahren für $L(G)$ ist, arbeitet bei Eingabe von w wie folgt: verwalte eine Menge M von bereits abgeleiteten Wörtern (die nicht unbedingt Terminalwörter sein müssen); starte mit $M = \{S\}$ wobei S das Startsymbol von G ist; führe dann immer wieder folgenden Schritt aus: erzeuge alle Wörter, die sich aus Wörtern in M in einem Schritt mit einer Regel aus G herleiten lassen und füge alle diese Wörter zu M hinzu. Terminiere, sobald das Eingabewort w in M gefunden wird.

Die beschriebene DTM lässt sich leicht in ein Aufzählverfahren für $L(G)$ umwandeln. Jedes neue Wort, das aus den Wörtern in M in einem Schritt hergeleitet werden kann wird (per Ausgabestatus) ausgegeben wenn es ein Terminalwort ist; da es kein Eingabewort w mehr gibt, entfällt der Test, ob dieses sich in M befindet.

Es ist kein Zufall, dass wir dasselbe Beispiel für Semi-Entscheidbarkeit und rekursive Aufzählbarkeit verwenden. Das folgende Resultat zeigt den engen Zusammenhang beider Begriffe und stellt zudem eine Verbindung zwischen Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit her.

Satz 17.2

Es sei $L \subseteq \Sigma^$.*

- 1) *L ist rekursiv aufzählbar gdw. L ist semi-entscheidbar.*
- 2) *Ist L entscheidbar, so auch semi-entscheidbar.*
- 3) *L ist entscheidbar gdw. L und \bar{L} semi-entscheidbar sind.*

Beweis.

- 1) „ \Rightarrow “: Es sei L rekursiv aufzählbar und M eine Aufzähl-DTM für L . Die Maschine M' , die ein Semi-Entscheidungsverfahren für L ist, arbeitet wie folgt:

- Sie speichert die Eingabe w auf zusätzliches Band
- Sie beginnt mit der Aufzählung von L .
- Bei jeder Ausgabekonfiguration überprüft sie, ob die entsprechende Ausgabe mit w übereinstimmt. Wenn ja, so terminiert M' . Sonst sucht sie die nächste Ausgabekonfiguration von M .
- Terminiert M , ohne dass w ausgegeben wurde, so gehe in Endlosschleife.

M' terminiert daher genau dann nicht, wenn w nicht in der Aufzählung vorkommt.

„ \Leftarrow “: Es sei M ein Semi-Entscheidungsverfahren für L und

$$\Sigma^* = \{w_1, w_2, w_3, \dots\}$$

Die Maschine M' arbeitet wie folgt:

- 1) Führe einen Schritt der Berechnung von M auf Eingabe w_1 aus
- 2) Führe zwei Schritte der Berechnung von M auf Eingaben w_1 und w_2 aus
- ⋮
- n) Führe n Schritte der Berechnung von M auf Eingaben w_1, \dots, w_n aus
- ⋮

Terminiert M für eine dieser Eingaben, so gebe diese Eingabe aus und mache weiter.

Beachte:

Man kann nicht M zunächst auf Eingabe w_1 zu Ende laufen lassen, da M auf w_1 nicht terminieren muss.

- 2) Eine DTM M , die L entscheidet, wird wie folgt modifiziert:
 - hält M in nicht-akzeptierender Stoppkonfiguration, so gehe in Endlosschleife.
 - keine Änderung, wenn M in akzeptierender Stoppkonfiguration stoppt.
- 3) „ \Rightarrow “: Ergibt sich aus 2) und 3).

„ \Leftarrow “: Sind L und \bar{L} semi-entscheidbar, so mit 1) auch rekursiv aufzählbar.

Für Eingabe w lässt man die Aufzähl-DTMs M und M' für L und \bar{L} parallel laufen (d.h. jeweils abwechselnd ein Schritt von M auf einem Band gefolgt von einem Schritt von M' auf dem anderen).

Die Eingabe w kommt in einer der beiden Aufzählungen vor:

$$w \in \Sigma^* = L \cup \bar{L}$$

Kommt w bei M vor, so erzeuge Ausgabe a , sonst Ausgabe ε .

□

Wir analysieren nun beispielhaft die Semi-Entscheidbarkeit einiger relevanter Probleme. Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei eine *universelle Turingmaschine* U , die wie ein Interpreter für Programmiersprachen funktioniert und damit *jede* Turingmaschine simulieren kann. U erhält als Eingabe

- die Kodierung der zu simulierenden Turingmaschine M als Wort;
- das Eingabewort w , auf dem M simuliert werden soll.

Genauer gesagt erhält U als Eingabe das Wort $\text{code}(M)\#\#\#w$, wobei $\text{code}(M)$ die Kodierung von M aus Kapitel 15 ist. Man kann leicht die kodierte DTM von ihrer Eingabe w trennen: letztere findet sich nach dem zweiten $\#\#\#$ -Block (denn der erste solche Block befindet sich innerhalb von $\text{code}(M)$). Die universelle Turingmaschine akzeptiert die Eingabe $\text{code}(M)\#\#\#w$ gdw. w von M akzeptiert wird. Wir betrachten der Einfachheit halber Turingmaschinen über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Täten wir das nicht, dann müsste das Eingabealphabet von U unendlich sein, damit alle Eingabewörter w Teil der Eingaben $\text{code}(M)\#\#\#w$ für U sein können. Die Alternative ist, auch die Wörter w in der Eingabe für U zu kodieren.

Satz 17.3

Es gibt eine universelle DTM U über Σ , d.h. eine DTM mit der folgenden Eigenschaft: Für alle DTM M und alle $w \in \Sigma^$ gilt:*

$$U \text{ akzeptiert } \text{code}(M)\#\#\#w \text{ gdw. } M \text{ akzeptiert } w.$$

Beweis. U führt bei Eingabe $\text{code}(M)\#\#\#w$ die M -Berechnung

$$q_0w = k_0 \vdash_M k_1 \vdash_M \dots$$

in kodierter Form aus, d.h. U erzeugt sukzessive Bandbeschriftungen

$$\text{code}(M)\text{code}(k_0), \text{code}(M)\text{code}(k_1), \text{code}(M)\text{code}(k_2), \dots$$

Wir brauchen also noch eine *Kodierung von Konfigurationen als Wörter*:

$$\text{code}(a_{i_1} \dots a_{i_l} q_j a_{i_{l+1}} \dots a_{i_r}) = \text{bin}(i_1)\#\dots\#\text{bin}(i_l)\#\text{bin}(j)\#\#\text{bin}(i_{l+1})\#\dots\#\text{bin}(i_r)$$

Beachte, dass die Kopfposition durch $\#\#$ gekennzeichnet ist und dass der aktuelle Zustand unmittelbar links vom $\#\#$ -Marker repräsentiert ist.

Arbeitsweise von U bei Eingabe $\text{code}(M)w$:

- Wandle w in die Kodierung der Anfangskonfiguration, erzeuge also

$$\text{code}(M)\#\#\#\text{code}(q_0w).$$

- Simuliere die Schritte von M , ausgehend vom jeweiligen Konfigurationskode

$$\dots \#\text{bin}(j)\#\#\text{bin}(i)\#\dots \text{ (Zustand } q_j, \text{ gelesenes Symbol } a_i).$$

- Suche eine Transitionskodierung $\text{code}(t)$ in $\text{code}(M)$, die mit $\text{bin}(j)\#\text{bin}(i)$ beginnt.
- Falls es so ein $\text{code}(t)$ gibt, ändere die Konfigurationskodierung entsprechend t .
- Sonst geht U in Stoppzustand. Dieser ist akzeptierend gdw. $\text{bin}(j)$ in der Kodierung der Endzustandsmenge vorkommt.

Es ist nicht schwer, die Schritte im Detail auszuarbeiten. Beachte allerdings, dass jede dieser Schritte viele Einzelschritte von U erfordert. Um z.B. ein $\text{code}(t)$ zu finden, das mit $\text{bin}(j)\#\text{bin}(i)$ beginnt, muss man die aktuelle Konfiguration sukzessive mit *jeder* Transitionskodierung vergleichen. Jeder einzelne solche Vergleich erfordert wiederholtes Hin- und Herlaufen zwischen der aktuellen Konfiguration und dem gerade betrachteten $\text{code}(t)$ (Vergleich Symbol für Symbol).

□

Wir werden nun die Semi-Entscheidbarkeit einiger Probleme und ihrer Komplemente betrachten, beginnend mit dem Wortproblem.

Satz 17.4

Das Wortproblem für DTMs ist semi-entscheidbar, sein Komplement ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis.

- 1) Das Wortproblem ist semi-entscheidbar: Bei Eingabe von M und w starte die universelle Turingmaschine U auf $\text{code}(M)\#\#\#w$. Wenn U akzeptiert, dann stoppe. Wenn U anhält und verwirft, gehe in Endlosschleife.
- 2) Das Komplement des Wortproblems ist nicht semi-entscheidbar: Folgt aus 1), Punkt 3 von Satz 17.2 und der Unentscheidbarkeit des Wortproblems.

□

Satz 17.4 erlaubt uns, die letzte verbliebene Abschlusseigenschaft von Typ 0-Sprachen zu klären: den Abschluss unter Komplement. Zunächst beobachten wir, dass die Semi-Entscheidbarkeit von Sprachen und deren Erkennbarkeit durch Turingmaschinen äquivalent zueinander sind.

Bemerkung 17.5. Eine Sprache L ist semi-entscheidbar gdw. sie Turing-erkennbar ist:

- Turing-erkennbar \Rightarrow semi-entscheidbar

Wir können mit Satz 11.6 o.B.d.A. annehmen, dass es eine DTM M gibt, die L erkennt. Bei $w \notin L$ kann M in nicht-Endzustand halten, wohingegen ein Semi-Entscheidungsverfahren nicht terminieren darf.

Modifikation: wenn M bei $w \notin L$ in nicht-Endzustand anhält, dann gehe in Endlosschleife.

- semi-entscheidbar \Rightarrow Turing-erkennbar

Semi-Entscheidungsverfahren M für L kann bei $w \in L$ in beliebigem Zustand anhalten, wohingegen es bei Turing-Erkennbarkeit ein Endzustand sein muß.

Modifikation: wenn M bei $w \in L$ in nicht-Endzustand anhält, dann wechsle in einem Schritt in Endzustand (der keine Folgezustände hat).

Satz 17.6

\mathcal{L}_0 ist nicht unter Komplement abgeschlossen.

An dieser Stelle haben wir die Abschlusseigenschaften aller in dieser Vorlesung behandelten Sprachklassen vollständig geklärt. Eine zusammenfassende Tabelle findet sich in Anhang C.

Wir untersuchen nun das Leerheitsproblem in Bezug auf Semi-Entscheidbarkeit. Es stellt sich heraus, dass es sich genau „andersherum“ verhält als das Wortproblem: das Problem selbst ist nicht semi-entscheidbar, sein Komplement aber schon.

Satz 17.7

Das Leerheitsproblem für DTMs ist nicht semi-entscheidbar, sein Komplement ist semi-entscheidbar.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 17.4 genügt es, zu zeigen, dass das Komplement des Leerheitsproblems semi-entscheidbar ist. Mit Satz 17.2 und der Unentscheidbarkeit des Leerheitsproblems folgt dann, dass sein Komplement nicht semi-entscheidbar ist.

Das Semi-Entscheidungsverfahren für das Komplement des Leerheitsproblems verwendet die universelle Turingmaschine U . Als zusätzliche Ingredienz ist es nicht schwer, eine Turingmaschine zu konstruieren, die bei Eingabe von $\text{code}(M)$ eine Aufzählung w_1, w_2, \dots aller Wörter über dem Eingabealphabet von M ausgibt.

Das Semi-Entscheidungsverfahren für das Leerheitsproblem geht nun wie folgt vor: auf gegebener Eingabe M ,

- (1) führe einen Schritt der Berechnung von M auf Eingabe w_1 aus,
- (2) führe zwei Schritte der Berechnung von M auf Eingaben w_1 und w_2 aus,
- ⋮
- (n) führe n Schritte der Berechnung von M auf den Eingaben w_1, \dots, w_n aus,
- ⋮

Akzeptiert M eine der Eingaben, so terminiere (denn dann ist $L(M) \neq \emptyset$). Sonst fahre fort. □

Das Wortproblem und das Leerheitsproblem für DTMs verhalten sich also unterschiedlich bezüglich Semi-Entscheidbarkeit. Das Äquivalenzproblem zeigt wieder ein anderes Verhalten: weder das Problem selbst noch sein Komplement sind semi-entscheidbar. In diesem Fall kann man natürlich nicht mehr wie in den Beweisen der Sätze 17.4 und 17.7 argumentieren. Stattdessen nutzt man folgende Beobachtung, deren Beweis vollständig analog zu Lemma 15.11 ist.

Lemma 17.8

- 1) $L_1 \leq L_2$ und L_2 semi-entscheidbar $\Rightarrow L_1$ semi-entscheidbar.
- 2) $L_1 \leq L_2$ und L_1 nicht semi-entscheidbar $\Rightarrow L_2$ nicht semi-entscheidbar.

Satz 17.9

Das Äquivalenzproblem für DTMs ist nicht semi-entscheidbar, sein Komplement ist ebenfalls nicht semi-entscheidbar.

Beweis. Mit Lemma 17.8 genügt es, zu zeigen, dass das (nicht semi-entscheidbare) Komplement des Wortproblems auf das Äquivalenzproblem reduziert werden kann und auch auf sein Komplement.

Zu diesem Zweck konstruieren wir für eine gegebene DTM M und Eingabe w für M eine DTM M' , die sich wie folgt verhält:

- M' ersetzt die Eingabe durch w , verhält sich dann wie M
- akzeptiert M , so akzeptiert auch M' ; verwirft M , so geht M' in Endlosschleife.

Dies liefert beide gewünschte Reduktionen. Sei M_\emptyset eine feste DTM mit $L(M_\emptyset) = \emptyset$ und M_{Σ^*} eine feste DTM mit $L(M_{\Sigma^*}) = \Sigma^*$. Es gilt:

$$\begin{aligned} w \notin L(M) & \text{ gdw. } L(M') = \emptyset & \text{ gdw. } L(M') = L(M_\emptyset) \\ w \notin L(M) & \text{ gdw. } L(M') \neq \Sigma^* & \text{ gdw. } L(M') \neq L(M_{\Sigma^*}). \end{aligned}$$

□

Diese Resultate zeigen, dass obwohl beide Probleme unentscheidbar sind, das Äquivalenzproblem echt schwerer ist als das Wortproblem (und als das Leerheitsproblem). In der Tat haben wir im Beweis von Satz 17.9 das Wortproblem auf das Äquivalenzproblem reduziert, aber wegen Satz 17.4 und 17.9 ist die umgekehrte Reduktion nicht möglich. Das ist es, was hier mit „echt schwerer“ gemeint ist. Es gibt sogar unendliche Folgen von (unentscheidbaren) Problemen L_1, L_2, \dots so dass

$$L_1 \leq L_2 \leq L_3 \leq \dots \quad \text{und} \quad \dots \not\leq L_3 \not\leq L_2 \not\leq L_1.$$

Man spricht hier auch vom *Grad der Unlösbarkeit* oder vom *Turing-Grad*.

Wir werfen im Folgenden noch einen kurzen Blick auf dieses Thema. Dazu führen wir das interessante Konzept der *Orakel-Turingmaschine* ein, das sowohl in der Theorie der Berechenbarkeit als auch in der Komplexitätstheorie von Nutzen ist.

Definition 17.10 (Orakel-Turingmaschine)

Eine *Orakel-Turingmaschine (OTM)* M ist eine DTM, die mit einem *Orakel* $O \subseteq \Sigma^*$ ausgestattet ist. M hat

- ein zusätzliches Orakelband sowie

- drei spezielle Zustände $q_?$, q_+ , q_- .

Der Folgezustand von $q_?$ ist q_+ wenn das momentane Wort auf dem Orakelband in der Orakelsprache O enthalten ist und q_- sonst. Kopfposition und Bandinhalte bleiben dabei unverändert. Ansonsten verhalten sich q_+ und q_- wie normale Zustände.

Man beachte, dass die Orakelsprache O auch eine unentscheidbare Sprache sein kann. Das Orakel liefert trotzdem in einem Schritt die gewünschte Antwort. Eine OTM gleicht also einem Gedankenexperiment: was wäre möglich, wenn z.B. das Wortproblem für DTMs entscheidbar wäre? Orakel-Turingmaschinen liefern auch einen natürlichen, alternativen Reduktionsbegriff.

Definition 17.11 (Turing-reduzierbar)

$L_1 \subseteq \Sigma^*$ ist *Turing-reduzierbar* auf $L_2 \subseteq \Sigma^*$ wenn es eine OTM M mit L_2 -Orakel gibt, die L_1 in folgendem Sinne *löst*:

$$L(M) = L_1 \text{ und } M \text{ stoppt auf jeder Eingabe.}$$

Wir schreiben dann $L_1 \leq_T L_2$.

Man beachte den Unterschied zwischen Reduzierbarkeit im Sinne von Definition 15.9 und Turing-Reduzierbarkeit: Turing-Reduzierbarkeit von L_1 auf L_2 bedeutet intuitiv, dass es ein Entscheidungsverfahren für L_1 gibt, wenn man ein Entscheidungsverfahren für L_2 hat und dieses beliebig oft und in beliebiger Weise als „Subroutine“ verwenden darf. Bei Reduzierbarkeit gemäß Definition 15.9, die wir zwecks Unterscheidung von nun an *many-one Reduzierbarkeit* nennen, darf die Subroutine nur einmal am Schluß gerufen werden und ihr Ergebnis muss direkt zurückgegeben werden (und darf z.B. nicht Komplementiert werden). Wir sprechen in Definition 17.11 von *Lösbarkeit* statt von *Entscheidbarkeit*, weil Lösbarkeit mit OTMs natürlich nicht mit Entscheidbarkeit (mit DTMs) übereinstimmt (die Orakelsprache kann ja unentscheidbar sein).

Es stellt sich die Frage, wie beide Reduktionsbegriffe zusammenhängen. Es stellt sich heraus, dass many-one Reduzierbarkeit der *feinere* Reduktionsbegriff ist, in folgendem Sinne.

Lemma 17.12

- 1) Für alle L_1, L_2 gilt: wenn $L_1 \leq L_2$, dann $L_1 \leq_T L_2$
- 2) die Umkehrung von Punkt 1 gilt nicht.

Beweis. Für Punkt 1 nehmen wir an, dass $L_1 \leq L_2$. Dann gibt es nach Definition von many-one Reduzierbarkeit eine DTM M , die zu jeder Eingabe w eine Ausgabe $f(w)$ liefert, so dass $w \in L_1$ gdw. $f(w) \in L_2$. Modifiziere M so, dass $f(w)$ stattdessen auf das Orakelband geschrieben und dann ein L_2 -Orakel gerufen wird. Wir erhalten eine OTM mit L_2 -Orakel, die offensichtlich L_1 löst, also $L_1 \leq_T L_2$.

Für Punkt 2 überlegen wir uns zunächst, dass *jede* Sprache L auf ihr Komplement \bar{L} Turing-reduzierbar ist: gegeben Eingabe w für L , starte \bar{L} -Orakel auf w , komplementiere dann das Ergebnis. Wir wissen aber, dass beispielsweise das Leerheitsproblem nicht many-one reduzierbar auf sein Komplement ist, denn sonst wäre es mit Lemma 17.8 semi-entscheidbar. \square

In der Theorie der Berechenbarkeit wurde der Raum unentscheidbarer Problem sowohl bezüglich Turing-Reduktionen als auch bezüglich many-one Reduktionen intensiv studiert. Hier beschränken wir uns darauf, eine unendliche Familie von Sprachen zu identifizieren, die immer schwerer werden (bzgl. beider Arten von Reduktionen).

