Vollständigkeit der Logik erster Stufe

Ziel:

Satz:

$$\Phi \models_{FOL} \psi \implies \Phi \vdash_{FOL} \psi$$

Das reduziert zu

Satz: Jede FOL-konsistente Formelmenge ist FOL-erfüllbar.

Beweisstrategie, Schritt 1

Definiere Henkin-Theorie $T_H = (\Sigma_H, \Phi_H)$ als Erweiterung von Σ um Zeugenkonstanten c_ϕ und Zeugenaxiome

$$\text{(H1)} \qquad (\exists x.\, \phi) \implies \phi[c_\phi/x]$$

sowie um Axiome (H2)–(H5), die die Schlußregeln für $\exists$, $\forall$, $=$ ersetzen. Dabei

$$\Sigma_H = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n,$$

Σ_{n+1} enthält Zeugenkonstanten für Σ_n.

Das Geburtstagslemma

$$bd(c_\phi) = \min\{n \mid c_\phi \in \Sigma_n\}$$

Lemma: Sei $bd(c_\phi) \geq bd(c_\psi)$. Dann kommt c_ϕ im Zeugenaxiom für c_ψ nicht vor.

Beweisstrategie, Schritt 2

Eliminationssatz: Sei Φ Menge von Σ-Formeln, ψ Σ-Formel. Dann gilt

$$\Phi \cup \Phi_H \vdash_{\Sigma_H} \psi \implies \Phi \vdash_{\Sigma} \psi.$$

Bereits reduziert auf Zwischenziel

$$\Phi \cup \Phi_H \vdash_{\Sigma_H} \psi \implies \Phi \vdash_{\Sigma_H} \psi$$

Beweisstrategie, Schritt 3

Satz (Henkin-Konstruktion): Sei h WB mit

$$\hat{h}(AL(\phi)) = \top \quad \text{f.a. } \phi \in \Phi_H.$$

Dann existiert eine FO-Struktur M_h, so dass

$$M_h \models \phi \iff \hat{h}(AL(\phi)) = \top \quad \text{f.a. Formeln } \phi$$