Beschreibungslogik

Übungsblatt 4

Abgabe im PDF-Format bis 4. 6. 2018, 23:59 Uhr in Stud.IP, Ordner „Abgabe Übungsblatt 4“
Bitte nur eine PDF-Datei pro Gruppe, Lizenz „Selbst verfasstes, nicht publiziertes Werk“.

1. (25 %) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründe kurz.

a) Der Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ ohne TBoxen terminiert immer.

b) Der Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ mit TBoxen terminiert für manche Eingaben nicht.

c) Der Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ verhält sich auf jeder Eingabe $(C_0, \mathcal{T})$ genauso wie der Algorithmus für Typelimination: entweder geben beide „erfüllbar“ aus oder beide „unerfüllbar“.

d) Der Tableau-Algorithmus für $\mathcal{ALC}$ hat im Worst Case dieselbe Laufzeit wie Typelimination.

e) Wenn ein Typ t schlecht in Γ ist, dann gibt es keine Interpretation $\mathcal{I}$, so dass $\{t_\mathcal{I}(d) \mid d \in \Delta^\mathcal{I}\} \subseteq \Gamma$ und $t = t_\mathcal{I}(d)$ für ein $d \in \Delta^\mathcal{I}$.

2. (25 %) Verwende Typelimination um zu entscheiden, ob

a) $C_0 = \exists r.\neg A$ erfüllbar bzgl. $\mathcal{T} = \{\forall r.A \sqsubseteq A, A \sqsubseteq \bot, \forall r.A \sqsubseteq \exists r.A\}$ ist;

b) $C_0 = \forall r.\forall r.A$ erfüllbar bzgl. $\mathcal{T} = \{\neg A \sqsubseteq B, A \sqsubseteq \neg B, \forall r.A \sqsubseteq \bot\}$ ist.

Gib jeweils die konstruierte Folge $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$ an. Im Fall von Erfüllbarkeit gib das Modell aus dem Beweis von Lemma 5.5 an. Beim Wandeln der TBox in Normalform kannst Du Inklusionen der Form $\top \sqsubseteq C$ direkt in $\mathsf{NNF}(C)$ wandeln anstatt in $\neg\top \sqcup C$.

3. (25 %) Betrachte die folgenden $\mathsf{ExpTime}$-Spiele und bestimme, ob Spielerin 2 eine Gewinnstrategie hat. Wenn dies der Fall ist, gib die Strategie an. Wenn nicht, beschreibe, wie Spielerin 1 spielen muss um zu gewinnen. In beiden Spielen weist die Anfangsbelegung π_0 allen Variablen „falsch“ zu.

a) $\varphi = (p_1 \wedge p_2 \wedge \neg q_1) \vee (p_3 \wedge p_4 \wedge \neg q_2) \vee (\neg(p_1 \vee p_4) \wedge q_1 \wedge q_2)$,

$\Gamma_1 = \{p_1, \ldots, p_4\}, \quad \Gamma_2 = \{q_1, q_2\}$

b) $\varphi = ((p_1 \leftrightarrow \neg q_1) \wedge (p_2 \leftrightarrow \neg q_2) \wedge (p_1 \leftrightarrow p_2)) \vee ((p_1 \leftrightarrow q_1) \wedge (p_2 \leftrightarrow q_2) \wedge (p_1 \leftrightarrow \neg p_2))$,

$\Gamma_1 = \{p_1, p_2\}, \quad \Gamma_2 = \{q_1, q_2\}$

Bitte wenden.

4. (25 %) Wenn man aus $\mathcal{ALC}$ die Quantoren $\exists, \forall$ entfernt, bleibt im Wesentlichen Aussagenlogik übrig. Präzisiere diese Beobachtung, indem Du zeigst, dass die folgende eingeschränkte Variante des Erfüllbarkeitsproblems für $\mathcal{ALC}$ *ohne TBoxen* auf das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik (SAT) reduzierbar (und damit in NP) ist.

   > Gegeben ein $\mathcal{ALC}$-Konzept C, in dem *keine* Quantoren $(\exists, \forall)$ vorkommen, entscheide ob C erfüllbar ist.

   Gib die Reduktionsfunktion an und begründe, dass sie die Anforderungen an eine Polynomialzeitreduktion erfüllt.

   Hinweis: Wer Kenntnisse über (Polynomialzeit-)Reduktionen auffrischen möchte, kann z. B. Def. 16.8 und 19.1 im Skript Theoretische Informatik $1+2$ (in Stud.IP) nachlesen.

5. **Zusatzaufgabe** (20 %) Erweitere den Typeliminationsalgorithmus aus der Vorlesung auf die Beschreibungslogik $\mathcal{ALCI}$, also auf $\mathcal{ALC}$ mit inversen Rollen. Der neue Algorithmus soll korrekt und vollständig sein und auf jeder Eingabe terminieren (Beweise sind aber nicht gefordert). Wende den erweiterten Algorithmus auf folgende Eingaben an und überprüfe, ob er das richtige Ergebnis liefert:

   a) $C_0 = \top, \;\; \mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists r.A \sqcap \forall r^-.\neg A\}$

   b) $C_0 = \top, \;\; \mathcal{T} = \{\top \sqsubseteq \exists r^-.A \sqcap \forall r.\neg A\}$