- W_0 das Wortproblem für DTMs (als formale Sprache),
- W_1 das Wortproblem für DTMs mit W_0 -Orakel,
- W_2 das Wortproblem für DTMs mit W_1 -Orakel,
- usw.

Diese Probleme mögen recht esoterisch erscheinen. Sie sind jedoch vollkommen wohldefiniert und auch nicht “irrealer” als jedes andere wohldefinierte Problem.

Satz 17.13

Für alle $i \geq 0$ gilt: $W_i \leq W_{i+1}$ aber $W_{i+1} \not\leq_T W_i$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $W_i \leq W_{i+1}$. Um W_i zu lösen, können wir bei Eingabe von (M, w)

1. eine OTM M' mit W_i -Orakel konstruieren, die ihre Eingabe auf das Orakelband schreibt, das Orakel ruft, und das Ergebnis einfach zurückgibt
2. dann M' auf Eingabe (M, w) starten.

Das liefert offensichtlich many-one Reduktion von W_i auf W_{i+1} : gegeben Eingabe (M, w) für W_i , konstruiere Eingabe $f(M, w) = (M', (M, w))$ für W_{i+1} .

Für den Beweis von $W_{i+1} \not\leq_T W_i$ beschränken wir uns auf eine Skizze. Sei W_{i+1}^s das *spezielle Wortproblem für OTMs mit W_i -Orakel*: gegeben eine (Kodierung von) OTM M mit W_i -Orakel, entscheide ob M die eigene Kodierung als Eingabe akzeptiert.

Es genügt, zu zeigen: keine OTM mit W_i -Orakel löst W_{i+1}^s . Denn wenn $W_{i+1} \leq_T W_i$ gelten würde, dann gäbe es per Definition von Turing-Reduzierbarkeit eine OTM M mit W_i -Orakel, die W_{i+1} löst; offensichtlich ließe sich M leicht auf W_{i+1}^s anpassen.

Der Beweis, dass W_{i+1}^s von keiner OTM mit W_i -Orakel gelöst wird ist *exakt derselbe* wie für die Unentscheidbarkeit der ursprünglichen Wortproblems W_0 . Wir geben hier nur eine übersicht und fordern den Leser auf, die Details nochmal selbständig nachzuvollziehen:

- man zeigt zunächst: das *Komplement* von W_{i+1}^s wird nicht von einer OTM mit W_i -Orakel gelöst (die Komplementsprache implementiert Diagonalisierung);

- dazu verwendet man denselben Widerspruchsbeweis, wie vorher (wenn es eine lösende OTM gäbe, so führt ihr Start auf der eigenen Kodierung zu einem Widerspruch)
- also gibt es auch keine OTM mit W_i -Orakel, die W_{i+1}^s löst, denn daraus könnte man durch Vertauschen der Endzustände mit den Nicht-Endzuständen eine OTM konstruieren, die das Komplement von W_{i+1}^s löst.

□

Der Beweis von Satz 17.13 zeigt, dass die Beweismethode Diagonalisierung auf Orakel *relativiert*, also auch in Gegenwart von Orakeln funktioniert. Für den obigen Beweis ist das von Vorteil. Es zeigt aber auch die Grenzen der Diagonalisierung auf. Man kann zum Beispiel beweisen, dass das wichtige P vs. NP Problem der Komplexitätstheorie *nicht* mittels Diagonalisierung gelöst werden kann. Grund dafür ist genau die beschriebene Relativierung auf Orakel.

IV. Komplexität

Einführung

In der Praxis genügt es nicht zu wissen, dass eine Funktion berechenbar ist. Man interessiert sich auch dafür, wie groß der *Aufwand* zur Berechnung ist. Aufwand bezieht sich hierbei auf den Ressourcenverbrauch, wobei folgende Ressourcen die wichtigste Rolle spielen:

Rechenzeit

(bei TM: Anzahl der Übergänge bis zum Halten)

Speicherplatz

(bei TM: Anzahl der benutzten Felder)

Beides soll abgeschätzt werden als *Funktion in der Größe der Eingabe*. Dem liegt die Idee zugrunde, dass mit größeren Eingaben üblicherweise auch der Ressourcenbedarf zum Verarbeiten der Eingabe wächst.

Es ist wichtig, sauber zwischen der Komplexität von Algorithmen und der von Problemen zu unterscheiden.

Komplexität eines konkreten Algorithmus/Programmes. Wieviel Ressourcen verbraucht dieser Algorithmus? Derartige Fragestellungen gehören in das Gebiet der Algorithmentheorie und werden hier nicht primär betrachtet.

Komplexität eines Entscheidungsproblems: Wieviel Aufwand benötigt der „beste“ Algorithmus, der ein gegebenes Problem löst? Dies ist die Fragestellung, mit der sich die Komplexitätstheorie beschäftigt. Wir setzen dabei wieder „Algorithmus“ mit Turingmaschine gleich.

Die Komplexitätstheorie liefert äußerst wichtige Anhaltspunkte dafür, welche Probleme effizient lösbar sind und welche nicht. Wir betrachten die klassische Komplexitätstheorie, die sich immer am „schlimmsten Fall (worst case)“ orientiert, also an Eingaben mit maximalem Ressourcenbedarf. Die worst case Annahme ist für viele praktische Anwendungen relevant, für andere aber deutlich zu pessimistisch, da dort der schlimmste Fall selten oder niemals vorkommt. Man kann auch den „durchschnittlichen Fall (average case)“ analysieren. Dies ist jedoch technisch anspruchsvoller und erfordert ein genaues Verständnis davon, was ein durchschnittlicher Fall eigentlich ist. Auch in praktischen Anwendungen ist es oft nicht einfach, eine formale Beschreibung davon anzugeben.

18. Einige Komplexitätsklassen

Eine Komplexitätsklasse ist eine Klasse von Entscheidungsproblemen, die mit einer bestimmten „Menge“ einer Ressource gelöst werden können. Wir führen zunächst ein allgemeines Schema zur Definition von *Komplexitätsklassen* ein und fixieren dann einige fundamentale *Zeit-* und *Platzkomplexitätsklassen*. Im Gegensatz zur Berechenbarkeit ist es in der Komplexitätstheorie sehr wichtig, zwischen deterministischen und nicht-deterministischen Turingmaschinen zu unterscheiden.

Zunächst führen wir formal ein, was es heißt, dass der Aufwand durch eine Funktion der Größe der Eingabe *beschränkt* ist.

Definition 18.1 (*f(n)-zeitbeschränkt, f(n)-platzbeschränkt*)

Es sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Funktion und M eine DTM über Σ .

- 1) M heißt *f(n)-zeitbeschränkt*, falls für alle $w \in \Sigma^*$ die Maschine M bei Eingabe w nach $\leq f(|w|)$ Schritten anhält.
- 2) M heißt *f(n)-platzbeschränkt*, falls für alle $w \in \Sigma^*$ die Maschine M bei Eingabe w $\leq f(|w|)$ viele Felder des Bandes benutzt.

Auf *NTM* kann man die Definition dadurch übertragen, dass die Aufwandsbeschränkung für *alle* bei der gegebenen Eingabe *möglichen Berechnungen* zutreffen muss. Beachte dass eine *f(n)-zeitbeschränkte* TM auf jeder Eingabe terminiert; für eine *f(n)-platzbeschränkte* TM muß das nicht unbedingt der Fall sein.

Definition 18.2 (*Komplexitätsklassen*)

$$\begin{aligned} \text{DTIME}(f(n)) &:= \{L \mid \text{es gibt eine } f(n)\text{-zeitbeschränkte DTM } M \text{ mit } L(M) = L\} \\ \text{NTIME}(f(n)) &:= \{L \mid \text{es gibt eine } f(n)\text{-zeitbeschränkte NTM } M \text{ mit } L(M) = L\} \\ \text{DSPACE}(f(n)) &:= \{L \mid \text{es gibt eine } f(n)\text{-platzbeschränkte DTM } M \text{ mit } L(M) = L\} \\ \text{NSPACE}(f(n)) &:= \{L \mid \text{es gibt eine } f(n)\text{-platzbeschränkte NTM } M \text{ mit } L(M) = L\} \end{aligned}$$

Wegen der Bemerkung vor Definition 18.2 enthalten alle Komplexitätsklassen der Form $\text{DTIME}(f(n))$ und $\text{NTIME}(f(n))$ nur entscheidbare Probleme. Man kann zeigen, dass das auch für alle Klassen der Form $\text{DSPACE}(f(n))$ und $\text{NSPACE}(f(n))$ gilt.

Im Folgenden beobachten wir einige elementare Zusammenhänge zwischen Komplexitätsklassen.

Satz 18.3

- 1) $\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{DSPACE}(f(n)) \subseteq \text{NSPACE}(f(n))$
- 2) $\text{DTIME}(f(n)) \subseteq \text{NTIME}(f(n))$
- 3) $\text{NSPACE}(f(n)) \subseteq \text{DTIME}(2^{\mathcal{O}(f(n))})$ wenn $f(n)$ von einer $f(n)$ -zeitbeschränkten DTM berechnet werden kann.¹

¹Wobei sowohl die Eingabe als auch die Ausgabe unär kodiert sind.

Die Einschränkung in Punkt 3) von Satz 18.3 schließt extreme Fälle aus, zum Beispiel Funktionen $f(n)$, die nicht berechenbar sind. Alle für uns interessanten Funktionen wie Polynome und Exponentialfunktionen erfüllen die genannte Eigenschaft.

Beweis. Teile 1) und 2) folgen unmittelbar daraus, dass man in k Schritten höchstens k Felder benutzen kann und jede DTM auch eine NTM ist.

Im Folgenden skizzieren wir den Beweis von Teil 3). Sei $L \in \text{NSPACE}(f(n))$. Dann gibt es eine $f(n)$ -platzbeschränkte NTM M mit $L(M) = L$. Mittels der Konstruktion aus dem Beweis von Satz 11.6 könnten wir M in eine DTM M' wandeln, so dass $L(M) = L(M')$. Allerdings terminiert M' nicht auf jeder Eingabe und ist daher nicht $2^{\mathcal{O}(f(n))}$ -zeitbeschränkt. Wir brauchen also eine bessere Konstruktion.

Wir stellen dazu die Berechnungen von M auf Eingaben w der Länge n als gerichteten Graphen dar, den sogenannten *Konfigurationsgraph* $G_{M,n} = (V_{M,n}, E_{M,n})$, wobei

- $V_{M,n}$ die Menge der Konfigurationen von M mit Länge höchstens $f(n)$ ist und
- $E_{M,n}$ diejenigen Kanten (k, k') enthält, so dass k' von k in einem Berechnungsschritt erreicht werden kann.

Es ist nun offensichtlich, dass w von M akzeptiert wird gdw. in $G_{M,n}$ vom Knoten q_0w aus eine akzeptierende Stoppkonfiguration erreichbar ist (wenn also ein Pfad von M zu einer solchen Konfiguration existiert).

Eine terminierende DTM M' mit $L(M') = L(M)$ kann also wie folgt vorgehen:

- Bei Eingabe w der Länge n , konstruiere Konfigurationsgraph $G_{M,n}$,²
- überprüfe, ob von q_0w aus eine akzeptierende Stoppkonfiguration erreichbar ist.

Wir analysieren nun den Zeitbedarf von M' . Zunächst schätzen wir die Größe von $G_{M,n}$. Die Anzahl der Konfigurationen von M der Länge $\leq f(n)$ ist beschränkt durch

$$\text{akonf}_M(n) := |Q| \cdot f(n) \cdot |\Gamma|^{f(n)}$$

wobei $|Q|$ die Anzahl der möglichen Zustände beschreibt, $f(n)$ die Anzahl der möglichen Kopfpositionen und $|\Gamma|^{f(n)}$ die Anzahl der möglichen Beschriftungen von Bändern der Länge $f(n)$.

Man sieht nun leicht, dass $|V_{M,n}| = \text{akonf}_M(n) \in 2^{\mathcal{O}(f(n))}$ (beachte, dass $|Q|$ und $|\Gamma|$ Konstanten sind, da sie nicht von der Eingabe abhängen) und damit auch $|E_{M,n}| \in 2^{\mathcal{O}(f(n))}$. Zudem ist es für eine DTM einfach, den Graph $G_{M,n}$ in Zeit $2^{\mathcal{O}(f(n))}$ zu konstruieren. Es müssen danach noch $\leq 2^{\mathcal{O}(f(n))}$ Erreichbarkeitstests gemacht werden (einer für jede akzeptierende Stoppkonfiguration in $G_{M,n}$), von denen jeder lineare Zeit (in der Größe des Graphen $G_{M,n}$) benötigt. Insgesamt ergibt sich ein Zeitbedarf von $2^{\mathcal{O}(f(n))}$. \square

²Hierzu muß man zunächst $f(n)$ berechnen; da $f(n)$ von einer $f(n)$ -zeitbeschränkten DTM berechnet werden kann, ist dies in der zur Verfügung stehenden Zeit möglich.

Wir betrachten die folgenden *fundamentalen* Komplexitätsklassen:

Definition 18.4 (P, NP, PSpace, NPSPACE, ExpTime)

$$\begin{aligned}
 P &:= \bigcup_{p \text{ Polynom in } n} \text{DTIME}(p(n)) \\
 NP &:= \bigcup_{p \text{ Polynom in } n} \text{NTIME}(p(n)) \\
 \text{PSpace} &:= \bigcup_{p \text{ Polynom in } n} \text{DSPACE}(p(n)) \\
 \text{NPSPACE} &:= \bigcup_{p \text{ Polynom in } n} \text{NSPACE}(p(n)) \\
 \text{ExpTime} &:= \bigcup_{p \text{ Polynom in } n} \text{DTIME}(2^{p(n)})
 \end{aligned}$$

Aus Satz 18.3 ergibt sich sofort der folgende Zusammenhang zwischen diesen Klassen:

Korollar 18.5

$$\begin{array}{l}
 P \subseteq \text{PSpace} \\
 \cap \qquad \qquad \cap \\
 NP \subseteq \text{NPSPACE} \subseteq \text{ExpTime}
 \end{array}$$

Wir werden später noch sehen, dass PSpace und NPSPACE dieselbe Klasse sind, also $\text{PSpace} = \text{NPSPACE}$ gilt. Daher betrachtet man die Klasse NPSPACE in der Regel nicht explizit. Mit obigem Korollar ergibt sich also folgendes Bild:

$$P \subseteq NP \subseteq \text{PSpace} \subseteq \text{ExpTime}.$$

Besonders wichtig sind die Komplexitätsklassen P und NP:

- Die Probleme in P werden im allgemeinen als die *effizient lösbaren* Probleme angesehen (engl. *tractable*, d.h. machbar), siehe auch Appendix A
- Im Gegensatz dazu nimmt man an, dass NP viele Probleme enthält, die *nicht effizient lösbar* sind (engl. *intractable*)

Die Bedeutung der Komplexitätsklasse P ist dadurch hinreichend motiviert. Im Gegensatz dazu ist die Bedeutung von NP etwas schwieriger einzusehen, da nicht-deterministische Maschinen in der Praxis ja nicht existieren. Auch diese Klasse ist aber von großer Bedeutung, da

1. sehr viele natürliche Probleme aus der Informatik in NP enthalten sind, von denen
2. angenommen wird, dass sie nicht in P (also nicht effizient lösbar) sind.

Wir betrachten hier drei typische Beispiele für Probleme in NP, die wir später noch genauer analysieren werden. Das erste solche Problem ist das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik, für eine formale Definition siehe Appendix B. Dieses Problem repräsentieren wir als Menge SAT aller erfüllbaren aussagenlogischen Formeln. Genauer gesagt enthält SAT nicht die Formeln selbst, sondern eine geeignete Kodierung als Wörter. So muß man beispielsweise die potentiell unendlich vielen Aussagenvariablen x_1, x_2, \dots mittels eines endlichen Alphabetes darstellen. Von solchen Details, die leicht auszuarbeiten sind, werden wir im Folgenden aber abstrahieren.

Lemma 18.6

SAT \in NP.

Beweis. Die NTM, die SAT in polynomieller Zeit entscheidet, arbeitet wie folgt:

- Die Variablen in der Eingabeformel φ seien x_1, \dots, x_n . Schreibe nicht-deterministisch ein beliebiges Wort $u \in \{0, 1\}^*$ der Länge n hinter die Eingabe auf das Band
- Betrachte u als Belegung mit $x_i \mapsto 1$ gdw. das i -te Symbol von u eine 1 ist.
Überprüfe nun deterministisch und in Polynomialzeit, ob diese Belegung die Formel φ erfüllt (man überlegt sich leicht, dass dies tatsächlich möglich ist). Akzeptiere, wenn das der Fall ist und verwirf sonst.

Die NTM akzeptiert ihre Eingabe gdw. es eine erfolgreiche Berechnung gibt gdw. die Eingabe eine erfüllbar aussagenlogische Formel ist.

Man beachte, dass die Belegungen für φ genau den Berechnungen der NTM entsprechen. Von beiden gibt es exponentiell viele, jede einzelne ist aber nur polynomiell groß bzw. lang. Daher ist polynomielle Zeit ausreichend. \square

Wir betrachten ein weiteres Problem in NP.

Definition 18.7 (CLIQUE)

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Besitzt G eine k -Clique, d.h. eine Teilmenge $C \subseteq V$ mit

- für alle $u \neq v$ in C gilt: $\{u, v\} \in E$ und
- $|C| = k$.

Also besteht CLIQUE aus all denjenigen Paaren (G, k) , so dass der ungerichtete Graph G eine k -Clique enthält, geeignet repräsentiert als formale Sprache.

Lemma 18.8

CLIQUE \in NP.

Beweis. Eine NTM, die CLIQUE in polynomieller Zeit entscheidet, konstruiert man analog zum Beweis von Lemma 18.6: gegeben (G, k) ,

- schreibe nicht-deterministisch eine Knotenmenge C der Grösse k auf das Band
- überprüfe deterministisch und in Polynomialzeit, ob C eine Clique in G ist.

□

Als drittes Beispiel für ein Problem in NP sei das bekannte Traveling Salesman Problem erwähnt.

Definition 18.9 (Traveling Salesman Problem (TSP))

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$, eine Kostenzuweisung $f : E \rightarrow \mathbb{N}$ zu den Kanten und Zielkosten $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Tour durch G mit Kosten maximal k , also eine Aufzählung u_1, \dots, u_n aller Knoten in V so dass

1. $\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ für $1 \leq i < n$ sowie $\{u_n, u_1\} \in E$ und
2. $\sum_{1 \leq i \leq n} f(\{u_i, u_{i+1}\}) \leq k$.

Intuitiv beschreiben die Knoten in G Städte, die ein Handlungsreisender besuchen will. Die Kanten in G beschreiben Verbindungen zwischen Städten und die Funktion f gibt die Kosten dieser Verbindungen an. Gesucht ist nun eine günstige Rundreise, bei der jede Stadt genau einmal besucht wird und der Reisende zum Schluß wieder am Ausgangspunkt ankommt.

Lemma 18.10

TSP \in NP.

Beweis. Eine NTM, die TSP in polynomieller Zeit entscheidet, konstruiert man wieder analog zum Beweis von Lemma 18.6: gegeben $G = (V, E)$, f und k ,

- schreibe nicht-deterministisch eine Aufzählung von V auf das Band
- überprüfe deterministisch und in polynomieller Zeit, ob die Bedingungen 1-3 aus Definition 18.9 erfüllt sind.

