Prof. Dr. Thomas Schneider WS 2016/17

Logik

Übungsblatt 5

Abgabe am 11. 1. (Mittwoch) zu Beginn der Übung

---

1. (25 %)

a) Gib jeweils einen SK-Beweis für die folgenden Sequenzen an:

(i) $(\varphi_1 \vee \neg\psi), (\varphi_2 \vee \psi) \Rightarrow \varphi_1, \varphi_2$

(ii) $\neg\exists x\, P(x) \;\Rightarrow\; \forall x\, \neg P(x)$

(iii) $\forall x\, R(f(x), x),\ \forall x\, \forall y\, (\neg R(x, y) \vee R(y, y)) \;\Rightarrow\; \forall x\, R(x, x)$

b) Zeige, dass die folgende Sequenz nicht gültig ist:

$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (\neg R(x, y) \vee \neg R(y, z) \vee R(x, z)) \Rightarrow \forall x\, R(x, x),\ \forall x\, \forall y\, (\neg R(x, y) \vee R(y, x))$

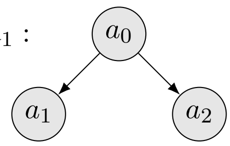
2. (25 %) Betrachte die Signatur $\tau = \{E\}$ von gerichteten Graphen, wobei E ein binäres Relationssymbol ist, das die Kanten des Graphen repräsentiert. Eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ (also ein Graph) ist *2-färbbar*, wenn man ihre Elemente mit zwei Farben *rot* und *grün* einfärben kann, so dass die Endpunkte jeder Kante unterschiedlich gefärbt sind – d. h., wenn es eine Abbildung $f : A \to \{r, g\}$ gibt, so dass für alle $(a, b) \in E^{\mathfrak{A}}$ gilt: $f(a) \neq f(b)$. Es ist bekannt (und leicht einzusehen), dass ein Graph 2-färbbar ist gdw. er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

Beweise, dass 2-Färbbarkeit keine FO-ausdrückbare Eigenschaft ist. Benutze dazu das Kompaktheitstheorem. Gehe so vor:

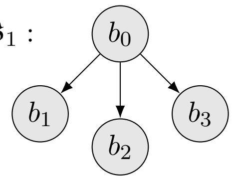
- Nimm an, es gebe eine Formel φ, die ausdrückt, dass es keinen Kreis ungerader Länge gibt.
- Finde eine unendliche Formelmenge Γ mit $\Gamma \models \varphi$ und zeige, dass φ nicht Konsequenz einer endlichen Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ sein kann.
- Folgere mit dem 2. Teil des Kompaktheitstheorems, dass 2-Färbbarkeit nicht FO-ausdrückbar sein kann.

3. (25 %) Gib für die folgenden Strukturen $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$ das kleinste k an, so dass *Spoiler* eine Gewinnstrategie in k Zügen hat. Gib sowohl die Gewinnstrategie an, als auch einen Satz φ mit $\mathsf{qr}(\varphi) = k$, der in der einen Struktur gilt und in der anderen nicht.

a) $\mathfrak{A}_1$:



$\mathfrak{B}_1$:



b) $\mathfrak{A}_2 = (2^{\mathbb{N}}, \subseteq)$ und $\mathfrak{B}_2 = (2^{\{0,1\}}, \subseteq)$ (gemeint sind jeweils die Potenzmengen)

c) $\mathfrak{A}_3 = (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathfrak{B}_3 = (\mathbb{R}, <)$

Die Markierungen a_i, b_i sind die Namen der Elemente der Universen, keine Konstanten.

Bitte wenden.

4. (25 %) Zeige, dass

a) *Duplicator* auf den Strukturen $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ für alle $k \geq 0$ eine Gewinnstrategie für $\mathcal{G}_k(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ hat (verwende, dass beide Ordnungen dicht sind).

b) $\mathsf{Th}(\mathfrak{A}) = \mathsf{Th}(\mathfrak{B})$ für $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{R}, <)$ (verwende a)).

5. Zusatzaufgabe (20 %)

Sei τ eine beliebige endliche Signatur. Im Folgenden sollen alle Strukturen und Sätze stets die Signatur τ verwenden.

a) Zeige, dass die Menge aller endlichen Strukturen rekursiv aufzählbar ist.

b) Verwende a) um zu beweisen, dass die Menge aller FO-Sätze, die ein endliches Modell haben, rekursiv aufzählbar ist.

c) Verwende Trakhtenbrots Theorem um zu beweisen, dass die Menge aller FO-Sätze, die kein endliches Modell besitzen, nicht rekursiv aufzählbar ist.

Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Menge der FO-Sätze in der Signatur τ rekursiv aufzählbar ist.