Logik

Übungsblatt 5

Abgabe am 16. 12. zu Beginn der Übung

1. (25 %) Beweise oder widerlege:
   a) Sei T eine beliebige FO-Theorie. Dann gilt $\forall x\,(x = x) \in T$.
   b) Wenn T_1 und T_2 FO-Theorien sind, dann ist auch $T_1 \cup T_2$ eine FO-Theorie.
   c) Wenn T_1 und T_2 FO-Theorien sind, dann ist auch $T_1 \cap T_2$ eine FO-Theorie.
   d) Wenn T eine FO-Theorie ist, dann ist auch $\{\neg\varphi \mid \varphi \in T\}$ eine FO-Theorie.
   e) Wenn T eine vollständige Theorie ist, dann ist $\varphi \wedge \psi \in T$ genau dann, wenn $\varphi \in T$ und $\psi \in T$.

2. (26 %)
   a) Gib jeweils einen SK-Beweis für die folgenden Sequenzen an:
      (i) $(\varphi \vee \psi),\ (\varphi \vee \vartheta) \ \Rightarrow\ \varphi,\ (\psi \wedge \vartheta)$
      (ii) $\forall x\, P(x) \ \Rightarrow\ \neg\exists x\, \neg P(x)$
      (iii) $\forall x\, R(x, f(x)),\ \forall x\,\forall y\,(\neg R(x,y) \vee R(x,x)) \ \Rightarrow\ \forall x\, R(x,x)$
   b) Zeige, dass für die Korrektheit der Regel $(\exists \Rightarrow)$ die Bedingung „c nicht in $\Gamma, \Delta, \varphi(x)$“ wichtig ist. Gib dafür einen SK-Beweis einer *nicht* gültigen Sequenz an, der die Regel $(\exists \Rightarrow)$ anwendet, ohne auf die Bedingung zu achten.

3. (24 %) Man kann den Sequenzenkalkül um zusätzliche Regeln erweitern, die es erlauben, Beweise abzukürzen. Die neuen Regeln müssen natürlich korrekt sein, um die Korrektheit des Kalküls als Ganzes nicht zu zerstören. Entscheide, ob die folgenden Regeln korrekt sind, ob also gilt: wenn die Sequenzen in der oberen Zeile gültig sind, dann auch die Sequenz in der unteren Zeile. Wenn das der Fall ist, gib einen Beweis ähnlich wie im Korrektheitsbeweis des SK an. Wenn die Regel nicht korrekt ist, gib die Ableitung einer nicht gültigen Sequenz als Gegenbeispiel an.

   a) $$\frac{\Gamma, \varphi_1 \Rightarrow \psi_1 \quad \Gamma, \varphi_2 \Rightarrow \psi_2}{\Gamma, \varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi_1 \vee \psi_2}$$

   b) $$\frac{\Gamma, \varphi_1 \Rightarrow \psi_1 \quad \Gamma, \varphi_2 \Rightarrow \psi_2}{\Gamma, \varphi_1 \vee \varphi_2 \Rightarrow \psi_1 \wedge \psi_2}$$

   c) $$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \psi \quad \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \psi}{\Gamma \Rightarrow \psi}$$

   d) $$\frac{\Gamma, \exists x\, \psi(x) \Rightarrow \Delta, \forall x\, \varphi(x)}{\Gamma, \forall x\, \psi(x) \Rightarrow \Delta, \exists x\, \varphi(x)}$$

4. (25 %) Betrachte die Signatur $\tau = \{E\}$ von gerichteten Graphen, wobei E ein binäres Relationssymbol ist, das die Kanten des Graphen repräsentiert. Eine τ-Struktur $\mathfrak{A}$ (also ein Graph) ist *2-färbbar*, wenn man ihre Elemente mit zwei Farben *rot* und *grün* einfärben kann, so dass die Endpunkte jeder Kante unterschiedlich gefärbt sind – d. h., wenn es eine Abbildung $f : A \to \{r, g\}$ gibt, so dass für alle $(a, b) \in E^{\mathfrak{A}}$ gilt: $f(a) \neq f(b)$. Es ist bekannt (und leicht einzusehen), dass ein Graph 2-färbbar ist gdw. er keinen Kreis ungerader Länge enthält.

   Beweise, dass 2-Färbbarkeit keine FO-ausdrückbare Eigenschaft ist. Benutze dazu das Kompaktheitstheorem. Gehe so vor:

   - Nimm an, es gebe eine Formel φ, die ausdrückt, dass es keinen Kreis ungerader Länge gibt.
   - Finde eine unendliche Formelmenge Γ mit $\Gamma \models \varphi$ und zeige, dass φ nicht Konsequenz einer endlichen Teilmenge $\Delta \subseteq \Gamma$ sein kann.
   - Folgere mit dem 2. Teil des Kompaktheitstheorems, dass 2-Färbbarkeit nicht FO-ausdrückbar sein kann.

5. **Zusatzaufgabe** (25 %)

   Sei τ eine beliebige endliche Signatur. Im Folgenden sollen alle Strukturen und Sätze stets die Signatur τ verwenden.

   a) Zeige, dass die Menge aller endlichen Strukturen rekursiv aufzählbar ist.

   b) Verwende a) um zu beweisen, dass die Menge aller FO-Sätze, die ein endliches Modell haben, rekursiv aufzählbar ist.

   c) Verwende Trakhtenbrots Theorem um zu beweisen, dass die Menge aller FO-Sätze, die kein endliches Modell besitzen, nicht rekursiv aufzählbar ist.

   Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Menge der FO-Sätze in der Signatur τ rekursiv aufzählbar ist.