□

Algorithmen, wie sie in den Beweisen der Lemmas 18.6, 18.8 und 18.10 verwendet wurden, formuliert man üblicherweise mittels der Metapher des *Ratens*, zum Beispiel für SAT:

- Bei Eingabe von Formel φ mit Variablen x_1, \dots, x_n , rate Wahrheitsbelegung B für x_1, \dots, x_n
- Überprüfe deterministisch und in Polyzeit, ob B die Formel φ erfüllt.

Die NTM akzeptiert also die Eingabe, wenn es *möglich* ist, so zu raten, dass die Berechnung erfolgreich ist (in akzeptierender Stoppkonfiguration endet). Man kann sich vereinfachend vorstellen, dass die Maschine *richtig rät*, sofern dies überhaupt möglich ist. Man beachte aber, dass eine polyzeitbeschränkte NTM nur ein polynomiell großes Wort raten kann und dass man deterministisch in Polyzeit prüfen können muß, ob richtig geraten wurde. So ist es zum Beispiel möglich, zu raten, ob eine gegebene TM auf dem leeren Band anhält, aber es ist dann nicht möglich zu überprüfen, ob richtig geraten wurde.

Man mag sich fragen, ob es sinnvoll ist, die Komplexitätsklassen P und NP basierend auf *Turingmaschinen* zu definieren. Könnte es nicht sein, dass man ein Problem in einer modernen Programmiersprache wie Java mit viel weniger Berechnungsschritten lösen kann als auf einer TM? Interessanterweise scheint das nicht der Fall zu sein: für alle bekannten Berechnungsmodelle gilt, dass sie sich gegenseitig mit *höchstens polynomiellem Mehraufwand* simulieren können. Dies führt zu folgender Verschärfung der Church-Turing-These.

Erweiterte Church-Turing-These:

Für jedes "vernünftige und vollständige" Berechnungsmodell gibt es ein Polynom p , so dass gilt: jedes Problem, das in diesem Modell von einem $f(n)$ -zeitbeschränkten Algorithmus entschieden werden kann, kann mittels einer $p(f(n))$ -zeitbeschränkten Turingmaschine entschieden werden, und umgekehrt.

Die erweiterte Church-Turing-These hat denselben Status wie die ursprüngliche Church-Turing-These: sie bezieht sich auf formal nicht definierte Begriffe (wie "vernünftiges Berechnungsmodell") und kann daher nicht bewiesen werden. Sie wird dennoch als gültig angenommen, da bis heute kein Gegenbeispiel gefunden werden konnte.

19. NP-vollständige Probleme

Wegen $P \subseteq NP$ enthält NP auch einfach lösbare Probleme. Es stellt sich also die Frage: welche Probleme in NP sind schwierig, also nicht in polynomieller Zeit entscheidbar? Bemerkenswerterweise hat auf diese Frage noch niemand eine wasserdichte Antwort gefunden:

- es gibt sehr viele Probleme in NP, von denen man annimmt, dass sie nicht in polynomieller Zeit zu lösen sind (z.B. SAT, CLIQUE und TSP);
- dennoch konnte man bisher von keinem einzigen Problem in NP *beweisen*, dass es nicht in P ist.

Es ist also im Prinzip nicht mal ausgeschlossen, dass die als schwierig vermuteten Probleme in NP sich doch als einfach herausstellen und daher gilt: $P = NP$. Daran glaubt jedoch kaum jemand. Ein Beweis von $P \neq NP$ steht aber nach wie vor aus. In der Tat handelt es sich dabei um das berühmteste offene Problem der theoretischen Informatik.

Um die schwierigen Probleme in NP von den einfachen abzugrenzen, obwohl nicht einmal $P \neq NP$ bekannt ist, behilft man sich mit der fundamentalen Idee der *NP-Vollständigkeit*. Intuitiv gehört jedes NP-vollständige Problem L zu den schwersten Problemen in NP, in folgendem Sinne:

für jedes Problem $L' \in NP$ gilt: das Lösen von L' erfordert *nur polynomiell mehr Zeitaufwand* als das Lösen von L .

Insbesondere gilt für jedes NP-vollständige Problem L : wenn $L \in P$, ist *jedes* Problem aus NP auch in P, es gilt also $P = NP$ (was vermutlich nicht der Fall ist).

Um *polynomiellen Mehraufwand* zu formalisieren, verfeinern wir in geeigneter Weise den Begriff der Reduktion.

Definition 19.1 (Polynomialzeitreduktion, \leq_p)

- 1) Eine Reduktion f von $L \subseteq \Sigma^*$ auf $L' \subseteq \Sigma^*$ heißt *Polynomialzeitreduktion*, wenn es ein Polynom $p(n)$ und eine $p(n)$ -zeitbeschränkte DTM gibt, die f berechnet.
- 2) Wenn es eine Polynomialzeitreduktion von L auf L' gibt, dann schreiben wir $L \leq_p L'$.

Der Beweis dieses Lemmas ähnelt dem Beweis von Lemma 19.3 und wird als Übung gelassen. Wir definieren nun die zentralen Begriffe dieses Kapitels.

Definition 19.2 (NP-hart, NP-vollständig)

- 1) Eine Sprache L heißt *NP-hart* wenn für *alle* $L' \in NP$ gilt: $L' \leq_p L$.
- 2) L heißt *NP-vollständig* wenn $L \in NP$ und L ist NP-hart.

Das folgende Lemma ist der Grund, warum die Aussage „ L ist NP-vollständig“ ein guter Ersatz für die Aussage „ $L \notin P$ “ ist, solange $P \neq NP$ nicht bewiesen ist.

Lemma 19.3

Für jede NP-vollständige Sprache L gilt: wenn $L \in P$, dann $P = NP$.

Beweis. Sei L NP-vollständig und $L \in P$. Zu zeigen: $NP \subseteq P$. Wegen der NP-Vollständigkeit von L gilt $L' \leq_p L$ für jedes $L' \in NP$. Es genügt also, zu zeigen:

$$L' \leq_p L \text{ und } L \in P \text{ impliziert } L' \in P.$$

Sei f Reduktion von L' auf L , berechenbar in Zeit $p(n)$ und M $q(n)$ -zeitbeschränkte DTM, die L entscheidet, wobei $p()$ und $q()$ Polynome sind. Man erhält eine DTM M' , die L' entscheidet, indem man zunächst $f(w)$ berechnet und dann M auf $f(w)$ startet. M' arbeitet in polynomieller Zeit:

- $p(|w|)$ zum Berechnen von $f(w)$;
- wir können O.B.d.A. annehmen, dass $|f(w)| \leq p(|w|)$;³ Der Lauf von M benötigt dann Zeit $q(p(|w|))$.

Zeitbedarf insgesamt also $p(|w|) + q(p(|w|))$. □

Es ist zunächst nicht unmittelbar klar, warum NP-vollständige Probleme überhaupt existieren sollten. Überraschenderweise stellt sich aber heraus, dass es sehr viele solche Probleme gibt. Ein besonders wichtiges ist das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik. Das folgende sehr bekannte Resultat wurde unabhängig voneinander von Cook und Levin bewiesen.

Satz 19.4

SAT ist NP-vollständig.

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass $SAT \in NP$. Es bleibt also, zu beweisen, dass SAT NP-hart ist. Mit anderen Worten: wir müssen zeigen, dass jedes Problem $L \in NP$ polynomiell auf SAT reduzierbar ist. Allen diesen Probleme gemeinsam ist, dass sie (per Definition von NP) als das Wortproblem einer polynomiell zeitbeschränkten NTM aufgefasst werden können.

Sei also M eine $p(n)$ -zeitbeschränkte NTM, mit $p(n)$ Polynom. Unser Ziel ist, für jede Eingabe w eine AL-Formel φ_w zu finden, so dass

1. w wird von M akzeptiert gdw. φ_w ist erfüllbar und
2. φ_w kann in polynomieller Zeit (in $|w|$) konstruiert werden.

Die Konstruktion von φ_w beruht auf den folgenden Ideen. Jede Berechnung von M auf Eingabe $w = a_0 \cdots a_{n-1}$ kann man wie folgt als Matrix darstellen:

³Im allgemeinen muss das nicht der Fall sein. Zum Beispiel könnte f_1 die Identität sein und $p(n)$ die konstante Nullfunktion. Man wählt dann einfach ein größeres Polynom p .

$\not\#$	\cdots	$\not\#$	a_0, q_0	a_1	\cdots	a_{n-1}	$\not\#$	\cdots	$\not\#$
$\not\#$	\cdots	$\not\#$	b	a_1, q	\cdots	a_{n-1}	$\not\#$	\cdots	$\not\#$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Jede Zeile der Matrix repräsentiert eine Konfiguration, wobei die oberste Zeile der Startkonfiguration entspricht und die folgenden Zeile jeweils der Folgekonfiguration. Da Anzahl der Zeilen ist also durch $p(n) + 1$ beschränkt und wir nummerieren die Zeilen von 0 bis $p(n)$. Um eine Nummerierung der Spalten zu erhalten, weisen wir der Spalte, in der in der ersten Zeile der Kopf steht, die Nummer 0 zu. Aufgrund der Zeitbeschränkung von $p(n)$ sind die Spalten mit den Nummern $-p(n), \dots, p(n)$ ausreichend.

Diese Matrix lässt sich wiederum mittels polynomiell vieler Aussagenvariablen darstellen:

- $B_{a,i,t}$: zum Zeitpunkt t ist Zelle i mit a beschriftet
- $K_{i,t}$: zum Zeitpunkt t ist der Kopf über Zelle i
- $Z_{q,t}$: zum Zeitpunkt t ist q der aktuelle Zustand

wobei $0 \leq t \leq p(n)$, $-p(n) \leq i \leq p(n)$, $a \in \Gamma$ und $q \in Q$. Wenn beispielsweise in der Startkonfiguration die Zelle 3 mit dem Symbol a beschriftet ist, so wird dies dadurch repräsentiert, dass $B_{a,3,0} \mapsto 1$ und $B_{b,3,0} \mapsto 0$ für alle $b \in \Gamma \setminus \{a\}$.

Die für die Eingabe w konstruierte Formel φ_w verwendet die obigen Variablen. Wir werden φ_w so konstruieren, dass erfüllende Belegungen von φ_w genau den akzeptierenden Berechnungen von M auf w entsprechen. Genauer ist φ_w eine Konjunktion, die aus den folgenden Konjunkten besteht:

(i) Die Berechnung beginnt mit der Startkonfiguration für $w = a_1 \cdots a_n$:

$$\psi_{\text{ini}} := Z_{q_0,0} \wedge K_{0,0} \wedge \bigwedge_{0 \leq i < n} B_{a_i,i,0} \wedge \bigwedge_{n \leq i \leq p(n)} B_{b_i,i,0} \wedge \bigwedge_{-p(n) \leq i < 0} B_{b_i,i,0}.$$

(ii) Die Übergangsrelation wird respektiert:

$$\psi_{\text{move}} := \bigwedge_{0 \leq t < p(n)} \bigwedge_{-p(n) \leq i \leq p(n)} \bigwedge_{a \in \Gamma, q \in Q \text{ kein Stoppzustand}} \left((B_{a,i,t} \wedge K_{i,t} \wedge Z_{p,t}) \rightarrow \bigvee_{(q,a',M,q') \in \Delta \text{ so dass } -p(n) \leq M(i) \leq p(n)} (B_{a',M(i),t+1} \wedge K_{M(i),t+1} \wedge Z_{q',t+1}) \right)$$

wobei $M \in \{r, \ell, n\}$, $r(i) = i + 1$, $\ell(i) = i - 1$ und $n(i) = i$

Wir nehmen hier wieder o.B.d.A. an, dass das Stoppen nur vom Zustand, aber nicht vom gelesenen Symbol abhängt (es macht daher Sinn, von Stoppzuständen zu sprechen).

(iii) Zellen, die nicht unter dem Kopf sind, ändern sich nicht:

$$\psi_{\text{keep}} := \bigwedge_{0 \leq t < p(n)} \bigwedge_{-p(n) \leq i \leq p(n)} \bigwedge_{a \in \Gamma} \left((\neg K_{i,t} \wedge B_{a,i,t}) \rightarrow B_{a,i,t+1} \right)$$

(iv) Die Eingabe wird akzeptiert:

$$\psi_{\text{acc}} := \bigwedge_{q \in Q \setminus F} \bigwedge_{\text{Stoppzustand}} \bigwedge_{0 \leq t \leq p(n)} \neg Z_{q,t}$$

Es genügt hier nicht, zu fordern, dass ein akzeptierender Stoppzustand vorkommt da sonst unerwünschte Belegungen der folgenden Form möglich wären: eine verwerfende Berechnung von M , die weniger als die maximal möglichen $p(n)$ Schritte macht, gefolgt von einer Konfiguration mit akzeptierendem Stoppzustand, obwohl M gar keine weiteren Schritte macht.

(v) Bandbeschriftung, Kopfposition, Zustand sind eindeutig und definiert:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{aux}} := & \bigwedge_{t,q,q',q \neq q'} \neg(Z_{q,t} \wedge Z_{q',t}) \wedge \bigwedge_{t,i,a,a',a \neq a'} \neg(B_{a,i,t} \wedge B_{a',i,t}) \wedge \bigwedge_{t,i,j,i \neq j} \neg(K_{i,t} \wedge K_{j,t}) \\ & \bigwedge_t \bigvee_q Z_{q,t} \wedge \bigwedge_t \bigvee_i K_{i,t} \wedge \bigwedge_t \bigwedge_i \bigvee_a B_{a,i,t} \end{aligned}$$

Hierbei läuft t jeweils implizit über $0..p(n)$, q und q' laufen über q , i und j über $-p(n)..p(n)$, sowie a und a' über Γ .

Setze nun

$$\varphi_w = \varphi_{\text{ini}} \wedge \varphi_{\text{move}} \wedge \varphi_{\text{keep}} \wedge \varphi_{\text{acc}} \wedge \varphi_{\text{aux}}.$$

Man kann nun überprüfen, dass M die Eingabe w akzeptiert gdw. φ_w erfüllbar. Idee:

“ \Leftarrow ” Wenn w von M akzeptiert wird, dann gibt es akzeptierende Berechnung

$$k_0 \vdash_M k_1 \vdash_M \cdots \vdash_M k_m$$

von M auf w . Erzeuge daraus in der offensichtlichen Weise eine Belegung für die Variablen $B_{a,i,t}$, $K_{i,t}$ und $Z_{q,t}$, zum Beispiel:

$$B_{a,i,t} \mapsto 1 \text{ wenn die } i\text{-te Zelle in } k_t \text{ mit } a \text{ beschriftet ist.}$$

Wenn $m < p(n)$ (die Berechnung endet vor der maximal möglichen Anzahl von Schritten), dann verlängere die Folge k_0, k_1, \dots, k_m zuvor zu $k_0, k_1, \dots, k_{p(n)}$ durch $p(n) - m$ -maliges Wiederholen der Konfiguration k_m .

Indem man alle Konjunkte von φ_w durchgeht, überprüft man, dass die erhaltene Belegung φ_w erfüllt. Also ist φ_w erfüllbar.

“ \Rightarrow ” Aus einer Belegung der Variablen $B_{a,i,t}$, $K_{i,t}$, $Z_{q,t}$, die φ_w erfüllt, liest man eine Konfigurationsfolge $k_0 \vdash_M k_1 \vdash_M \cdots \vdash_M k_m$ ab, zum Beispiel:

Die i -te Zelle in k_t wird mit a beschriftet wenn $B_{a,i,t} \mapsto 1$.

Die Konfigurationsfolge endet, sobald ein Stoppzustand abgelesen wurde. Unter Verwendung der Tatsache, dass die Belegung alle Konjunkte von φ_w erfüllt, kann man nun zeigen, dass es sich bei der abgelesenen Konfigurationsfolge um eine akzeptierende Berechnung von M auf w handelt.

□

Analog zu unserem Vorgehen bei der Unentscheidbarkeit erhalten wir weitere NP-harte Probleme durch polynomielle Reduktion von bereits als NP-hart nachgewiesenen Problemen wie SAT. Um das zu zeigen, beobachten wir zunächst:

Lemma 19.5

Wenn $L_1 \leq_p L_2$ und $L_2 \leq_p L_3$, dann $L_1 \leq_p L_3$.

Beweis. Man erhalte eine Polynomialzeitreduktion von L_1 auf L_3 , indem man Polynomialzeitreduktionen f_1 von L_1 auf L_2 und f_2 von L_2 auf L_3 komponiert, also $f_2(f_1(w))$ berechnet, vergl. Beweis von Lemma 19.3. □

Die erwähnten NP-Härtebeweise mittels Reduktion beruhen auf Punkt 2) des folgenden Satzes, der die wichtigsten Zusammenhänge von NP und Polynomialzeitreduktionen zusammenfasst.

Satz 19.6

- 1) Ist $L_2 \in \text{NP}$ und gilt $L_1 \leq_p L_2$, so ist auch L_1 in NP.
- 2) Ist L_1 NP-hart und gilt $L_1 \leq_p L_2$, so ist auch L_2 NP-hart.

Beweis.

- 1) Wegen $L_2 \in \text{NP}$ gibt es eine polynomialzeitbeschränkte NTM M , die L_2 akzeptiert. Wegen $L_1 \leq_p L_2$ gibt es eine Polynomialzeitreduktion f von L_1 auf L_2 . Die polynomialzeitbeschränkte NTM für L_1 berechnet zunächst $f(w)$ und startet dann M .
- 2) Sei L_1 NP-hart und $L_1 \leq_p L_2$. Wähle ein $L \in \text{NP}$. Wir müssen zeigen, dass $L \leq_p L_2$. Da L_1 NP-hart, gilt $L \leq_p L_1$. Mit $L_1 \leq_p L_2$ und Lemma 19.5 folgt wie gewünscht $L \leq_p L_2$.

□

Mit Punkt 2) von Satz 19.6 kann man also die NP-Härte eines Problems L nachweisen, indem man eine Polynomialzeitreduktion eines bereits als NP-vollständig bekannten Problems wie SAT auf L findet. Dies wollen wir im folgenden an einigen Beispiele illustrieren.

Wie beginnen mit einem Spezialfall von SAT, bei dem nur aussagenlogische Formeln einer ganz speziellen Form als Eingabe zugelassen sind. Das dadurch entstehende Problem 3SAT spielt eine wichtige Rolle, da es oft einfacher ist, eine Reduktion von 3SAT auf ein gegebenes Problem L zu finden als eine Reduktion von SAT.

Definition 19.7 (3SAT)

Eine *3-Klausel* ist von der Form $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$, wobei ℓ_i eine Variable oder eine negierte Variable ist. Eine *3-Formel* ist eine endliche Konjunktion von 3-Klauseln. 3SAT ist das folgende Problem:

Gegeben: eine 3-Formel φ .

Frage: ist φ erfüllbar?

Satz 19.8

3SAT ist NP-vollständig.

Beweis.

- 1) 3SAT \in NP folgt unmittelbar aus SAT \in NP, da jedes 3SAT-Problem eine aussagenlogische Formel ist.
- 2) Es sei φ eine beliebige aussagenlogische Formel. Wir geben ein polynomielles Verfahren an, das φ in eine 3-Formel φ' umwandelt, so dass gilt:

$$\varphi \text{ erfüllbar} \quad \text{gdw.} \quad \varphi' \text{ erfüllbar.}$$

Beachte:

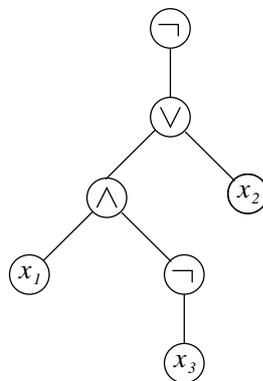
Es ist nicht gefordert, dass φ und φ' im logischen Sinne äquivalent sind, also von denselben Belegungen erfüllt werden.

Die Umformung erfolgt in mehreren Schritten, die wir am Beispiel der Formel

$$\neg((x_1 \wedge \neg x_3) \vee x_2)$$

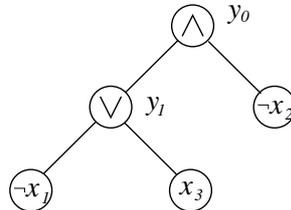
veranschaulichen.

Wir stellen diese Formel als Baum dar:



- 1. Schritt:** Wende wiederholt die *de Morgan'schen Regeln* an und eliminiere doppelte Negationen, um die Negationszeichen zu den Blättern des Baumes zu schieben.

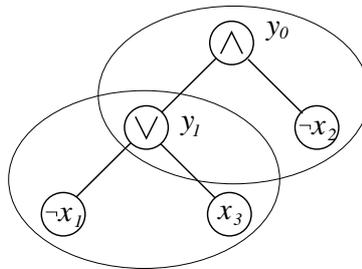
Dies ergibt den folgenden Baum (die Beschriftung y_0, y_1 wird im nächsten Schritt erklärt):



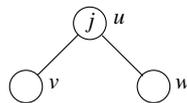
- 2. Schritt:** Ordne jedem inneren Knoten eine neue Variable aus $\{y_0, y_1, \dots\}$ zu, wobei die Wurzel y_0 erhält.

Intuitiv repräsentiert jede Variable y_i die Teilformel von φ , an dessen Wurzel sie steht. Zum Beispiel repräsentiert y_1 die Teilformel $\neg x_1 \vee x_3$.

- 3. Schritt:** Fasse jede Verzweigung (gedanklich) zu einer Dreiergruppe zusammen:



Jeder Verzweigung der Form



mit $j \in \{\wedge, \vee\}$ ordnen wir eine Formel der folgenden Form zu:

$$(u \Leftrightarrow (v \ j \ w))$$

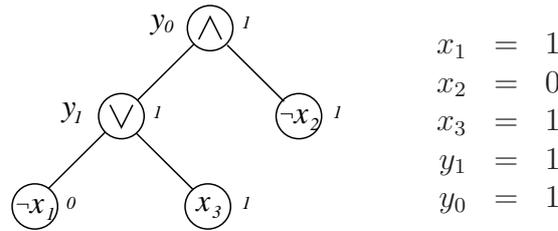
Diese Formeln werden nun konjunktiv mit y_0 verknüpft, was die Formel φ_1 liefert.

Im Beispiel ist φ_1 :

$$y_0 \wedge (y_0 \Leftrightarrow (y_1 \wedge \neg x_2)) \wedge (y_1 \Leftrightarrow (\neg x_1 \vee x_3))$$

Die Ausdrücke φ und φ_1 sind *erfüllbarkeitsäquivalent*, denn:

Eine erfüllende Belegung für φ kann zu einer für φ_1 erweitert werden, indem man die Werte für die Variablen y_i durch die Auswertung der entsprechenden Teilformel bestimmt, z.B.:



Umgekehrt ist jede erfüllende Belegung für φ_1 auch eine für φ . Genauer gesagt kann man von den Blättern zu den Wurzeln alle Variablen y_i betrachten und jeweils zeigen: der Wahrheitswert von y_i stimmt mit dem Wahrheitswert der von y_i repräsentierten Teilformel überein. Da jede Belegung, die φ_1 erfüllt, y_0 wahr machen muss, erfüllt jede solche Belegung dann auch φ .

4. Schritt: Jedes Konjunkt von φ_1 wird separat in eine 3-Formel umgeformt:

$$\begin{aligned} a \Leftrightarrow (b \vee c) &\rightsquigarrow (\neg a \vee (b \vee c)) \wedge (\neg(b \vee c) \vee a) \\ &\rightsquigarrow (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg b \vee a) \wedge (\neg c \vee a) \\ &\rightsquigarrow (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg b \vee a \vee a) \wedge (\neg c \vee a \vee a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \Leftrightarrow (b \wedge c) &\rightsquigarrow (\neg a \vee (b \wedge c)) \wedge (\neg(b \wedge c) \vee a) \\ &\rightsquigarrow (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee a) \\ &\rightsquigarrow (\neg a \vee b \vee b) \wedge (\neg a \vee c \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg c \vee a) \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man eine 3-Formel, die äquivalent zu φ_1 und damit wie gewünscht erfüllbarkeitsäquivalent zu φ ist.

Beachte:

Jeder Schritt kann offensichtlich deterministisch in polynomieller Zeit durchgeführt werden. □

Wir verwenden nun 3SAT, um zwei weitere Probleme als NP-vollständig nachzuweisen. Dabei wählen wir exemplarisch ein graphentheoretisches Problem und ein kombinatorisches Problem auf Mengen. Bei dem graphentheoretischen Problem handelt es sich im CLIQUE, von dem wir ja bereits nachgewiesen haben, dass es in NP liegt.

Satz 19.9

CLIQUE ist NP-vollständig.

Beweis. Es bleibt, zu zeigen, dass CLIQUE NP-hart ist. Zu diesem Zweck reduzieren wir 3SAT in polynomieller Zeit auf CLIQUE.

Sei also

$$\varphi = \overbrace{(\ell_{11} \vee \ell_{12} \vee \ell_{13})}^{K_1} \wedge \dots \wedge \overbrace{(\ell_{m1} \vee \ell_{m2} \vee \ell_{m3})}^{K_m}$$

eine 3-Formel, mit $\ell_{ij} \in \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\neg x_1, \dots, \neg x_n\}$.

Wir müssen zeigen, wie man in polynomieller Zeit aus φ einen Graph G und eine Cli-
quengröße k erzeugt, so dass φ erfüllbar ist gdw. G eine k -Clique hat.

Dies macht man wie folgt:

- $V := \{\langle i, j \rangle \mid 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq 3\}$
- $E := \{\{\langle i, j \rangle, \langle i', j' \rangle\} \mid i \neq i' \text{ und } \ell_{ij} \neq \bar{\ell}_{i'j'}\}$, wobei

$$\bar{\ell} = \begin{cases} \neg x & \text{falls } \ell = x \\ x & \text{falls } \ell = \neg x \end{cases} .$$

- $k = m$

Die Knoten von G entsprechen also den *Vorkommen von Literalen* in φ (wenn ein Literal an mehreren Positionen in φ auftritt, so werden dafür mehrere Knoten erzeugt). Zwei Literalvorkommen werden durch eine (ungerichtete) Kante verbunden, wenn sie sich auf *unterschiedliche* Klauseln beziehen und *nicht* komplementäre Literale betreffen.

Es gilt:

φ ist erfüllbar mit einer Belegung B

gdw. es gibt in jeder Klausel K_i ein Literal ℓ_{ij_i} mit Wert 1

gdw. es gibt Literale $\ell_{1j_1}, \dots, \ell_{mj_m}$, die paarweise nicht komplementär sind (wobei ℓ_{ij_i} in Klausel i vorkommt) □

gdw. es gibt Knoten $\langle 1, j_1 \rangle, \dots, \langle m, j_m \rangle$, die paarweise miteinander verbunden sind

gdw. es gibt eine m -Clique in G

Übung: Betrachte die 3-Formel

$$\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_1 \vee x_4),$$

konstruiere den Graph G wie im Beweis von Satz 19.9, gib eine 3-Clique in G an und die dazugehörige Belegung, die φ erfüllt.

Es folgt die angekündigte Reduktion von 3SAT auf ein mengentheoretisches Problem. Dieses Problem heißt *Mengenüberdeckung*.

Definition 19.10 (Mengenüberdeckung)

Gegeben: Ein *Mengensystem* über einer endlichen Grundmenge M , d.h.

$$T_1, \dots, T_k \subseteq M$$

sowie eine Zahl $n \geq 0$.

Frage: Gibt es eine Auswahl von n Mengen, die ganz M überdecken, d.h.

$$\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \{1, \dots, k\} \text{ mit } T_{i_1} \cup \dots \cup T_{i_n} = M.$$

Satz 19.11

Mengenüberdeckung ist NP-vollständig.

Beweis.

1) Mengenüberdeckung ist in NP:

- Wähle nichtdeterministisch Indices i_1, \dots, i_n und
- überprüfe, ob $T_{i_1} \cup \dots \cup T_{i_n} = M$ gilt.

2) Um NP-Härte zu zeigen, reduzieren wir 3SAT in Polyzeit auf Mengenüberdeckung.

Sei also $\varphi = K_1 \wedge \dots \wedge K_m$ eine 3-Formel, die die Variablen x_1, \dots, x_n enthält.

Wir definieren $M := \{K_1, \dots, K_m, x_1, \dots, x_n\}$.

Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$T_i := \{K_j \mid x_i \text{ kommt in } K_j \text{ als Disjunkt vor}\} \cup \{x_i\}$$

$$T'_i := \{K_j \mid \neg x_i \text{ kommt in } K_j \text{ als Disjunkt vor}\} \cup \{x_i\}$$

Wir betrachten das Mengensystem:

$$T_1, \dots, T_n, T'_1, \dots, T'_n,$$

Zu zeigen: φ ist erfüllbar gdw. es eine Mengenüberdeckung von M mit n Mengen gibt.

“ \Rightarrow ” Sei φ erfüllbar mit Belegung B . Wähle

- T_i , falls $B(x_i) = 1$
- T'_i , falls $B(x_i) = 0$

Dies liefert n Mengen, in denen jedes Element von M vorkommt:

- K_1, \dots, K_n da B jede K_i erfüllt.
- x_1, \dots, x_n da für jedes i entweder T_i oder T'_i gewählt wird.

“ \Leftarrow ” Sei umgekehrt

$$\{U_1, \dots, U_n\} \subseteq \{T_1, \dots, T_n, T'_1, \dots, T'_n\} \text{ mit } U_1 \cup \dots \cup U_n = M.$$

Da jede Variable x_i in $U_1 \cup \dots \cup U_n$ ist, kommt T_i oder T'_i in $\{U_1, \dots, U_n\}$ vor. Da wir nur n verschiedene Mengen haben, kommt sogar jeweils *genau eines* von beiden vor.

Definiere Belegung B wie folgt:

$$B(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } T_i \in \{U_1, \dots, U_n\} \\ 0 & \text{falls } T'_i \in \{U_1, \dots, U_n\} \end{cases}$$

B erfüllt jede Klausel K_j da K_j in $U_1 \cup \dots \cup U_n$ vorkommt. □

Übung: Betrachte die 3-Formel

$$\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee \neg x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_1 \vee x_4),$$

konstruiere die Mengen $M, T_1, \dots, T_4, T'_1, \dots, T'_4$ wie im Beweis von Satz 19.8, finde Mengen $\{U_1, \dots, U_4\} \subseteq \{T_1, \dots, T_4, T'_1, \dots, T'_4\}$, so dass $U_1 \cup \dots \cup U_4 = M$ und gib die dazugehörige Belegung an, die φ erfüllt.

Es gibt eine große Vielzahl von NP-vollständigen Problemen in allen Teilgebieten der Informatik. Eine klassische Referenz ist das Buch

„Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness“
von M. Garey und D. Johnson, 1979.

Das Buch, welches zu den meistzitierten in der Informatik überhaupt gehört, enthält eine hervorragende Einführung in das Gebiet der NP-Vollständigkeit und einen Katalog von ca. 300 NP-vollständigen Problemen. Seit der Publikation des Buches wurden tausende weitere Probleme als NP-vollständig identifiziert.

Komplemente und coNP

Wir befassen uns noch mit zwei weiteren Themen, die mit der Klasse NP und dem Begriff der NP-Vollständigkeit zu tun haben. In diesem Abschnitt geht es zunächst um Komplemente von NP-Problemen. Es ist offensichtlich, dass jede mittels deterministischen TMs definierte Komplexitätsklasse C unter Komplement abgeschlossen ist: wenn $L \in C$ durch eine DTM M bezeugt wird, dann wird $\bar{L} \in C$ durch die DTM bezeugt, die man aus M' erhält, indem man die Endzustände und Nichtendzustände vertauscht. Für nichtdeterministische Klassen funktioniert dieses Argument nicht, da die beschriebene Zustandsvertauschung nicht der Komplementbildung entspricht.

Man betrachte zum Beispiel das Komplement $\overline{\text{SAT}}$ von SAT, also das folgende Problem: gegeben eine aussagenlogische Formel φ , entscheide ob φ unerfüllbar ist. Der Leser ist aufgefordert, sich zu vergegenwärtigen, dass ein typischer NP-Algorithmus der Form „rate und überprüfe“ hier nicht naheliegend ist, da es nicht um die *Existenz* einer bestimmten Belegung geht sondern um *alle* Belegungen (sie müssen φ falsch machen). In der Tat ist nicht bekannt, ob $\overline{\text{SAT}} \in \text{NP}$ und es wird vermutet, dass das nicht der Fall ist (und damit natürlich auch, dass NP nicht unter Komplement abgeschlossen ist).

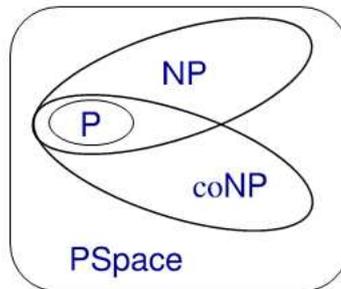
Um Probleme wie $\overline{\text{SAT}}$ komplexitätstheoretisch zu erfassen, führt man eine weitere Komplexitätsklasse namens coNP ein:

$$\text{coNP} := \{\bar{L} \mid L \in \text{NP}\}.$$

Mit anderen Worten: die Probleme in coNP sind genau die Komplemente der Probleme in NP. Es gilt also z.B. $\overline{\text{SAT}} \in \text{coNP}$. Es gibt aber auch „natürliche“ Probleme (deren Formulierung keine explizite Komplementierung beinhaltet) in coNP.

Ein Beispiel ist das Gültigkeitsproblem der Aussagenlogik. Der Leser möge überprüfen, dass dieses Problem wirklich in coNP liegt, mit anderen Worten also: dass das Nicht-Gültigkeitsproblem in NP ist.

Man sieht leicht, dass $P \subseteq \text{coNP}$: aus $L \in P$ folgt $\bar{L} \in P$ folgt $\bar{L} \in \text{NP}$ folgt $L \in \text{coNP}$. Damit gilt auch $P \subseteq \text{NP} \cap \text{coNP}$ und wir erhalten folgendes Bild:



Man nimmt an, dass alle dargestellten Teilmengenbeziehungen echt sind, dass also gilt: $P \neq \text{NP} \cap \text{coNP}$ und $\text{NP} \subsetneq \text{coNP}$. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, auch für coNP Begriffe von Härte und Vollständigkeit zu definieren. Dies geschieht vollkommen analog zu NP :

1. Ein Problem L heißt *coNP-hart* falls für alle $L' \in \text{coNP}$ gilt: $L' \leq_p L$;
2. L heißt *coNP-vollständig* falls $L \in \text{coNP}$ und L ist *coNP-hart*.

Man kann beispielsweise mit einfachen Argumenten zeigen, dass das Gültigkeitsproblem der Aussagenlogik *coNP-vollständig* ist.

Approximation

Viele *NP-vollständige Probleme* sind in ihrer natürlichsten Formulierung *Optimierungsprobleme* und keine Entscheidungsprobleme, zum Beispiel:

- **CLIQUE**: gegeben ungerichteter Graph G , finde die größte Clique in G
- **Mengenüberdeckung**: gegeben Grundmenge M und Mengensystem T_1, \dots, T_k , finde kleinstes $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ (bzgl. Kardinalität) so dass $\bigcup_{i \in I} T_i = M$.

Man überprüft leicht, dass ein Polynomialzeitalgorithmus für das Berechnen einer optimalen Lösung auch einen Polynomialzeitalgorithmus für das entsprechende Entscheidungsproblem liefert. Mit der Existenz solcher Algorithmen ist also nicht zu rechnen. Aber wie steht es mit effizienter Approximation, also mit Polynomialzeitalgorithmen, die zwar keine optimale aber dennoch eine „gute“ Lösung berechnen?

Im Fall von *Minimierungsproblemen* wie Mengenüberdeckung wünscht man sich einen Approximationsalgorithmus, der in polynomieller Zeit läuft und so dass

$$\frac{\text{APP}}{\text{OPT}} \leq f(|w|)$$

für eine möglichst langsam wachsende Funktion f (und alle Eingaben w), wobei OPT die Kosten einer optimalen Lösung bei Eingabe w bezeichnet und APP die Kosten der approximativ gefundenen Lösung bei Eingabe w . Der obige Bruch beschreibt den *Approximationsfaktor* und ist stets ≥ 1 ; ein größerer Faktor bedeutet eine schlechtere Approximation. Man beachte, dass der Faktor mit steigender Eingabelänge größer werden darf, die Approximationsqualität also schlechter.

Wir betrachten Approximation am konkreten Beispiel von Mengenüberdeckung. Eine natürliche Idee ist folgender Greedy-Algorithmus:

```

procedure greedy( $M, \{T_1, \dots, T_k\}$ )
 $C := I := \emptyset$ 
while  $C \neq M$  do
    wähle  $i \in \{1, \dots, k\} \setminus I$  so dass  $|T_i \setminus C|$  maximal
     $C := C \cup T_i$ 
     $I := I \cup \{i\}$ 
end
gib  $I$  aus
    
```

Der Algorithmus ist *greedy* (also gierig) in dem Sinne, dass er in jedem Schritt versucht, eine möglichst große Anzahl von Elementen aus M zu überdecken. Die Kosten der berechneten Lösung sind $\text{APP} := |I|$.

Wir wollen nun den realisierten Approximationsfaktor abschätzen. Sei e_1, \dots, e_n eine Aufzählung von M in der Reihenfolge des Hinzufügens der Knoten zu C (bei gleichzeitigem Hinzufügen wird beliebig aufgelöst). Wir assoziieren wie folgt Kosten mit Mengen T_i und Elementen e_j :

- $c(T_i) = 1/|T_i \setminus C|$ wobei hier die Menge C zum Zeitpunkt des Hinzufügens von i zu I gemeint ist.
- $c(e_\ell) = c(T_i)$ wenn e_ℓ durch Auswahl von T_i zu C hinzugefügt wurde.

Zentral ist die folgende Kostenabschätzung.

Lemma 19.12

$c(e_\ell) \leq \text{OPT}/(n - \ell + 1)$ für jedes Element e_ℓ .

Beweis. Wir argumentieren wie folgt:

1. In jeder Iteration liefern die verbliebenen (noch nicht ausgewählten) Mengen der *optimalen Lösung* eine Überdeckung der verbliebenen Elemente $\bar{C} = M \setminus C$ mit Kosten $\leq \text{OPT}$.
2. Also gibt es ein verbliebenes T_i mit $c(T_i) \leq \text{OPT}/|\bar{C}|$.

(Denn $c(T_i)$ kann in späteren Iterationen höchstens größer aber niemals kleiner werden und gälte $c(T_i) > \text{OPT}/|\bar{C}|$ für alle T_i ließe sich keine Überdeckung der verbliebenen Elemente mit Kosten $\leq \text{OPT}$ finden).

3. Also $c(e_\ell) \leq \text{OPT}/|\overline{C}|$.

(Denn greedy Auswahl von i mit $|T_i \setminus C|$ maximal entspricht Auswahl von i mit $c(T_i)$ minimal—per Definition von $c(T_i)$)

4. man sieht außerdem leicht: in der Iteration, in der e_ℓ zu M hinzugefügt wurde, enthält \overline{C} mindestens $n - \ell + 1$ Elemente.

Aus den Punkten 3 und 4 erhalten wir also:

$$c(e_\ell) \leq \frac{\text{OPT}}{|\overline{C}|} \leq \frac{\text{OPT}}{n - \ell + 1}.$$

□

Wir können nun den Approximationsfaktor des Greedy-Algorithmus bestimmen. Dieser ist (additiv) logarithmisch und damit relativ gut. Insbesondere läßt sich beweisen, dass es keine wesentlich besseren Approximationalgorithmen gibt, was angesichts der Einfachheit des Greedy-Algorithmus überraschend ist (und keineswegs einfach zu beweisen).

Satz 19.13

Für den Greedy-Algorithmus gilt:

$$\frac{\text{APP}}{\text{OPT}} \leq 1 + \ln(|w|).$$

Beweis. Per Definition der Kosten von Elementen ist

$$c(e_1) + \dots + c(e_n)$$

genau die Anzahl der ausgewählten Mengen, also APP.

Mit Lemma 19.12 folgt

$$\text{APP} = c(e_1) + \dots + c(e_n) \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \cdot \text{OPT}.$$

Nun ist $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ genau die n -te harmonische Zahl H_n und es ist bekannt, dass $H_n \leq 1 + \ln(n)$. □

Wir beenden an dieser Stelle unseren kurzen Ausflug zur Approximation und erwähnen noch, dass es natürlich viele andere Approximationstechniken gibt als Greedy-Algorithmen und dass sich NP-vollständige Probleme äußerst unterschiedlich bezüglich Approximierbarkeit verhalten. Hier einige Beispiele:

- Knotenüberdeckung in Graphen ist ein (immernoch NP-vollständiger) Spezialfall von Mengenüberdeckung, der Approximation mit konstantem Faktor 2 erlaubt. Die Approximationsgüte ist hier also nicht von der Eingabegröße abhängig.

- Mengenüberdeckung ist approximierbar mit logarithmisch-polynomielltem Faktor (Polynom von Logarithmus der Eingabegröße). Dies ist noch als verhältnismäßig gute Approximation aufzufassen.
- CLIQUE ist lediglich mit linearem Faktor approximierbar. Das ist ein schlechter Faktor, da die Qualität der Approximation mit steigender Eingabegröße rapide abnimmt.
- Das Traveling Salesman Problem ist gar nicht approximierbar in dem Sinne dass nicht garantiert werden kann, dass überhaupt eine Lösung gefunden wird, wenn es eine gibt.

20. Jenseits von NP

Wie erwähnt glaubt eine überwältigende Zahl von Forschern, dass P eine *echte* Teilmenge von NP ist. In der Tat kann man die Theorie der NP-Vollständigkeit als einen Anhaltspunkt werten, dass dies wirklich der Fall ist. Im Gegensatz dazu stellen sich interessanterweise die *Platzkomplexitätsklassen* PSpace und NPSpace, die ja komplett analog zu P und NP definiert sind, als identisch heraus! Das folgende Resultat ist als *Savitch's Theorem* bekannt und wurde um 1970 bewiesen.

Satz 20.1

PSpace = NPSpace.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass jede durch ein Polynom $p()$ platzbeschränkte NTM M durch eine polynomiell platzbeschränkte DTM M' simuliert werden kann. Ein erster Versuch könnte zum Beispiel darin bestehen, M' bei gegebener Eingabe w zunächst (deterministisch!) den Konfigurationsgraph $G_{M,p(|w|)}$ konstruieren zu lassen und dann nur noch zu überprüfen, ob eine akzeptierende Stoppkonfiguration von der Startkonfiguration aus erreichbar ist. Dieser Ansatz scheitert jedoch daran, dass $G_{M,p(|w|)}$ exponentiell groß ist und der beschriebene Ansatz also unzulässig viel Platz verwendet.

Der Beweis von Savitch's Theorem beruht auf der Idee, dass man den eben beschriebenen Ansatz auch realisieren kann, ohne den Graph $G_{M,p(|w|)}$ jemals komplett im Speicher zu halten. Das funktioniert wie folgt.

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass es nur eine einzige akzeptierende Stoppkonfiguration k_{akz} gibt. Dies kann zum Beispiel dadurch erreicht werden, dass M vor dem Akzeptieren den Bandinhalt löscht und den Kopf an eine definierte Stelle bewegt (z.B. vormaliger Beginn der Eingabe). Definiere ein Prädikat $\text{Pfad}(k, k', i)$ wie folgt:

$\text{Pfad}(k, k', i)$ ist wahr gdw. es in $G_{M,p(|w|)}$ einen Pfad von Konfiguration k nach Konfiguration k' gibt, dessen Länge durch 2^i beschränkt ist.

Sei N die Anzahl der Knoten im Graph $G_{M,p(|w|)}$, also die Anzahl der Konfigurationen von M der Länge $p(|w|)$. Wir können die Aufgabe von M' nun wie folgt beschreiben: entscheide, ob folgendes gilt:

$$\text{Pfad}(q_0w, k_{\text{akz}}, \lceil \log(N) \rceil).$$

Man beachte, dass der Logarithmus durch die Exponentiation in der Definition des Pfad-Prädikates wieder aufgehoben wird, man interessiert sich also für Pfade der Länge N , was offensichtlich ausreichend ist. Wir hatten uns bereits im Beweis von Satz 18.3 überlegt, dass $N \leq 2^{\mathcal{O}(p(|w|))}$. Damit ist aber $\lceil \log(N) \rceil$ polynomiell in $|w|$. Dies legt den folgenden „Teile und Herrsche“-Ansatz nahe:

um $\text{Pfad}(k, k', i)$ zu entscheiden, iteriere über alle möglichen Mittelpunkte \hat{k} auf dem gesuchten Pfad von k zu k' , entscheide rekursiv $\text{Pfad}(k, \hat{k}, i-1)$ und $\text{Pfad}(\hat{k}, k', i-1)$.

Beachte: wegen der Exponentiation in der Definition des Pfad-Prädikates entspricht hier „-1“ dem Teilen der Pfadlänge durch zwei!

Insgesamt erhalten wir den folgenden Algorithmus, der auf $\text{Pfad}(q_0w, k_{\text{akz}}, \lceil \log(N) \rceil)$ gestartet wird:

```

procedure path( $k, k', i$ )
  case  $i = 0$  do
    if  $k = k'$  or  $k \vdash_M k'$  then return true
    else return false
  case  $i > 0$  do
    forall  $\hat{k}$  in  $G_{M,p(|w|)}$  do
      if  $\text{Pfad}(k, \hat{k}, i - 1)$  and  $\text{Pfad}(\hat{k}, k', i - 1)$  return true then
        return true
    endfor
  return false

```

Mit den bereits gelieferten Argumenten ist dieser Algorithmus offensichtlich korrekt, d.h. eine DTM M' , die diesen Algorithmus ausführt, entscheidet dieselbe Sprache wie die ursprüngliche NTM M . Es verbleibt, den Platzbedarf von M' zu analysieren:

- In jedem Aufruf sind die Werte von k, k', \hat{k} und i zu speichern. Die Größe der Konfigurationen ist $\mathcal{O}(p(|w|))$, da ihre Länge ja nur $p(|w|)$ beträgt. Da wir den Algorithmus mit $i = \lceil \log(N) \rceil$ starten, sind auch alle Werte von i in $\mathcal{O}(p(|w|))$.
- Auch die Größe des Rekursionsstacks trägt zum Speicherbedarf bei. Wegen des schon erwähnten Startwerts für i ist die Rekursionstiefe offensichtlich durch $\mathcal{O}(p(|w|))$ beschränkt.

Insgesamt ergibt sich damit ein Speicherplatzbedarf von $\mathcal{O}(p(|w|)^2)$. □

Savitch's Theorem hat unter anderem folgende Konsequenzen:

- Die Komplexitätsklasse **NPSpace** wird im allgemeinen nicht explizit betrachtet;
- Wenn man nachweisen will, dass ein Problem in **PSpace** ist, dann kann man o.B.d.A. eine nicht-deterministische Turingmaschine verwenden, was oft praktisch ist (man kann also *raten*).

Den zweiten Punkt wollen wir illustrieren, indem wir folgendes Resultat beweisen.

Satz 20.2

Das Wortproblem für monotone Grammatiken ist in PSPACE.

Beweis. Wegen Savitch's Theorem genügt es, zu zeigen: es gibt eine polynomiell platzbeschränkte NTM, die das Wortproblem für monotone Grammatiken löst.

Sei als Eingabe die monotone Grammatik $G = (N, \Sigma, P, S)$ und das Wort $w \in \Sigma^*$ gegeben. Die NTM muss prüfen, ob G eine Ableitung von w erlaubt. Wir schätzen zunächst die Länge der zu betrachtenden Ableitungen ab:

- wir können uns offensichtlich auf Ableitungen konzentrieren, in denen kein Wort doppelt vorkommt;
- wegen der Monotonizität von G kommen in einer erfolgreichen Ableitung von w nur Wörter der Länge $\leq |w|$ vor;
- es gibt nicht mehr als $\ell_{\max} := (|N \cup \Sigma| + 1)^{|w|}$ viele solche Wörter.

Die zu betrachtenden Ableitungen können also exponentiell lang sein und passen damit nicht in den polynomiell großen Speicher. Um die Existenz einer Ableitung

$$S = \alpha_0 \vdash_G \alpha_1 \vdash_G \cdots \vdash_G \alpha_k = w$$

zu überprüfen, geht die NTM daher wie folgt vor: rate die Ableitung Schritt für Schritt, behalte stets nur zwei Wörter gleichzeitig im Speicher. Es wird also zunächst das Wort α_0 erzeugt. Danach wird α_1 geraten und $\alpha_0 \vdash_G \alpha_1$ überprüft. Dann wird α_0 aus dem Speicher gelöscht und α_2 geraten, usw.

Es ist nun aber möglich, so zu raten, dass die NTM in eine Endlosschleife gerät. Um dies zu verhindern, lässt sie zudem einen binären Schrittzähler mitlaufen. Wird w erzeugt, so akzeptiert die NTM. Wird w nach ℓ_{\max} Schritten nicht erreicht, so verwirft sie.

Der Platzbedarf zum Speichern des Zählers beträgt $\lceil \log(\ell_{\max}) \rceil$, ist also polynomiell da ℓ_{\max} nur einfach exponentiell groß ist. Insgesamt wird damit nur polynomiell viel Speicher benötigt.

Man kann sich nun noch von der Korrektheit des Algorithmus überzeugen: ist $w \in L(G)$, dann erzeugt eine der NTM-Berechnungen eine Ableitung von w der Länge $\leq \ell_{\max}$ und akzeptiert dann; wenn $w \notin L(G)$, dann erzeugt keine der NTM-Berechnungen eine Ableitung von w , also sind alle Berechnungen verwerfend. \square

Entsprechend zur Definition von NP-Vollständigkeit eines Problems kann man auch Vollständigkeit für andere Komplexitätsklassen definieren, zum Beispiel für PSpace. Man beachte die Ähnlichkeit zu Definition 19.2.

Definition 20.3 (PSpace-hart, PSpace-vollständig)

- 1) Eine Sprache L heißt *PSpace-hart* wenn für alle $L' \in \text{PSpace}$ gilt: $L' \leq_p L$.
- 2) L heißt *PSpace-vollständig* wenn $L \in \text{PSpace}$ und L ist PSpace-hart.

Es ist leicht zu sehen, dass jedes PSpace-vollständige Problem auch NP-hart ist. Man nimmt an, dass PSpace-vollständige Probleme echt schwieriger sind als NP-vollständige Probleme (dass also NP eine echte Teilmenge von PSpace ist), hat aber bisher keinen Beweis dafür gefunden.

Man kann beweisen, dass folgende Probleme aus dieser Vorlesung PSpace-vollständig sind:

- das Äquivalenzproblem für NEAs und für reguläre Ausdrücke
- das Wortproblem für monotone Grammatiken.

ExpTime

Mit einem raffinierten Diagonalisierungsargument, das wird hier nicht im Detail betrachten wollen kann man folgendes zeigen.

Satz 20.4

$P \neq \text{ExpTime}$.

Man kann mit einer DTM in exponentieller Zeit also beweisbar mehr Probleme lösen als in polynomieller Zeit. Das bedeutet natürlich, dass auch mindestens eine der drei Inklusionen aus

$$P \subseteq NP \subseteq PSpace \subseteq \text{ExpTime}.$$

echt sein muss. Leider weiß man aber nicht, welche Inklusion das ist. Analog zu NP-Härte und PSpace-Härte kann man den Begriff der ExpTime-Härte definieren. Es ist leicht, zu sehen, dass ein ExpTime-hartes Problem wegen Satz 20.4 nicht in P sein kann. Solche Probleme findet man zum Beispiel in der Logik oder in Form von (generalisierten) Spielen wie Dame und Schach.

Es gibt in der Komplexitätstheorie also durchaus Resultate, die Komplexitätsklassen separieren, Satz 20.4 ist nur eines von mehreren Beispielen. Man mag sich fragen, ob ein cleveres Diagonalisierungsargument auch verwendet werden kann, um das berühmte P vs. NP zu lösen (indem man $P \neq NP$ zeigt). Leider ist dies nicht der Fall. Wir haben in Kapitel 17 gesehen, dass Diagonalisierung eine Beweistechnik ist, die auf Orakel relativiert. Man kann zeigen, dass keine Beweistechnik mit dieser Eigenschaft geeignet ist, um $P \neq NP$ zu beweisen (Satz von Gill, Baker, Solovay). Insgesamt weiß man leider deutlich mehr darüber, wie man $P \neq NP$ *nicht* beweist als es aussichtsreiche Kandidaten für einen solchen Beweis gibt.

Es soll abschließend noch betont werden, dass es neben den hier diskutierten Komplexitätsklassen noch viele weitere wichtige Klassen gibt. Dies betrifft sowohl Klassen unterhalb von P und Klassen oberhalb von ExpTime, als auch Klassen, die „zwischen“ den hier dargestellten liegen oder deren genauer Zusammenhang zu den hier behandelten Klassen bisher unbekannt ist. Beispielsweise ergeben sich die wichtigen Klassen LogSpace und NLogSpace durch die Verwendung von *logarithmisch viel Platz* (wobei die Eingabe auf einem Extraband liegt und nicht zum Platzverbrauch beiträgt) und liegen unterhalb von P. Im Unterschied zu PSpace und NPSpace ist nicht bekannt, ob diese Klassen identisch sind. Weitere wichtige Klassen wie etwa RP, BPP und PP ergeben sich, wenn man Turingmaschinen um *probabilistische Fähigkeiten* ergänzt. Intuitiv darf eine solche Maschine „Münzen werfen“ und muß dann nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit die richtige Antwort geben.

V. Appendix

A. Laufzeitanalyse von Algorithmen und O -Notation

Laufzeitanalyse

Ein gegebenes Berechnungsproblem lässt sich meist durch viele verschiedene Algorithmen lösen. Um die „Qualität“ dieser vielen möglichen Algorithmen zu bestimmen, analysiert man deren Ressourcenverbrauch. In diesem Zusammenhang ist die wichtigste Ressource der *Zeitverbrauch*, also die Anzahl Rechenschritte, die der Algorithmus ausführt. Andere Ressourcen, die eine Rolle spielen können, sind beispielsweise der Speicherverbrauch oder der Kommunikationsbedarf, wenn der Algorithmus auf mehreren Prozessoren oder Rechnern verteilt ausgeführt wird. Ein Algorithmus mit geringem Ressourcenbedarf ist dann einem Algorithmus mit höherem Ressourcenbedarf vorzuziehen.

Die *Laufzeit* eines Algorithmus A auf einer Eingabe x ist die Anzahl *elementarer Rechenschritte*, die A gestartet auf x ausführt, bevor er anhält. Was ein elementarer Rechenschritt ist, wird in der VL „Theoretische Informatik II“ genauer untersucht. Bis dahin betrachten wir die üblichen Operationen eines Prozessors als elementare Rechenschritte, also z.B. Addition und Multiplikation. Die zentrale Eigenschaft eines elementaren Rechenschrittes ist, dass er in konstanter Zeit ausgeführt werden kann—das soll heißen, dass die benötigte Zeit unabhängig von den konkreten Argumenten ist, auf die der Rechenschritt angewendet wird.

Man beschreibt die Laufzeit eines Algorithmus immer in Abhängigkeit von der *Größe seiner Eingabe*. Dem liegt die Intuition zugrunde, dass das Verarbeiten einer grösseren Eingabe im allgemeinen länger dauert als das einer kleinen. So kann man z.B. offensichtlich schneller entscheiden, ob ein gegebener NEA ein Eingabewort der Länge 1 akzeptiert als eines der Länge 128. Der Zeitverbrauch eines Algorithmus kann also beschrieben werden durch eine Funktion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

die jeder Eingabelänge $n \in \mathbb{N}$ eine Laufzeit $f(n)$ zuordnet. Man beachte, dass diese Darstellung von der *konkreten Eingabe* abstrahiert, d.h., die Laufzeit des Algorithmus auf verschiedenen Eingaben derselben Länge wird nicht unterschieden. Diese kann durchaus sehr unterschiedlich sein: für einen gegebenen NEA \mathcal{A} , in dem der Startzustand keine a -Übergang erlaubt, ist es trivial, zu entscheiden, dass das Wort

abbbababababbbbbbbbababbabbabbbbbbaaabbbbaaaaaab

nicht akzeptiert wird, wohingegen dies für das gleichlange, aber mit b beginnende Wort

bbbababababbbbbbbbababbabbabbbbbbaaabbbbaaaaaaba

viel mehr Schritte erfordern kann. Die durch die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ beschriebene Laufzeit ist als *Worst Case Komplexität* zu verstehen: $f(n)$ beschreibt eine obere Schranke, also eine maximale Schrittzahl, die für keine Eingabe der Länge n überschritten wird (die aber für „einfache“ Eingaben unter Umständen stark *unterschritten* werden kann).

Welche Laufzeit kann als *effizient* angesehen werden und welche nicht? Die wichtigste Grenze verläuft zwischen polynomiell und exponentiellem Laufzeitverhalten, wobei ersteres im allgemeinen mit „machbar“ gleichgesetzt wird und letzteres mit steigender Eingabegröße so schnell wächst, dass größere Eingaben nicht verarbeitet werden können. Bei *polynomieller Laufzeit* ist die Funktion f also ein Polynom wie zum Beispiel

$$n, \quad n^2, \quad 5n, \quad 7n^2, \quad 8n^3, \quad 3n^3 + 2n^2 + 5n + 7.$$

Bei *exponentieller Laufzeit* ist sie eine Exponentialfunktion wie zum Beispiel

$$2^n, \quad 5^n, \quad 2^{n^2}, \quad n^n, \quad 17(5^{23n}).$$

Es ist wichtig, sich vor Augen zu führen, dass exponentielle Laufzeit so dramatisch ist, dass sie von schnellerer Hardware nicht kompensiert werden kann. Man betrachte z.B. die Laufzeit 2^n auf Eingaben der (sehr moderaten!) Größe $n = 128$. Die sich ergebende Anzahl Schritte ist so gewaltig, dass ein moderner 3Ghz-Prozessor länger rechnen müsste als vom Anfang des Universums bis heute. Aber auch Polynome höheren Grades sind recht schnell wachsende Funktionen. Interessanterweise findet man aber nur äußerst selten Algorithmen, deren Laufzeit zwar polynomiell ist, aber nicht durch ein Polynom kleinen Grades (meist ≤ 5 , oft ≤ 3) beschrieben werden kann. Dies rechtfertigt die übliche Gleichsetzung von „polynomiell“ und „machbar“. Für sehr zeitkritische Probleme kann aber auch eine Laufzeit von n^2 zu lang sein. Als besonders effizient gilt *Linearzeit*, also Laufzeiten der Form $c \cdot n$, wobei $c \in \mathbb{N}$ eine Konstante ist.

O-Notation

Bei der Laufzeitanalyse von Algorithmen abstrahiert man so gut wie immer von konkreten Konstanten. Man würde also beispielsweise nicht zwischen einem Algorithmus mit Laufzeit $2n$ und einem mit Laufzeit $4n$ unterscheiden (außer natürlich in einer konkreten Implementierung, wo derartige Unterschiede sehr wichtig sein können!). Dies hat mehrere Gründe. Erstens ist es schwierig und fehleranfällig, alle involvierten Konstanten zu identifizieren und während der für die Laufzeitabschätzung benötigten Rechnungen „mitzuschleppen“. Und zweitens sind die konkreten Konstanten oft abhängig von Implementierungsdetails wie den konkret zur Verfügung stehenden elementaren Rechenschritten und den zur Repräsentation der Eingabe verwendeten Datenstrukturen. Die sogenannte „O-Notation“ stellt eine einfache Methode zur Verfügung, um konkrete Konstanten auszublenden.

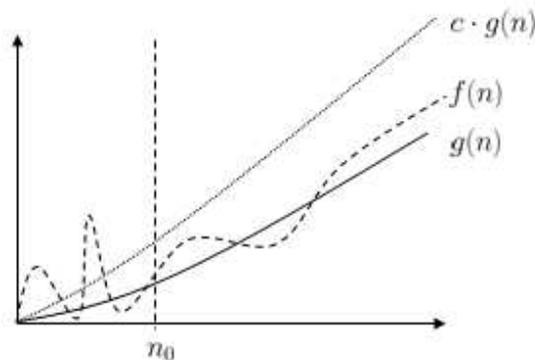
Definition A.1 (O-Notation)

Seien f und g Funktionen von \mathbb{N} nach \mathbb{N} . Wir schreiben

$$f \in O(g)$$

wenn es eine Konstante $c > 0$ und Schranke $n_0 \geq 0$ gibt, so dass $f(n) \leq c \cdot g(n)$ für alle $n > n_0$.

Mit anderen Worten bedeutet $f \in O(g)$, dass f „schließlich nicht wesentlich schneller wächst“ als g . Die folgende Graphik illustriert dies anhand zweier Funktionen $f(n)$ und $g(n)$ mit $f \in O(g)$:



Wie in Definition A.1 gefordert, liegt f schliesslich (d.h. ab der Schranke n_0) unterhalb der mit der Konstanten c skalierten Funktion $c \cdot g(n)$. Auch wenn der absolute Wert von $f(n)$ an vielen Stellen größer ist als der von $g(n)$, wächst f also nicht wesentlich schneller als g .

Wir verwenden die Laufzeitbeschreibung $O(f(n))$, wenn wir ausdrücken wollen, dass die Laufzeit $f(n)$ ist, bis auf Konstanten (repräsentiert durch c) und endlich viele Ausnahmen (repräsentiert durch n_0). Insbesondere beschreibt

- $O(n)$ Linearzeit;
- $O(n^2)$ quadratische Zeit und
- $\bigcup_{i \geq 1} n^i$ polynomielle Zeit.

Es existieren verschiedene Rechenregeln für die O -Notation wie zum Beispiel

- $O(O(f)) = O(f)$;
- $O(f) + O(g) = O(f + g)$ und
- $O(f) \cdot O(g) = O(f \cdot g)$.

Mehr Informationen zur O -Notation finden sich beispielsweise im Buch „Concrete Mathematics“ von Graham, Knuth und Patashnik.

B. Crashkurs Logik

Die Logik hat als Teildisziplin der Philosophie eine Tradition von mehr als zweitausend Jahren. In jüngerer Zeit spielt sie zudem eine sehr wichtige Rolle als formale Grundlage der Informatik. Am augenfälligsten ist dies wahrscheinlich im Hardwareentwurf, wo Logik in Form von Schaltkreisen große Bedeutung hat. Logik ist aber auch in vielen anderen Teilgebieten der Informatik essentiell, auch wenn dies manchmal nicht ganz offensichtlich ist. Dafür seien drei Beispiele genannt. Erstens ist die bekannte Datenbanksprache SQL im wesentlichen eine Logik mit einer benutzerfreundlichen Syntax. Zweitens ist Logik im Gebiet der Programmverifikation, wo in automatisierter Weise die Fehlerfreiheit von Programmen überprüft werden soll, als Spezifikationsprache von zentraler Bedeutung. Und drittens ist Logik ein wichtiges Werkzeug in der Komplexitätstheorie, wo sie bei der Analyse wichtiger Informatikprobleme ein vielfach verwendetes Hilfsmittel darstellt.

Es gibt viele verschiedene Arten von Logiken, die in der Informatik Verwendung finden, wie zum Beispiel die Aussagenlogik, die Prädikatenlogik erster Stufe, Prädikatenlogiken höherer Stufe und das μ -Kalkül. All diese Logiken haben recht verschiedene Eigenschaften. In dieser kurzen Einführung werden wir uns auf die Aussagenlogik und (eine leicht vereinfachte Version der) Prädikatenlogik beschränken. Wir beginnen mit der Aussagenlogik, die die einfachste der genannten Logiken ist und sich in den anderen, komplexeren Logiken als elementarer „Baustein“ wiederfindet.

B.1. Aussagenlogik

Die Aussagenlogik behandelt die logische Verknüpfung von atomaren Aussagen mittels sogenannter *Junktoren* wie „und“, „oder“ und „nicht“. Atomare Aussagen sind Aussagen, die entweder wahr oder falsch sein können und deren innere Struktur nicht weiter betrachtet wird, wie zum Beispiel „Die Erde ist ein Planet“ oder „Bremen liegt am Ganges“. Wir werden von konkreten Aussagen dieser Art abstrahieren und stattdessen mit *Aussagenvariablen* arbeiten, die die Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ annehmen können und die wir mit den Buchstaben x, y, z bezeichnen. Daraus lassen sich dann aussagenlogische *Formeln* bilden, die zusammengesetzte Aussagen repräsentieren, wie zum Beispiel „ x und nicht y “. Der Wahrheitswert derartiger Formeln ergibt sich aus den Wahrheitswerten der verknüpften Aussagenvariablen. Dies werden wir im Folgenden formal definieren. Dabei fixieren wir eine abzählbar unendliche Menge VAR von Aussagenvariablen.

Definition B.1 (Syntax Aussagenlogik)

Die (*aussagenlogischen*) *Formeln* sind induktiv wie folgt definiert:

- jede Aussagenvariable ist eine aussagenlogische Formel;
- wenn φ und ψ aussagenlogische Formeln sind, dann auch
 - $\neg\varphi$ (*Negation*),
 - $(\varphi \wedge \psi)$ (*Konjunktion*) und

– $(\varphi \vee \psi)$ (*Disjunktion*).

Beispiele für aussagenlogische Formeln sind also

$$\neg x \quad \neg\neg y \quad (x \wedge \neg y) \quad \neg(x \vee y) \wedge \neg(\neg x \vee \neg y).$$

Wir lassen die Klammern weg, wenn das Resultat eindeutig ist, wobei \neg stärker bindet als \wedge und \vee . Zum Beispiel:

- Die Formel $\neg x \wedge y$ steht für $(\neg x) \wedge y$, nicht etwa für $\neg(x \wedge y)$.
- Formeln wie $x_1 \wedge y_1 \vee x_2 \wedge y_2$ sind ohne Klammern nicht erlaubt, da wir zwischen \wedge und \vee keine Präzedenz bzgl. der Bindungsstärke vereinbaren.

Definition B.2 (Semantik Aussagenlogik)

Eine (*aussagenlogische*) *Belegung* ist eine Abbildung $B : \text{VAR} \rightarrow \{0, 1\}$. Belegungen werden wie folgt auf zusammengesetzte Formeln erweitert:

- $B(\neg\varphi) = 1 - \varphi$
- $B(\varphi \wedge \psi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } B(\varphi) = 1 \text{ und } B(\psi) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
- $B(\varphi \vee \psi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } B(\varphi) = 1 \text{ oder } B(\psi) = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Wenn $B(\varphi) = 1$, dann *erfüllt* B die Formel φ . In diesem Fall nennen wir B ein *Modell* von φ .

Intuitiv steht 1 für den Wahrheitswert „wahr“ und 0 für „falsch“. Wenn B die Variable x auf 1 abbildet, so notieren wir das auch als $x \mapsto_B 1$. Als Beispiel überlegt man sich leicht, dass folgendes gilt:

wenn $x \mapsto_B 0$, $y \mapsto_B 1$ und $z \mapsto_B 1$, dann erfüllt B die Formel $\neg(\neg x \wedge y) \vee z$.

Man kann die Semantik der Junktoren in sehr übersichtlicher Weise in Form von *Wahrheitstabellen* darstellen:

$B(\varphi)$	$B(\neg\varphi)$	$B(\varphi)$	$B(\psi)$	$B(\varphi \wedge \psi)$	$B(\varphi)$	$B(\psi)$	$B(\varphi \vee \psi)$
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

In dieser Darstellung wird sofort deutlich, dass auch andere Junktoren denkbar sind. In der Tat gibt es eine Vielzahl gebräuchlicher Junktoren. Wir definieren hier beispielhaft die folgenden:

- *Implikation* wird bezeichnet durch $(\varphi \rightarrow \psi)$

$B(\varphi)$	$B(\psi)$	$B(\varphi \rightarrow \psi)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Intuitiv bedeutet die einzige Zeile mit Ergebnis 0, dass aus einer wahren Aussage niemals eine falsche Aussage folgen kann. Umgekehrt folgt aus einer falschen Aussage aber jede beliebige Aussage, egal ob sie wahr oder falsch ist. Zur Illustration mag die Implikation „Wenn Bremen am Ganges liegt, dann ist die Erde ein Planet“ dienen, deren Wahrheitswert man intuitiv als „wahr“ empfindet, obwohl die Vorbedingung „Bremen liegt am Ganges“ falsch ist.

- *Biimplikation* wird bezeichnet durch $(\varphi \leftrightarrow \psi)$

$B(\varphi)$	$B(\psi)$	$B(\varphi \leftrightarrow \psi)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Intuitiv bedeutet $\varphi \leftrightarrow \psi$ also schlicht und einfach, dass φ and ψ denselben Wahrheitswert haben.

Im Umgang mit aussagenlogischen Formeln spielt der Begriff der logischen Äquivalenz eine wichtige Rolle.

Definition B.3 (Logische Äquivalenz)

Zwei Formeln φ und ψ sind *äquivalent*, geschrieben $\varphi \equiv \psi$, wenn für alle Belegungen B gilt: $B(\varphi) = B(\psi)$.

Die Hinzunahme der Implikation und Biimplikation zur Aussagenlogik erhöht deren Ausdrucksstärke nicht, denn

1. $\varphi \rightarrow \psi$ ist äquivalent zu $\neg\varphi \vee \psi$ und
2. $\varphi \leftrightarrow \psi$ ist äquivalent zu $(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Die Gültigkeit dieser (und anderer) Äquivalenzen kann man leicht mittels Wahrheitstafeln nachweisen. Für Punkt 1 prüft man beispielsweise, dass für alle möglichen Wahrheitswerte von φ und ψ die Formeln $\varphi \rightarrow \psi$ und $\neg\varphi \vee \psi$ zum selben Wahrheitswert auswerten.

Wir verwenden im folgenden also ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Implikation und Biimplikation als Junktoren der Aussagenlogik. Dabei nehmen wir an, dass \neg, \wedge, \vee

stärker binden als \rightarrow und \leftrightarrow . Beispielsweise steht also $x \wedge y \rightarrow z$ für $(x \wedge y) \rightarrow z$ und nicht etwa für $x \wedge (y \rightarrow z)$. Man kann beweisen, dass die Junktoren \neg, \wedge, \vee ausreichend sind, um *jeden* Junktor, der durch eine Wahrheitstafel definiert werden kann, auszudrücken.

Im Folgenden sind einige weitere Äquivalenzen aufgeführt. Diese sind nützlich, um aussagenlogische Formeln umzuformen, ohne ihre Bedeutung zu verändern. Für alle Formeln φ, ψ und ϑ gilt:

$\varphi \equiv \neg\neg\varphi$	Doppelte Negation
$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$	De Morgansches Gesetz
$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$	De Morgansches Gesetz
$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$	Idempotenz von Konjunktion
$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$	Idempotenz von Disjunktion
$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$	Kommutativität von Konjunktion
$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$	Kommutativität von Disjunktion
$(\varphi \wedge \psi) \wedge \vartheta \equiv \varphi \wedge (\psi \wedge \vartheta)$	Assoziativität von Konjunktion
$(\varphi \vee \psi) \vee \vartheta \equiv \varphi \vee (\psi \vee \vartheta)$	Assoziativität von Disjunktion
$\varphi \wedge (\psi \vee \vartheta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \vartheta)$	Distributivgesetz
$\varphi \vee (\psi \wedge \vartheta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \vartheta)$	Distributivgesetz

Die Assoziativgesetze erlauben es, Klammern innerhalb von mehrfachen Konjunktionen bzw. Disjunktionen wegzulassen; wir schreiben im folgenden also beispielsweise $x \wedge y \wedge z$ ohne Klammern.

Die Aussagenlogik ist eine sehr einfache logische Sprache. Dennoch sind einige mit dieser Logik verbundenen Entscheidungsprobleme in algorithmischer und komplexitätstheoretischer Hinsicht keineswegs trivial. Wir betrachten zunächst das Auswertungsproblem, das sehr einfach und effizient zu lösen ist.

Lemma B.4

Gegeben eine aussagenlogische Formel φ und eine Belegung B kann man in Linearzeit entscheiden, ob $B(\varphi) = 1$ (Auswertungsproblem).

Beweis. Wir zeigen das Lemma nur für polynomielle Zeit statt für Linearzeit. Der folgende rekursive Algorithmus leitet sich direkt aus der Semantik her:

```

procedure auswertung( $\varphi, B$ )
case
   $\varphi = x$  do return  $B(x)$ 
   $\varphi = \neg\psi$  do return  $1 - \text{auswertung}(\psi, B)$ 
   $\varphi = \psi \wedge \vartheta$  do return  $\min\{\text{auswertung}(\psi, B), \text{auswertung}(\vartheta, B)\}$ 
   $\varphi = \psi \vee \vartheta$  do return  $\max\{\text{auswertung}(\psi, B), \text{auswertung}(\vartheta, B)\}$ 
end case
    
```

Die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist beschränkt durch die *Größe* von φ , hier definiert als Anzahl der Variablen und Junktorkommen in φ . Die Größe von $\neg(\neg x \wedge y) \vee x$ ist also beispielsweise 7. \square

Aus logischer Sicht besonders interessant sind gültige und unerfüllbare Formeln. Wir führen diese Begriffe im Folgenden ein.

Definition B.5 (Erfüllbarkeit, Gültigkeit)

Eine Formel φ heißt

- *erfüllbar* wenn es eine Belegung B gibt, die φ erfüllt;
- *gültig* wenn φ von jeder Belegung B erfüllt wird.

Beispiele für unerfüllbare Formeln sind

$$x \wedge \neg x \quad x \wedge \neg y \wedge (x \rightarrow y) \quad (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$$

Beispiele für gültige Formeln sind

$$x \vee \neg x \quad (x \wedge y) \leftrightarrow \neg(\neg x \vee \neg y) \quad (x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y)$$

Erfüllbarkeit und Gültigkeit sind in folgendem Sinn dual zueinander.

Lemma B.6

Für jede Formel φ gilt:

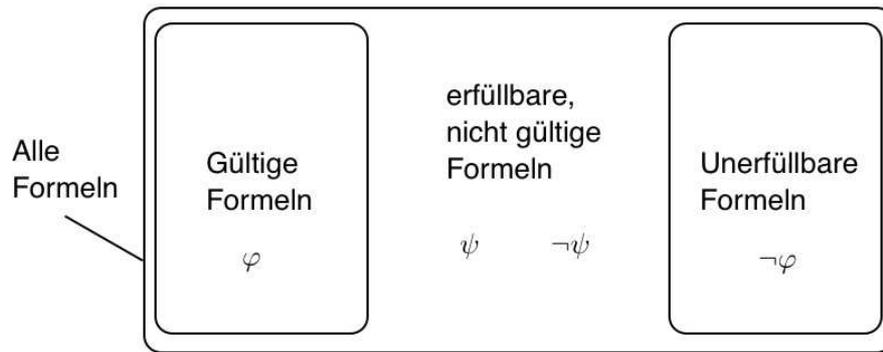
1. φ ist erfüllbar gdw. $\neg\varphi$ nicht gültig ist;
2. φ ist gültig gdw. $\neg\varphi$ unerfüllbar ist.

Beweis. Zu Punkt 1:

- φ ist erfüllbar
- gdw. eine Belegung B existiert, die φ erfüllt
- gdw. eine Belegung B existiert, die $\neg\varphi$ nicht erfüllt
- gdw. $\neg\varphi$ nicht gültig.

Punkt 2 zeigt man auf ähnliche Weise. Es wird empfohlen, die Details zur Übung auszuarbeiten. \square

Das folgende Bild stellt die verschiedenen Arten von Formeln anschaulich dar:



Erfüllbarkeit und Gültigkeit sind in der Aussagenlogik offensichtlich entscheidbar: gegeben eine Formel φ mit Variablen x_1, \dots, x_n erzeugt man systematisch alle 2^n möglichen Belegungen B und prüft jeweils, ob $B(\varphi) = 1$ (Auswertungsproblem). Dieser Algorithmus ist zwar einfach, aber vollkommen unpraktikabel aufgrund der exponentiell großen Zahl von Belegungen. Wir werden später sehen, dass es wahrscheinlich keinen wesentlich effizienteren Algorithmus gibt. Das gilt bereits, wenn die Formeln in gewissen Normalformen gegeben sind, die wir als nächstes einführen.

Definition B.7 (KNF/DNF)

Ein *Literal* ist eine Formel der Form x oder $\neg x$, wobei x eine Aussagenvariable ist. Eine aussagenlogische Formel ist in

- *konjunktiver Normalform (KNF)* wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist, also die folgende Form hat:

$$(\ell_{1,1} \vee \dots \vee \ell_{1,m_1}) \wedge \dots \wedge (\ell_{1,n} \vee \dots \vee \ell_{1,m_n})$$

wobei $\ell_{i,j}$ Literale sind;

- *disjunktiver Normalform (DNF)* wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist, also die folgende Form hat:

$$(\ell_{1,1} \wedge \dots \wedge \ell_{1,m_1}) \vee \dots \vee (\ell_{1,n} \wedge \dots \wedge \ell_{1,m_n})$$

wobei $\ell_{i,j}$ Literale sind.

Eine Formel der Form $\ell_{1,1} \vee \dots \vee \ell_{1,m_1}$ nennen wir *Klausel*.

Eine Formel in KNF ist also eine Konjunktion von Klauseln.

Satz B.8

Jede aussagenlogische Formel ist äquivalent zu einer Formel in DNF und zu einer Formel in KNF.

Beweis. Sei φ eine Formel mit Variablen x_1, \dots, x_n . Zu jeder Belegung B der Variablen in φ definieren wir eine Formel

$$\vartheta_B = \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_n$$

wobei $\ell_i = x_i$ wenn $B(x_i) = 1$ und $\ell_i = \neg x_i$ wenn $B(x_i) = 0$. Seien B_1, \dots, B_k alle Belegungen der Variablen in φ , so dass $B_i(\varphi) = 1$. Setze

$$\psi := \vartheta_{B_1} \vee \dots \vee \vartheta_{B_k}.$$

Offensichtlich ist ψ in DNF. Zudem ist ψ äquivalent zu φ :

- Angenommen, es gilt $B(\varphi) = 1$. Dann ist ϑ_B ein Disjunkt von ψ . Um zu zeigen, dass $B(\psi) = 1$, genügt es also, zu zeigen, dass $B(\vartheta_B) = 1$. Dies ist aber offensichtlich.
- Angenommen, es gilt $B(\psi) = 1$. Da ψ eine Disjunktion ist, existiert ein Disjunkt $\psi_{B'}$ mit $B(\psi_{B'}) = 1$. Dies bedeutet offensichtlich, dass B und B' alle Variablen in φ in identischer Weise interpretieren. Da $\psi_{B'}$ ein Disjunkt in ψ ist, gilt $B'(\varphi) = 1$ und damit $B(\varphi) = 1$.

Es bleibt, zu zeigen, dass φ auch äquivalent zu einer Formel in KNF ist. Dies geschieht in folgenden Schritten:

1. φ ist äquivalent zu $\neg\neg\varphi$;
2. in $\neg\neg\varphi$ kann die innere Teilformel $\neg\varphi$ in eine äquivalente Formel in DNF umgewandelt werden, also ist φ äquivalent zu einer Formel der Form

$$\neg((\ell_{1,1} \wedge \dots \wedge \ell_{1,m_1}) \vee \dots \vee (\ell_{1,n} \wedge \dots \wedge \ell_{1,m_n})).$$

3. Anwendung der de Morganschen Gesetze ergibt zunächst

$$\neg(\ell_{1,1} \wedge \dots \wedge \ell_{1,m_1}) \wedge \dots \wedge \neg(\ell_{1,n} \wedge \dots \wedge \ell_{1,m_n});$$

4. nochmaliges Anwenden von de Morgan liefert die gewünschte Formel in KNF

$$(\neg\ell_{1,1} \vee \dots \vee \neg\ell_{1,m_1}) \wedge \dots \wedge (\neg\ell_{1,n} \vee \dots \vee \neg\ell_{1,m_n}).$$

□

Man beachte, dass die Umformungen im Beweis von Satz B.8 eine DNF (bzw. KNF) Formel ψ liefern, die exponentiell größer ist als die ursprüngliche Formel φ . Insbesondere kann ψ aus bis zu 2^n Disjunkten bestehen, wobei n die Anzahl der Variablen in φ ist. Es gibt zwar raffinierte Umwandlungsverfahren als das im obigen Beweis verwendete, aber ein im schlimmsten Fall exponentielles Vergrößern der Formel kann dabei (beweisbar!) nicht verhindert werden.

Erfüllbarkeit von KNF Formeln und Gültigkeit von DNF Formeln sind im wesentlichen immernoch genauso schwierig wie für aussagenlogische Formeln, die in ihrer Form nicht eingeschränkt sind. Für die umgekehrten Fälle gilt das nicht, also für die Gültigkeit von KNF Formeln und die Erfüllbarkeit von DNF Formeln. Es ist nicht schwer zu beweisen, dass die letztgenannten Probleme in polynomieller Zeit lösbar sind (Übung).

B.2. Prädikatenlogik

Die Prädikatenlogik ist eine Erweiterung der Aussagenlogik, die eine detailliertere Modellierung ermöglicht. Insbesondere erlaubt sie die Verwendung von *Quantoren*, bezeichnet mit \forall und \exists . Dies ermöglicht zum Beispiel Aussagen der Form „es gibt einen Fluß, der durch Bremen fließt“ und „alle Planeten sind Himmelskörper, die um die Sonne kreisen“ ohne dass deren innere Struktur (wie in der Aussagenlogik) wegabstrahiert wird. Wir benötigen dazu eine andere Semantik, die auf *relationalen Strukturen* anstatt auf Belegungen beruht. Wie wir sehen werden, führt die höhere Ausdrucksstärke der Prädikatenlogik dazu, dass Erfüllbarkeit und Gültigkeit unentscheidbar werden. Dennoch spielt die Prädikatenlogik in der Informatik eine sehr wichtige Rolle, zum Beispiel als formale Grundlage für SQL Datenbanken. Mit „Prädikatenlogik“ meinen wir hier stets die Prädikatenlogik *erster Stufe* (es gibt auch Prädikatenlogiken höherer Stufe). Synonyme sind *Logik erster Stufe* und auf englisch *first-order logic*.

Wir verwenden Prädikatsymbole und bezeichnen diese mit P, R, S . Jedes Prädikatsymbol hat eine zugeordnete *Stelligkeit* $n \in \mathbb{N}$. Intuitiv ist ein solches Symbol ein Bezeichner für eine n -stellige Relation. Wir nehmen an, dass es beliebig viele Prädikatsymbole jeder Stelligkeit gibt. In der vollen Prädikatenlogik gibt es zudem Konstanten, Funktionssymbole und meist auch Gleichheit. Wir lassen diese Elemente weg, um die Präsentation einfach zu halten. Für mehr zur Prädikatenlogik wird die Bachelor-VL „Logik“ empfohlen.

Definition B.9 (Syntax Prädikatenlogik)

Die *prädikatenlogischen Formeln* sind induktiv wie folgt definiert:

- ist P ein n -stelliges Prädikatsymbol, dann ist $P(x_1, \dots, x_n)$ eine prädikatenlogische Formel
- wenn φ und ψ prädikatenlogische Formeln sind, dann auch
 - $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi)$ (*Boolsche Operatoren*)
 - $\exists x \varphi$ und $\forall x \varphi$ (*existentieller und universeller Quantor*).

Wir lassen wieder die Klammern weg, wenn das Resultat eindeutig ist. Dabei binden die einstelligen Operatoren (\neg, \forall, \exists) stärker als die zweistelligen (\wedge, \vee). Beispiele für prädikatenlogische Formeln sind:

$$\begin{aligned} \forall x \exists y R(x, y) \quad \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)) \\ \neg \exists x \exists y \exists z (A(x) \wedge S(x, y, y, z) \wedge R(y, z)) \end{aligned}$$

Die Semantik der Prädikatenlogik beruht auf relationalen Strukturen, die den Prädikatsymbolen eine Bedeutung zuweisen. Wenn zusätzlich auch den Variablen eine Bedeutung zugewiesen wird, spricht man stattdessen von einer Interpretation. Wir führen direkt letztere ein.

Definition B.10 (Semantik der Prädikatenlogik Teil I: Interpretationen)

Eine *Interpretation* ist ein Paar $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ wobei $U_{\mathcal{A}}$ eine beliebige aber nicht leere Menge ist, die das *Universum* genannt wird, und $I_{\mathcal{A}}$ eine Abbildung, die

- jeder Variable x ein Element aus $U_{\mathcal{A}}$ zuordnet und
- jedem n -stelligen Prädikatsymbol P eine n -stellige Relation über U .

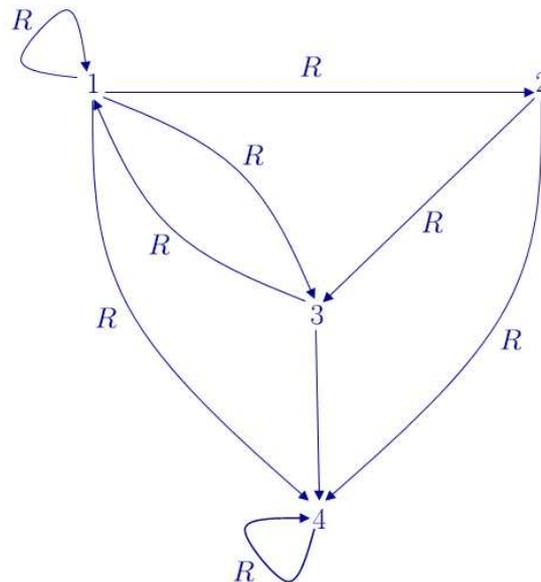
Statt $I_{\mathcal{A}}(x)$ schreiben wir verkürzend $x^{\mathcal{A}}$ und statt $I_{\mathcal{A}}(P)$ schreiben wir $P^{\mathcal{A}}$.

Variablen stehen im Unterschied zur Aussagenlogik also nicht mehr für Wahrheitswerte, sondern für Elemente des Universums. Wir geben $I_{\mathcal{A}}$ stets nur für diejenigen Variablen und Prädikatsymbole an, die in den betrachteten Formeln auch wirklich vorkommen. Wie bereits erwähnt ist eine *relationale Struktur* eine Interpretation, die lediglich die Prädikatsymbole interpretiert, nicht jedoch die Variablen.

Wir wollen im folgenden zwei recht unterschiedliche Beispiele für logische Strukturen betrachten.

Beispiel B.11

Wir verwenden ein einziges 2-stelliges (binäres) Prädikatsymbol R . Relationale Strukturen sind dann genau dasselbe wie gerichtete Graphen und werden praktischerweise auch so dargestellt. Betrachte zum Beispiel die folgende Struktur \mathcal{A} :



In der oben dargestellten Struktur \mathcal{A} ist

$$U_{\mathcal{A}} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R^{\mathcal{A}} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), \dots\}.$$

Beispiel B.12

Es gibt enge Zusammenhänge zwischen Prädikatenlogik und Datenbanken. In diesem Kontext sind Prädikatensymbole hoher Stelligkeit besonders wichtig. Deren Interpretation entspricht dann einer Tabelle im Sinne von SQL, eine relationale Struktur entspricht also einer Menge von Tabellen und damit einer Datenbankinstanz. Als konkretes Beispiel betrachte ein einzelnes 7-stelliges Prädikatensymbol *Angestellt*. Eine relationale Struktur kann nun als Tabelle dargestellt werden, beispielsweise

Angestellt:

Klaus	Meier	Abt1	Müller	H1	345	64431
Hans	Schmidt	Abt1	Köpke	A3	24	53467
Tom	Müller	Abt2	Schmidt	H1	568	44660
Hein	Mück	Abt1	Schmidt	B4	34	44579

Jede Zeile entspricht einem Angestellten. Die erste Spalte speichert dabei den Vornamen, die zweite den Nachnamen, die dritte die Abteilung, die vierte den Nachnamen des Vorgesetzten, die fünfte die Büronummer, die sechste die Personalnummer und die siebte die Telefonnummer.

In der oben dargestellten Struktur \mathcal{B} ist

$$\begin{aligned}
 U_{\mathcal{B}} &= \{\text{Klaus, Meier, Abt1, Müller, H1, 345, } \dots \} \\
 \text{Angestellt}^{\mathcal{B}} &= \{(\text{Klaus, Meier, Abt1, Müller, H1, 345, 64431}), \\
 &\quad (\text{Hans, Schmidt, Abt1, Köpke, A3, 24, 53467}), \\
 &\quad \dots \}
 \end{aligned}$$

Wir müssen natürlich noch festlegen, wie prädikatenlogische Formeln und Interpretationen zusammenhängen.

Definition B.13 (Semantik der Prädikatenlogik Teil II)

Sei $\mathcal{A} = (U_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{A}})$ eine Interpretation. Der *Wahrheitswert* $\mathcal{A}(\varphi)$ von prädikatenlogischen Formeln φ in \mathcal{A} ist induktiv wie folgt definiert:

- wenn φ die Form $P(x_1, \dots, x_n)$ hat, dann
 $\mathcal{A}(\varphi) = 1$ gdw. $(x_1^{\mathcal{A}}, \dots, x_n^{\mathcal{A}}) \in P^{\mathcal{A}}$
- wenn φ die Form $\neg\psi$ hat, dann
 $\mathcal{A}(\varphi) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(\psi) = 0$
- wenn φ die Form $\psi \wedge \vartheta$ hat, dann
 $\mathcal{A}(\varphi) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(\psi) = 1$ und $\mathcal{A}(\vartheta) = 1$
- wenn φ die Form $\psi \vee \vartheta$ hat, dann
 $\mathcal{A}(\varphi) = 1$ gdw. $\mathcal{A}(\psi) = 1$ oder $\mathcal{A}(\vartheta) = 1$

- wenn φ die Form $\exists x \psi$ hat, dann
 $\mathcal{A}(\varphi) = 1$ gdw. es ein $d \in U_{\mathcal{A}}$ gibt so dass $\mathcal{A}_{[x/d]}(\psi) = 1$
- wenn φ die Form $\forall x \psi$ hat, dann
 $\mathcal{A}(\varphi) = 1$ gdw. für alle $d \in U_{\mathcal{A}}$ gilt: $\mathcal{A}_{[x/d]}(\psi) = 1$

wobei $\mathcal{A}_{[x/d]}(\psi)$ die Interpretation bezeichnet, die sich aus \mathcal{A} ergibt, indem man $x^{\mathcal{A}} = d$ setzt.

Wenn $\mathcal{A}(\varphi) = 1$, dann *erfüllt* die Interpretation \mathcal{A} die Formel φ . Wir sagen auch: \mathcal{A} ist ein *Modell* von φ .

Wir werden im folgenden meist Formeln verwenden, bei denen jede Variable im Skopus eines Quantors ist. Derartige Formeln nennt man *Sätze*. Zum Beispiel ist also $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$ ein Satz, nicht aber $\forall y (R(x, y) \rightarrow \exists x S(y, x))$ denn das Vorkommen der Variable x in der Teilformel $R(x, y)$ ist nicht im Skopus eines Quantors. Dass die Variable x „später“ durch einen Existenzquantor gebunden wird und in der Teilformel $S(y, x)$ innerhalb dessen Skopus ist, spielt dabei keine Rolle. Eine präzisere Definition ist im Prinzip auch nicht schwierig, wir verweisen auf einführende Literatur zur Logik. Man kann leicht zeigen, dass der Wahrheitswert eines *Satzes* in einer Interpretation \mathcal{A} unabhängig davon ist, in welcher Weise \mathcal{A} die Variablen interpretiert. Das werden wir im folgenden implizit ausnutzen, indem wir im Falle von Sätzen nur relationale Strukturen verwenden statt Interpretationen.

Als Beispiel betrachte man zunächst nochmal die Struktur \mathcal{A} aus Beispiel B.11. Der Satz $\forall x \exists y R(x, y)$ ist in dieser Struktur \mathcal{A} erfüllt. Der Satz

$$\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$$

ist hingegen nicht erfüllt, denn es gilt $(3, 1) \in R^{\mathcal{A}}$, $(1, 2) \in R^{\mathcal{A}}$, aber $(3, 2) \notin R^{\mathcal{A}}$. Man kann weiterhin überprüfen, dass der folgende Satz erfüllt ist:

$$\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \exists z (R(x, z) \wedge R(y, z))).$$

Man betrachte nun die Struktur \mathcal{B} aus Beispiel B.12. Der folgende Satz drückt aus, dass es einen Angestellten gibt, der sich mit seinem Vorgesetzten das Büro teilt:

$$\exists x_1 \cdots \exists x_7 \exists y_1 \cdots \exists y_7 (\text{Angestellter}(x_1, \dots, x_7) \wedge \text{Angestellter}(y_1, y_2, y_3, x_2, x_5, y_6, y_7))$$

Beachte, dass x_2 den Nachnamen repräsentiert und in der zweiten Zeile an der Stelle des Vorgesetzten verwendet wird. Das Teilen des Büros wird dadurch repräsentiert, dass an der fünften Stelle, die das Büro repräsentiert, in beiden Zeilen dieselbe Variable verwendet wird. Der obige Satz ist in \mathcal{B} erfüllt. Im Kontext von Datenbanken interessiert man sich natürlich nicht nur für erfüllt sein oder nicht, sondern möchte „echte Antworten“ (statt nur wahr/falsch). Auch das ist in der Prädikatenlogik machbar, wird hier aber nicht weiter behandelt.

Bemerkung. In wiefern ist die Prädikatenlogik eine „Erweiterung“ der Aussagenlogik? Man beachte, dass in der Prädikatenlogik auch nullstellige Prädikatsymbole P zugelassen sind. In jeder Interpretation \mathcal{A} gilt entweder $P^{\mathcal{A}} = \emptyset$ oder $P^{\mathcal{A}} = \{()\}$, wobei $()$ das leere Tupel bezeichnet. Wir identifizieren ersteres mit „ P ist falsch in \mathcal{A} “ und letzteres mit „ P ist wahr in \mathcal{A} “. Nullstellige Prädikate verhalten sich also wie Aussagenvariablen. Aussagenlogik entspricht nun der Prädikatenlogik mit ausschließlich nullstelligen Prädikatsymbolen. In diesem Fall erübrigen sich Quantoren und prädikatenlogische Variablen und die (für die Prädikatenlogik noch zu definierenden) Begriffe von Erfüllbarkeit und Gültigkeit stimmen überein.

Wir zeigen nun, dass die Erweiterung der Aussagenlogik zur Prädikatenlogik nichts an der Entscheidbarkeit des Auswertungsproblems ändert.

Lemma B.14

Gegeben eine prädikatenlogische Formel φ und eine Interpretation \mathcal{A} kann man entscheiden, ob $\mathcal{A}(\varphi) = 1$ (Auswertungsproblem).

Beweis. Der folgende rekursive Algorithmus ergibt sich im Prinzip wieder direkt aus der Semantik:

```

procedure auswertung( $\varphi, \mathcal{A}$ )
  case
     $\varphi = P(x_1, \dots, x_n)$  do return  $(x_1^{\mathcal{A}}, \dots, x_n^{\mathcal{A}}) \in P^{\mathcal{A}}$ 
     $\varphi = \neg\psi$  do return  $1 - \text{auswertung}(\psi, \mathcal{A})$ 
     $\varphi = \psi \wedge \vartheta$  do return  $\min\{\text{auswertung}(\psi, \mathcal{A}), \text{auswertung}(\vartheta, \mathcal{A})\}$ 
     $\varphi = \psi \vee \vartheta$  do return  $\max\{\text{auswertung}(\psi, \mathcal{A}), \text{auswertung}(\vartheta, \mathcal{A})\}$ 
     $\varphi = \exists x \psi$  do return  $\max\{\text{auswertung}(\psi, \mathcal{A}_{[x/d]}) \mid d \in U_{\mathcal{A}}\}$ 
     $\varphi = \forall x \psi$  do return  $\min\{\text{auswertung}(\psi, \mathcal{A}_{[x/d]}) \mid d \in U_{\mathcal{A}}\}$ 
  end case
  
```

□

Der obige Algorithmus läuft allerdings nicht mehr in Polynomialzeit. Man kann sich überlegen, dass die Rekursionstiefe beschränkt ist durch die Größe von φ , die genauso wie in der Aussagenlogik definiert ist. Zudem werden in jedem Schritt höchstens so viele rekursive Aufrufe gemacht, wie $U_{\mathcal{A}}$ Elemente hat. Es ergibt sich also ein Rekursionsbaum von linearer Tiefe und linearer Verzweigungszahl (der im Unterschied zur Aussagenlogik aber nicht mehr einfach nur die Struktur der Eingabeformel widerspiegelt). So ein Baum ist exponentiell groß und damit ist die Laufzeit des Algorithmus ebenfalls exponentiell. In der Tat ist das Auswertungsproblem in der Prädikatenlogik wahrscheinlich nicht effizient lösbar (es ist PSPACE-vollständig).

Erfüllbarkeit und Gültigkeit in der Prädikatenlogik definiert man analog zur Aussagenlogik.

Definition B.15 (Erfüllbarkeit, Gültigkeit)

Eine prädikatenlogische Formel φ heisst

- *erfüllbar* wenn es eine Interpretation \mathcal{A} gibt, die φ erfüllt;
- *gültig* wenn φ von jeder Interpretation \mathcal{A} erfüllt wird.

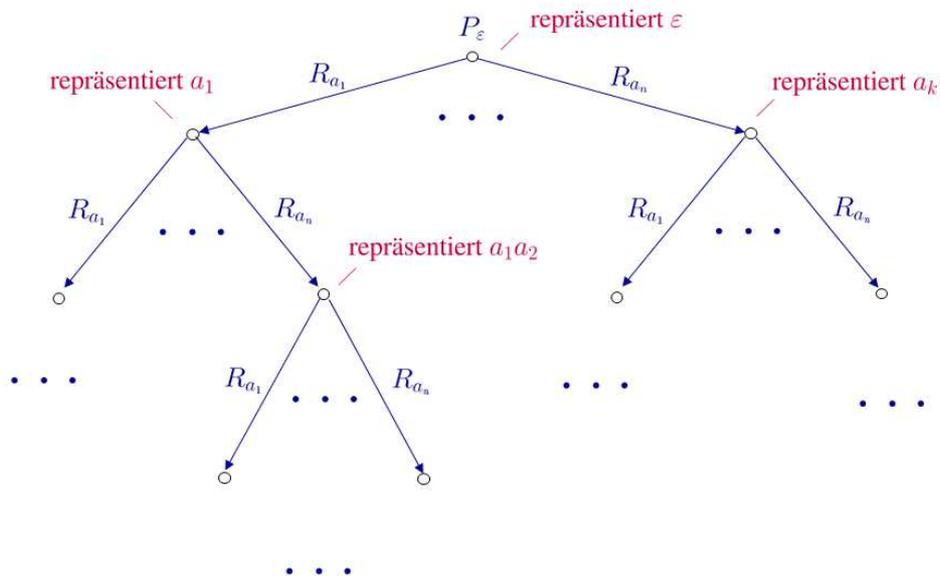
Ein Beispiel für eine gültige Formel ist $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$. Um das nachzuweisen, kann man semantisch wie folgt argumentieren. Angenommen, eine Interpretation \mathcal{A} erfüllt $\exists x \forall y P(x, y)$. Dann gibt es nach Semantik ein $d \in U_{\mathcal{A}}$ so dass für alle $e \in U_{\mathcal{A}}$ gilt: $(d, e) \in P^{\mathcal{A}}$. Es ist zu zeigen, dass \mathcal{A} auch $\forall y \exists x P(x, y)$ erfüllt. Sei also $f \in U_{\mathcal{A}}$. Dann $(d, f) \in P^{\mathcal{A}}$ und damit ist d das gesuchte x .

Unser Hauptresultat für die Prädikatenlogik ist, dass sowohl Erfüllbarkeit als auch Gültigkeit unentscheidbar sind. Man überlegt sich leicht, dass die in Lemma B.6 formulierten Reduktionen auch in der Prädikatenlogik gelten. Es ist also ausreichend, Unentscheidbarkeit von Gültigkeit zu zeigen. Wir erledigen dies durch eine Reduktion des PKP.

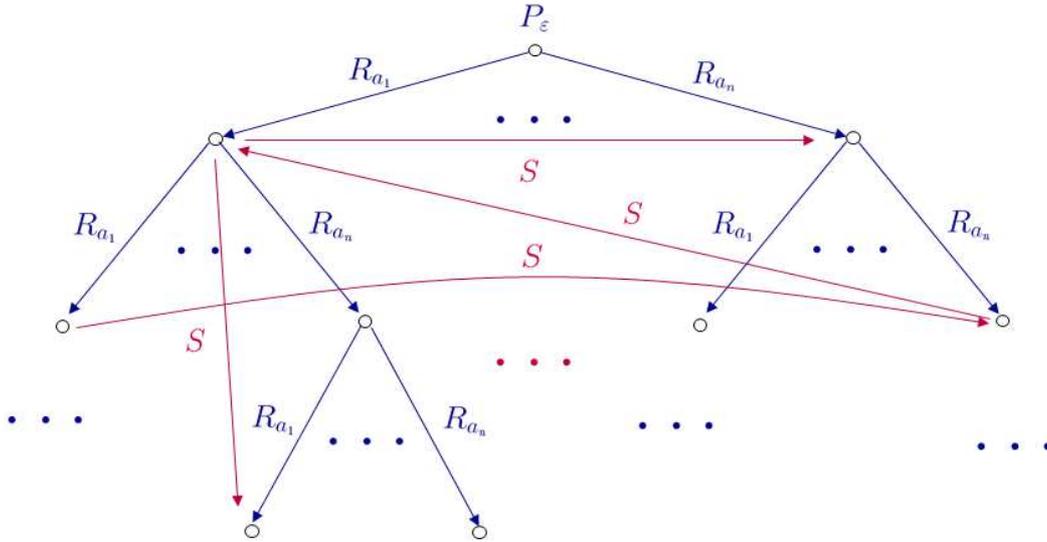
Satz B.16

Das PKP kann auf Gültigkeit in der Prädikatenlogik reduziert werden. Damit ist Gültigkeit in der Prädikatenlogik unentscheidbar.

Beweis. Sei $P = (u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k)$ eine PKP-Instanz. Wir konstruieren eine prädikatenlogische Formel ψ_P , so dass P eine Lösung hat gdw. ψ_P gültig ist (die Konstruktion ist offensichtlich berechenbar). Das Alphabet von P sei $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$. Wir verwenden ein einstelliges Prädikatensymbol P_ε , zweistellige Prädikatensymbole R_{a_1}, \dots, R_{a_n} , sowie ein zweistelliges Prädikatensymbol S . Die Idee der Reduktion ist, dass die Menge aller Wörter über Σ wie folgt als baumförmige relationale Struktur dargestellt wird:



Das Symbol S wird nun verwendet, um Lösungskandidaten für P zu repräsentieren:



Dabei verbindet S Knoten x, y wenn es eine Indexfolge i_1, \dots, i_ℓ gibt, so dass $x = u_{i_1} \cdots u_{i_\ell}$ und $y = v_{i_1} \cdots v_{i_\ell}$. Die im obigen Beispiel dargestellten Kanten ergeben sich zum Beispiel falls $P = \{(a_1, a_n), (a_1, a_1 a_n a_1), (a_n a_n, a_1), \dots\}$ (der Übersicht halber sind nicht *alle* sich ergebenden Kanten dargestellt). Die Existenz einer Lösung entspricht nun offensichtlich genau der Existenz einer reflexiven S -Schleife!

Wir beschreiben nun die angekündigte Konstruktion der Formel ψ_P . Als Abkürzung definiere zunächst für jedes Wort $w = a_{i_1} \cdots a_{i_\ell} \in \Sigma^+$:

$$\vartheta_w(x_1, x_\ell) := \exists x_2 \cdots \exists x_{\ell-1} (R_{a_{i_1}}(x_1, x_2) \wedge \cdots \wedge R_{a_{i_\ell}}(x_{\ell-1}, x_\ell)),$$

mit anderen Worten: x_ℓ repräsentiert die Konkatination von x_1 mit w . Die folgenden Formeln beschreiben nun das PKP P :

$$\begin{aligned} \varphi_P &:= \exists x P_\varepsilon(x) \wedge \\ &\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \forall x \exists y R_{a_i}(x, y) \wedge \\ &\bigwedge_{1 \leq i \leq k} \forall x \forall y_1 \forall y_2 ((P_\varepsilon(x) \wedge \vartheta_{x_i}(x, y_1), \wedge \vartheta_{y_i}(x, y_2) \rightarrow S(y_1, y_2)) \wedge \\ &\bigwedge_{1 \leq i \leq k} \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 ((S(x_1, x_2) \wedge \vartheta_{x_i}(x_1, y_1), \wedge \vartheta_{y_i}(x_2, y_2) \rightarrow S(y_1, y_2)) \\ \psi_P &:= \varphi \rightarrow \exists x S(x, x) \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass ψ_P gültig ist gdw. P eine Lösung hat.

“ \Rightarrow ”. Angenommen, ψ_P ist gültig. Betrachte die oben bereits informell beschriebene

Struktur \mathcal{A} :

$$\begin{aligned}
 U_{\mathcal{A}} &= \Sigma^* \\
 P_{\varepsilon}^{\mathcal{A}} &= \{\varepsilon\} \\
 R_{a_i}^{\mathcal{A}} &= \{(w, wa_i) \mid w \in \Sigma^*\} \\
 S^{\mathcal{A}} &= \{(w_1, w_2) \mid \text{es gibt Indexfolge } i_1, \dots, i_{\ell} \ (\ell > 0), \text{ so dass} \\
 &\quad w_1 = u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdots u_{i_{\ell}} \text{ und } w_2 = v_{i_1} \cdot v_{i_2} \cdots v_{i_{\ell}}\}
 \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass \mathcal{A} die Formel φ_P erfüllt. Da ψ_P gültig ist, muss \mathcal{A} dann auch $\exists x S(x, x)$ erfüllen. Also gibt es ein $w \in \Sigma^*$ mit $(w, w) \in S^{\mathcal{A}}$. Nach Konstruktion von \mathcal{A} gibt es daher eine Lösung für P .

“ \Leftarrow ”. Angenommen, P hat eine Lösung. Sei \mathcal{A} eine Interpretation, die φ_P erfüllt. Zu zeigen: \mathcal{A} erfüllt auch $\exists x S(x, x)$. Wähle dazu eine konkrete Lösung i_1, \dots, i_{ℓ} ($\ell > 0$) für P .

Da \mathcal{A} die Formel φ_P erfüllt, erfüllt \mathcal{A} die folgenden Eigenschaften:

1. es gibt ein $d_{\varepsilon} \in U_{\mathcal{A}}$ mit $d_{\varepsilon} \in P_{\varepsilon}^{\mathcal{A}}$
2. weiter gibt es für jedes $w \in \Sigma^+$ ein $d_w \in U_{\mathcal{A}}$ so dass

$$(d_w, d_{wa_i}) \in R_{a_i}^{\mathcal{A}} \text{ für alle } w \in \Sigma^* \text{ und } a_i \in \Sigma$$

3. für $1 \leq j \leq \ell$ gilt $(u_{i_1} \cdots u_{i_j}, v_{i_1} \cdots v_{i_j}) \in S^{\mathcal{A}}$.

Da i_1, \dots, i_{ℓ} Lösung für P , gilt $u_{i_1} \cdots u_{i_{\ell}} = v_{i_1} \cdots v_{i_{\ell}}$, also $(u_{i_1} \cdots u_{i_{\ell}}, u_{i_1} \cdots u_{i_{\ell}}) \in S^{\mathcal{A}}$ und damit ist $\exists x S(x, x)$ erfüllt. □

C. Zusammenfassung Entscheidungsprobleme und Abschlußeigenschaften

	Wortproblem	Leerheitsprob.	Äquivalenzprob.
Typ 0 Grammatik	unentsch.	unentsch.	unentsch.
Typ 1 Grammatik	PSpace-vollständig	unentsch.	unentsch.
Typ 2 Grammatik / PDA	polyzeit	polyzeit	unentsch.
det. PDA	linearzeit	polyzeit	entscheidbar
NEA / reg. Ausdruck / Typ 3 Grammatik	linearzeit	linearzeit	PSpace-vollständig
DEA	linearzeit	linearzeit	polyzeit

	$L_1 \cap L_2$	$L_1 \cup L_2$	\bar{L}	$L_1 \cdot L_2$	L^*
Typ 0	✓	✓	✗	✓	✓
kontextsensitiv	✓	✓	✓	✓	✓
kontextfrei	✗	✓	✗	✓	✓
det. kontextfrei	✗	✗	✓	✗	✗
regulär	✓	✓	✓	✓	✓

Abkürzungsverzeichnis

bzw.	beziehungsweise
DEA	deterministischer endlicher Automat
d.h.	das heißt
DTM	deterministische Turingmaschine
EBNF	erweiterte Backus-Naur-Form
etc.	et cetera
gdw.	genau dann wenn
geg.	gegeben
i.a.	im allgemeinen
LBA	linear beschränkter Automat
MPKP	modifiziertes Postsches Korrespondenzproblem
NEA	nichtdeterministischer endlicher Automat
NP	nichtdeterministisch polynomiell
NTM	nichtdeterministische Turingmaschine
o.B.d.A.	ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit
PDA	pushdown automaton (Kellerautomat)
dPDA	Deterministischer Kellerautomat
PKP	Postsches Korrespondenzproblem
PL1	Prädikatenlogik erster Stufe
SAT	satisfiability problem (Erfüllbarkeitstest der Aussagenlogik)
TM	Turingmaschine (allgemein)
u.a.	unter anderem
URM	unbeschränkte Registermaschine
vgl.	vergleiche
z.B.	zum Beispiel
□	was zu beweisen war (q.e.d)

Mathematische Symbole und Notation

$\{, \}$ Mengenklammern
$x \in M$ x ist Element der Menge M
$M_1 \subseteq M_2$ M_1 Teilmenge von M_2
$M_1 \subset M_2$ oder $M_1 \subsetneq M_2$ M_1 <i>echte</i> Teilmenge von M_2
\emptyset leere Menge
$M_1 \cup M_2$ Vereinigung von Mengen M_1 und M_2
$M_1 \cap M_2$ Schnitt von Mengen M_1 und M_2
$M_1 \setminus M_2$ Mengendifferenz: M_1 ohne die Elemente von M_2
\overline{M} Komplement der Menge M (bezüglich einer als bekannt angenommenen "Gesamtmenge")
$M_1 \times M_2$ Kreuzprodukt der Mengen M_1 und M_2
$ M $ Kardinalität der Menge M (Anzahl Elemente)
2^M Potenzmenge von M (Menge aller Teilmengen)
\wedge logisches "und"
\vee logisches "oder"
\neg logisches "nicht"
\Rightarrow (auch \rightarrow) logisches "impliziert"
\Leftrightarrow (auch \leftrightarrow) logisches "genau dann, wenn"
\mathbb{N} Menge der natürlichen Zahlen
$f : M \rightarrow M'$ Funktion f bildet von Menge M in Menge M' ab
$n!$ n Fakultät
$f \in O(g)$ Funktion f wächst schließlich nicht schneller als Funktion g
$f _D$ Einschränkung der Funktion f auf Definitionsbereich D
\sim Äquivalenzrelation

Σ	Alphabet (oft auch: Eingabealphabet)
a, b, c	Alphabetsymbole
w, u, v, x, y, z	Wörter
ε	leeres Wort
a^n	Wort, das aus n mal dem Symbol a besteht
$ w $	Länge des Wortes w
$ w _a$	Anzahl Vorkommen des Symbols a im Wort w
$w_1 \cdot w_2$	Konkatenation der Wörter w_1 und w_2
L	formale Sprache
$L_1 \cdot L_2$	Konkatenation der Sprachen L_1 und L_2
L^i	i -fache Konkatenation der Sprache L mit sich selbst
L^*	Kleene Stern, angewendet auf die Sprache L
L^+	$= L \cdot L^*$
\mathcal{A}	Automat (DEA, NEA, Kellerautomat, LBA, Turingmaschine)
Q	Zustandsmenge
F	Endzustandsmenge
q, p	Zustände von Automaten
q_0	Startzustand von Automat
δ	Übergangsfunktion von deterministischen Automaten
Δ	Übergangsrelation von nichtdeterministischen Automaten / Turingmaschinen
$L(\mathcal{A})$	Vom Automaten \mathcal{A} erkannte Sprache
$p \xrightarrow{a} \mathcal{A} q$	NEA \mathcal{A} kann in einem Schritt unter Lesen von Symbol a von Zustand p in Zustand q übergehen
$p \xrightarrow{w} \mathcal{A} q$	NEA \mathcal{A} kann unter Lesen von Wort w von Zustand p in Zustand q übergehen
$p \xRightarrow{i} \mathcal{A} q$	NEA \mathcal{A} kann in i Schritten von Zustand p in Zustand q übergehen
r, s	reguläre Ausdrücke
$r \cdot s$	regulärer Ausdruck für Konkatenation
$r + s$	regulärer Ausdruck für Vereinigung
r^*	regulärer Ausdruck für Kleene Stern
Reg_Σ	Menge aller regulärer Ausdrücke über Σ
$q \sim_{\mathcal{A}} q'$	Zustände q und q' sind \mathcal{A} -äquivalent
$[q]_{\mathcal{A}}$	Äquivalenzklasse von Zustand q bzgl. $\sim_{\mathcal{A}}$

\simeq_L	Nerode-Rechtskongruenz für Sprache L
$[u]_L$	Äquivalenzklasse von Wort u bzgl. \simeq_L
$\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}'$	Die DEAs \mathcal{A} und \mathcal{A}' sind isomorph
G	Grammatik
N	Menge der nichtterminalen Symbole einer Grammatik
P	Menge der Regeln (Produktionen) einer Grammatik
A, B, C	Nichtterminale Symbole
S	Startsymbol
$u \rightarrow v$	Produktion einer Grammatik
$x \vdash_G y$	Wort y aus Wort x in Grammatik G in einem Schritt ableitbar
$x \vdash_G^i y$	Wort y aus Wort x in Grammatik G in i Schritten ableitbar
$x \vdash_G^* y$	Wort y aus Wort x in Grammatik G ableitbar
$L(G)$	von Grammatik G erzeugt Sprache
\mathcal{L}_0	Klasse der Sprachen vom Typ 0
\mathcal{L}_1	Klasse der kontextsensitiven Sprachen (Typ 1)
\mathcal{L}_2	Klasse der kontextfreien Sprachen (Typ 2)
\mathcal{L}_3	Klasse der regulären Sprachen (Typ 3)
Γ	Kellularphabet (Kellerautomat), Bandalphabet (Turingmaschine)
Z_0	Kellerstartsymbol
$k \vdash_{\mathcal{A}} k'$	Kellerautomat / Turingmaschine \mathcal{A} kann in einem Schritt von Konfiguration k in Konfiguration k' übergehen
$k \vdash_{\mathcal{A}}^i k'$	Kellerautomat / Turingmaschine \mathcal{A} kann in i Schritten von Konfiguration k in Konfiguration k' übergehen
$k \vdash_{\mathcal{A}}^* k'$	Kellerautomat / Turingmaschine \mathcal{A} kann von Konfiguration k in Konfiguration k' übergehen
\mathcal{L}_2^d	Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen
\flat	Blank Symbol (Turingmaschine)
$\$, \phi$	Bandendesymbole (LBA)

Griechische Buchstaben

Kleinbuchstaben und einige typische Verwendungen im Skript

α	alpha
β	beta
γ	gamma
δ	(bezeichnet meist Übergangsfunktion)	delta
ε	(bezeichnet meist das leere Wort)	epsilon
ζ	zeta
η	eta
θ	(manchmal auch ϑ)	theta
ι	iota
κ	kappa
λ	lambda
μ	my
ν	ny
ξ	xi
\omicron	omikron
π	(bezeichnet meist Pfad in NEA)	pi
ρ	rho
σ	sigma
τ	tau
υ	ypsilon
φ	(manchmal auch ϕ)	phi
χ	chi
ψ	psi
ω	omega

Großbuchstaben und einige typische Verwendungen im Skript

Γ (bezeichnet meist Keller- bzw. Bandalphabet)	Gamma
Δ (bezeichnet meist Übergangsrelation)	Delta
Θ	Theta
Λ	Lambda
Π	Pi
Ξ	Xi
Σ (bezeichnet meist Alphabet)	Sigma
Υ	Ypsilon
Φ	Phi
Ψ	Psi
Ω	Omega

Die restlichen griechischen Buchstaben existieren nicht als Großbuchstaben.

Literaturverzeichnis

- [Koz06] Dexter Kozen. *Automata and Computability*. Springer Verlag, 2007
- [Hop06] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullmann. *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*. Dritte Ausgabe. Addison Wesley, 2006
- [Schö97] Uwe Schöning. *Theoretische Informatik – kurzgefaßt*. Spektrum Akademischer Verlag, 1997
- [Wege93] Ingo Wegener. *Theoretische Informatik*. Teubner-Verlag, 1993